離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2021 年 2 月 2 日**

必須レポート課題 **2**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

1　レポート課題

次の 5 問にすべて答えよ．

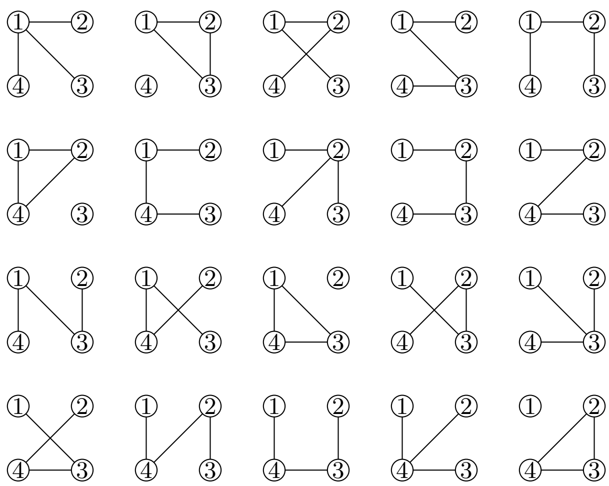
問 1

表の出る確率が p であり，裏の出る確率が $1-p$ であるような硬貨を考える．ただし，$0 < p \leq 1$ である．この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える．以下の問いに答えよ．

1. n 回硬貨を投げたとき，表の出る回数を表す確率変数を X とする．定数 $c > 1$ に対して $\mathsf{E}[c^X]$ が何であるか，答えよ．
2. 次の不等式を証明せよ．
$$\Pr(X \geq 2pn) \leq \left(\frac{1+(c-1)p}{c^{2p}}\right)^n.$$
3. $p = 1/4$ のとき，この右辺を最小とする c を求めよ．

問 2

自然数 $n \in \mathbb{N}$ と $m \in \mathbb{N}$ が $n \geq 2$ と $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ を満たすものとする．頂点数が n，辺数が m であるようなランダム・グラフ $\mathbb{G}(n,m)$ を次のように定義する．すなわち，これは頂点集合を $V = \{1,2,\ldots,n\}$ として，辺の数が m であるようなグラフを一様分布に従って生成することによって得られるものである．例えば，$n=4, m=3$ の場合は，$\mathbb{G}(n,m)$ では次のグラフの中の 1 つが確率 1/20 で得られる．



$\mathbb{G}(n,m)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 任意の異なる 2 頂点 u, v を考える．このとき，確率 $\Pr(\{u,v\} \in E)$ を n, m を使った式で表せ．
2. 任意の頂点 v に対して，その次数の期待値 $\mathsf{E}[\deg(v)]$ を n, m を使った式で表せ．

問 3

次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは，停止するとき，入力の配列 A の最小値を返す．(この事実は以下の議論で使用してもよい．) 入力において，A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する．

```
1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x
8: end
```

ここで，4 行目における `A-{p}` は，入力配列 A から要素 p を削除して得られる配列を表すものとする．

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる `G` の数を X_A で表し，$x_n = \max\{\mathsf{E}[X_A] \mid |A| = n\}$ とする ($|A|$ は A の長さを表す)．このとき，$x_1 = 0$ であることを証明せよ．

2. $n \geq 2$ であるとき，

$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} x_n$$

が成り立つことを証明せよ．

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ を考える．

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_n &= t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} t_n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ．

4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めよ．

5. 以上から，$x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ．

問 4

次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

以下の問いに答えよ．

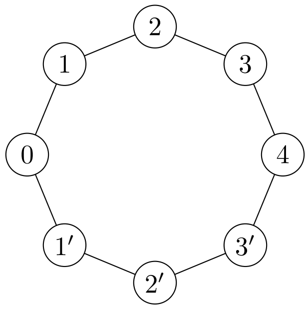
1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け．

2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ．

3. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ．

問 5

次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．



このとき，頂点 4 から頂点 0 への到達時刻の期待値を求めよ．

2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 2 月 15 日 (月) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて，課題「必須レポート提出」より PDF ファイル をアップロードする．レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること．
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 日本語表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点．
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということを意味する.「(2) 日本語表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか，ということを意味する.「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということを意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる．
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為が疑われる可能性がある．
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (Zoom ミーティングなどを通して，口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない．

以上