離散最適化基礎論　第 4 回
一般グラフの最大マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 27 日

最終更新：2020 年 10 月 28 日　22:24

スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)
- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)
5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)
- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)
7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの最大マッチング問題	→	二部グラフの最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの最大マッチング問題	→	一般グラフの最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム ＋ 線形計画法 ⇝ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

今日のメインテーマ

一般グラフ　＝ 二部グラフであるとは限らないグラフ

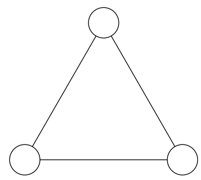
素朴な疑問

- 二部グラフでないと，最大マッチング問題の何が難しいのか？
- 二部グラフでないと，最大最小定理がないのか？

二部グラフ	→	一般グラフ
Hall の結婚定理	→	???
Kőnig–Ore の公式	→	???
Kőnig–Egerváry の定理	→	???

一般グラフで，Kőnig–Egerváry の定理が成り立つとは限らない

次のグラフにおいて

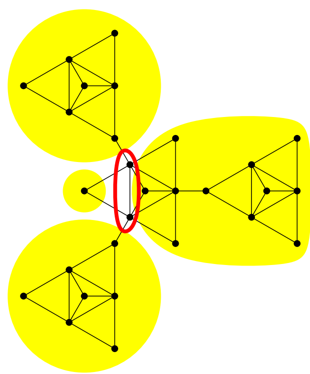


- $|$ 最大マッチング $| = 1$
- $|$ 最小頂点被覆 $| = 2$

$\therefore$ $|$ 最大マッチング $| < |$ 最小頂点被覆 $|$

目次

このグラフに完全マッチングは存在するか？



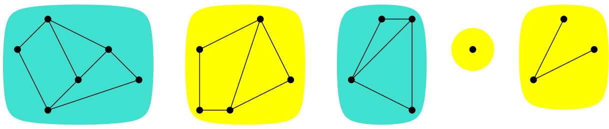
存在しない

グラフの奇成分

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：奇成分 (odd component)

G の奇成分とは，
G における連結成分で，頂点数が奇数であるもののこと



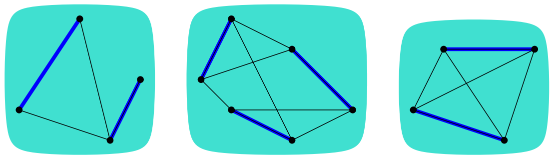
記法：奇成分の総数

$o(G) = G$ における奇成分の総数

上の例では，$o(G) = 3$

グラフの奇成分と完全マッチング (1)

仮定：$G = (V, E)$ が完全マッチング M を持つ



- $\therefore$ G の連結成分の頂点数は必ず偶数
- $\therefore$ $o(G) = 0$

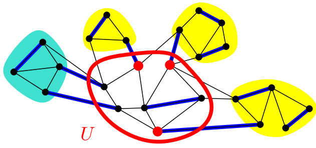
つまり

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ $o(G) = 0$

グラフの奇成分と完全マッチング (2)

仮定：$G = (V, E)$ が完全マッチング M を持つ

- 任意の $U \subseteq V$ を考える



- $\therefore$ $G - U$ の各奇成分と U の頂点を結ぶ M の辺が必ず存在
- $\therefore$ $o(G - U) \leq |U|$

つまり

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 任意の $U \subseteq V$ に対して $o(G - U) \leq |U|$

前のページの観察は $U = \emptyset$ のときに対応

Tutte の定理

いま示したこと

G が完全マッチングを持つ $\Rightarrow$ 任意の $U \subseteq V$ に対して $o(G - U) \leq |U|$

(Tutte 条件)

今から行うこと

「この逆も正しいこと」の証明

これが Tutte の定理

二部グラフ	$\rightarrow$	一般グラフ
Hall の結婚定理	$\rightarrow$	Tutte の定理
Kőnig–Ore の公式	$\rightarrow$	???
Kőnig–Egerváry の定理	$\rightarrow$	???

ウィリアム・タット

William T. Tutte
(1917–2002)

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tutte/

目次

Tutte の定理

無向グラフ $G = (V, E)$

定理：完全マッチングの存在性 (Tutte '47)

G が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow$ 任意の $U \subseteq V$ に対して，$o(G - U) \leq |U|$ (Tutte 条件)

$\Rightarrow$ の証明： 既に示した

$\Leftarrow$ の証明： こちらを今から行う

- 任意の $U \subseteq V$ に対して，$o(G - U) \leq |U|$ であると仮定
- $U = \emptyset$ とすると，$o(G) = o(G - \emptyset) \leq |\emptyset| = 0$
- $\therefore$ G の連結成分の頂点数はどれも偶数

以下，G は連結であり，その頂点数を $2n$ として，
n に関する帰納法で証明する

Tutte の定理：証明 (1)

無向グラフ $G = (V, E)$

補題

任意の $U \subseteq V$ に対して，$|V| \equiv o(G - U) - |U| \bmod 2$

証明：

- $|V - U| \equiv o(G - U) \bmod 2$ ($\because$ 連結成分の頂点数を数える)
- $\therefore$ $|V| = |U| + |V - U| \equiv |U| + o(G - U) \bmod 2$
- ここで，$|U| \equiv -|U| \bmod 2$ に注意 $\square$

補題の系

G の頂点数が偶数 $\Rightarrow$
任意の $U \subseteq V$ に対して，$o(G - U) \equiv |U| \bmod 2$

Tutte の定理：証明 (2)

$n = 1$ のとき ($|V| = 2$ のとき)

- $G = (V, E)$ として考えるべきグラフは 1 通り

- このグラフは完全マッチングを持つ

つまり，成り立つ

Tutte の定理：証明 (3)

$n \geq 1$ として，$|V| \leq 2n$ のときに成り立つと仮定

帰納法の仮定

$G' = (V', E')$ が $|V'| \leq 2n$ を満たすとき，

任意の $U' \subseteq V'$ に対して，$o(G' - U') \leq |U'|$ $\Rightarrow$ G' が完全マッチングを持つ

証明する目標

$G = (V, E)$ が $|V| = 2(n+1)$ を満たすとき，

任意の $U \subseteq V$ に対して，$o(G - U) \leq |U|$ $\Rightarrow$ G が完全マッチングを持つ

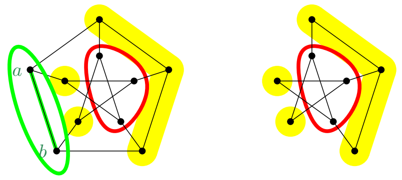
2 つの場合に分けて考える

1. 任意の $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) < |U|$ のとき
2. ある $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) = |U|$ のとき

Tutte の定理：証明 (4)

1 任意の $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) < |U|$ のとき

- 任意の $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) \leq |U| - 2$ ($\because$ 補題)
- 辺で結ばれた 2 頂点 a, b を考え，$A = \{a, b\}$，$G' = G - A$ とする



観察

任意の $U' \subseteq V - A$ に対して，$o(G' - U') \leq |U'|$

観察の証明：

$o(G' - U') = o(G - (U' \cup A)) \leq |U' \cup A| - 2 = |U'| + 2 - 2 = |U'|$ □

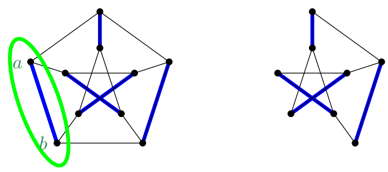
Tutte の定理：証明 (5)

1 任意の $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) < |U|$ のとき

観察：再掲

任意の $U' \subseteq V - A$ に対して，$o(G' - U') \leq |U'|$

- つまり，帰納法の仮定から，G' は完全マッチング M' を持つ

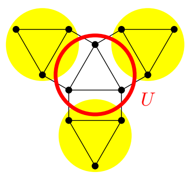


- このとき，$M' \cup \{\{a, b\}\}$ は G の完全マッチングである
- $\therefore$ G は完全マッチングを持つ

Tutte の定理：証明 (6)

2 ある $U \subseteq V$ ($|U| \geq 2$) に対して，$o(G - U) = |U|$ のとき

- $o(G - U) = |U|$ となる $U \subseteq V$ の中で要素数が最大のものを考える
  - つまり，$|U'| > |U|$ ならば，$o(G - U') \neq |U'|$ となる

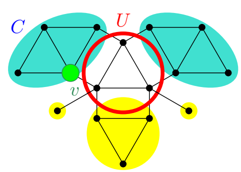


Tutte の定理：証明 (7)

観察 1

$G - U$ の連結成分はすべて奇成分

観察 1 の証明：$G - U$ に偶成分 C があると仮定

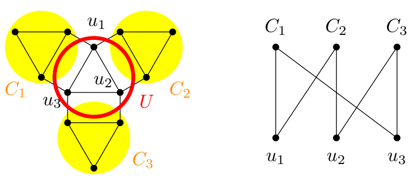


- C には，U のある頂点と隣接する頂点が存在する ($\because$ G は連結)
- そのような頂点を v として，$U' = U \cup \{v\}$ とする
- このとき，$o(G - U') \leq |U'|$ (仮定)
- 一方で，$o(G - U') \geq o(G - U) + 1 = |U| + 1 = |U'|$
- $\therefore$ U' は $o(G - U') = |U'|$ と $|U'| > |U|$ を満たす
- これは，U の最大性に矛盾 □

Tutte の定理：証明 (8)

ここで，次のような二部グラフ $H = (A, B, F)$ を考える

- $A = G - U$ の奇成分，$B = U$
- $F = \{\{a, v\} \mid G$ において a のある頂点と v が隣接 $\}$

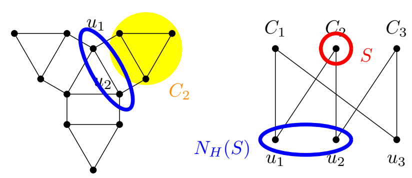


観察 2

H は完全マッチングを持つ

Tutte の定理：証明 (9)

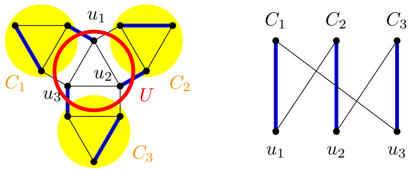
観察 2 の証明：Hall の結婚定理を使う



- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- $|S| \leq o(G - N_H(S))$ ($\because$ S の各奇成分は $G - N_H(S)$ の奇成分)
- また，$o(G - N_H(S)) \leq |N_H(S)|$ (仮定)
- $\therefore$ $|S| \leq o(G - N_H(S)) \leq |N_H(S)|$
- Hall の結婚定理より，H は完全マッチングを持つ □

Tutte の定理：証明 (10)

H の完全マッチングを 1 つ固定し，それを用いて，
$G - U$ の奇成分と U の間の辺を完全マッチングの辺 (の一部) として選ぶ



観察 1 より，$G - U$ に偶成分はないので，
あとは，$G - U$ の奇成分の中で完全マッチングを構成できればよい

Tutte の定理：証明 (11)

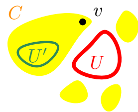
$G - U$ の奇成分 C，C の任意の頂点 v

観察 3

$C - v$ は完全マッチングを持つ

観察 3 の証明：

- $C - v$ の任意の頂点部分集合 U' を考える
- 背理法のため，$o((C - v) - U') > |U'|$ とする
- 補題より，$o((C - v) - U') \geq |U'| + 2$
- したがって，

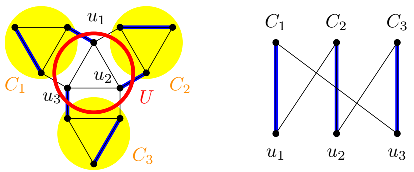


$$\begin{aligned} o(G - (U' \cup \{v\} \cup U)) &= o((C - v) - U') + o(G - U) - 1 \\ &\geq (|U'| + 2) + |U| - 1 \\ &= |U'| + 1 + |U| \\ &= |U' \cup \{v\} \cup U| \end{aligned}$$

Tutte の定理：証明 (12)

観察 3 の証明 (続き)：

- 一方で，$o(G - (U' \cup \{v\} \cup U)) \leq |U' \cup \{v\} \cup U|$ (仮定)
- $\therefore o(G - (U' \cup \{v\} \cup U)) = |U' \cup \{v\} \cup U|$ かつ $|U' \cup \{v\} \cup U| > |U|$
- これは U の最大性に矛盾
- ゆえに，$o((C - v) - U') \leq |U'|$
- $\therefore$ 帰納法の仮定によって，$C - v$ は完全マッチングを持つ □



観察 1, 2, 3 より，G は完全マッチングを持つ □

目次

Berge–Tutte の公式

アイディア

二部グラフに対する Kőnig–Ore の公式と同様に
Tutte 条件の「不足分」から 最大マッチングの要素数が分かる

Tutte 条件：$o(G - U) - |U| \leq 0$

定理：Berge–Tutte の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$|\text{最大マッチング}| = \min \frac{1}{2}\{|V| - o(G - U) + |U| \mid U \subseteq V\}$$

注：G が完全マッチングを持つ ⇒ 右辺 $= |V|/2$

二部グラフ	→	一般グラフ
Hall の結婚定理	→	Tutte の定理
Kőnig–Ore の公式	→	Berge–Tutte の公式
Kőnig–Egerváry の定理	→	???

Berge–Tutte の公式：弱双対性の証明 (1)

2 つの不等式の簡単な方を証明する

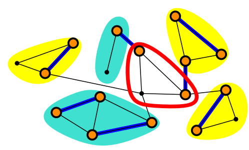
Berge–Tutte の公式 (弱双対性)

無向グラフ $G = (V, E)$ における，
任意のマッチング M と任意の頂点部分集合 U に対して

$$2|M| \leq |V| - o(G - U) + |U|$$

証明：M が飽和する頂点全体の集合を A とする

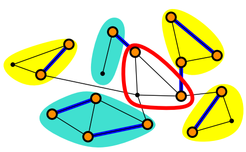
- $G - U$ の奇成分の頂点集合を $O_1, \ldots, O_k$，
偶成分の頂点集合を $E_1, \ldots, E_\ell$ とする



Berge–Tutte の公式：弱双対性の証明 (2)

証明 (続き)：このとき

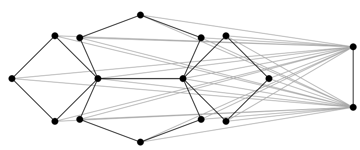
$$\begin{aligned} 2|M| = |A| &= |U \cap A| + \sum_{i=1}^{k} |O_i \cap A| + \sum_{j=1}^{\ell} |E_j \cap A| \\ &\leq |U| + \sum_{i=1}^{k} (|O_i| - 1) + |U| + \sum_{j=1}^{\ell} |E_j| \\ &= |U| + \sum_{i=1}^{k} |O_i| + \sum_{j=1}^{\ell} |E_j| - k + |U| \\ &= |V| - o(G - U) + |U| \end{aligned}$$ □



Berge–Tutte の公式：証明 (1)

$d = \max\{o(G - U) - |U| \mid U \subseteq V\}$ とする ($d \geq 0$ に注意)

- 頂点数 d の完全グラフ K_d を考え，
G の各頂点と K_d の各頂点を辺で結んだグラフを G' とする



今から示すこと

G' は完全マッチングを持つ

そのために，Tutte の定理を使う

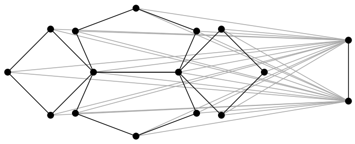
- $d = 0$ のとき，$G' = G$ であり，G は完全マッチングを持つので，
G' も完全マッチングを持つ
- $\therefore d \geq 1$ と仮定する

Berge–Tutte の公式：証明 (2)

Tutte の定理

無向グラフ $G' = (V', E')$ に対して

G' が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow$ 任意の $U' \subseteq V'$ に対して，$o(G' - U') \leq |U'|$



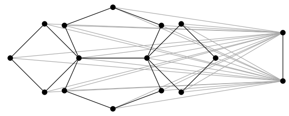
3 つの場合に分けて考える

1. $U' = \emptyset$ のとき
2. U' が K_d の頂点をすべて含むとき
3. それら以外のとき

Berge–Tutte の公式：証明 (3)

1 $U' = \emptyset$ のとき

- $o(G') = o(G' - U') \equiv (|V| + d) + |U'| = |V| + d \bmod 2$ ($\because$ 補題)
- $d = \max\{o(G - U) - |U| \mid U \subseteq V\} \equiv |V| \bmod 2$ ($\because$ 補題)
- $\therefore |V| + d \equiv |V| + |V| \equiv 0 \bmod 2$
- $d \geq 1$ のとき，G' は連結なので，$o(G') \leq 1$
- $\therefore o(G') = 0$



補題 (証明済み)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $U \subseteq V$ に対して，

$$|V| \equiv o(G - U) - |U| \bmod 2$$

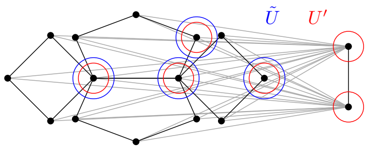
Berge–Tutte の公式：証明 (4)

2 U' が K_d の頂点をすべて含むとき

- $\tilde{U} = U' \cap V$ とする
- このとき，

$$\begin{aligned} o(G' - U') - |\tilde{U}| &= o(G - \tilde{U}) - |\tilde{U}| \\ &\leq \max\{o(G - U) - |U| \mid U \subseteq V\} \\ &= d \end{aligned}$$

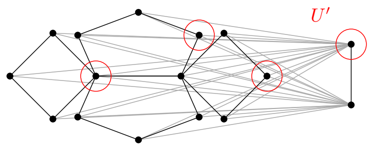
- $\therefore o(G' - U') \leq |\tilde{U}| + d = |U'|$



Berge–Tutte の公式：証明 (5)

3 それら以外のとき

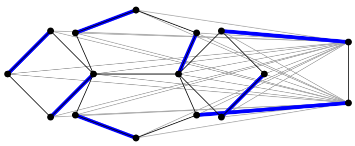
- $G - U'$ は連結であり，つまり，$o(G - U') \leq 1$
- $U' \neq \emptyset$ なので，$o(G' - U') \leq 1 \leq |U'|$



ゆえに，G' は完全マッチングを持つ

Berge–Tutte の公式：証明 (6)

M' を G' の完全マッチングとする



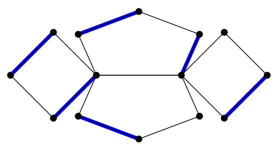
- M' の辺で G の頂点同士を結ぶものを集めて，M とする
- M は G におけるマッチングであり，

$$|M| \geq |M'| - d = \frac{|V| + d}{2} - d = \frac{1}{2}(|V| - d)$$

- $\therefore |G \text{ の最大マッチング}| \geq |M| \geq \frac{1}{2}(|V| - d)$ □

Berge–Tutte の公式：双対性の使い方 (1)

次のマッチングが存在する

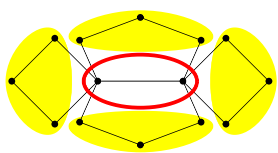


このことから，

最大マッチングの辺数 ≥ 6

Berge–Tutte の公式：双対性の使い方 (1)

次の頂点部分集合 U を考える



弱双対性より

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq \frac{1}{2}(14 - 4 + 2) = 6$$

したがって，最大マッチングの辺数 $= 6$

Berge–Tutte の公式 (弱双対性)

無向グラフ $G = (V, E)$ における，マッチング M と頂点部分集合 U に対して

$$2|M| \leq |V| - o(G - U) + |U|$$

目次

今日のまとめ

重要概念

- 奇成分
- Tutte の定理，Berge–Tutte の公式

次回予告

- 一般グラフの最大マッチングのアルゴリズム
- 重要概念 1：花
- 重要概念 2：グラフの縮約