

1 レポート課題

次の 5 問にすべて答えよ。

問 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。(ヒント: $(x+1)^n$ を x に関して微分してみよ。)

問 2

自然数 n を入力とする、次のアルゴリズムを考える。

```
1: def fnct(n)
2:   print "G"
3:   if n == 0
4:     return
5:   else
6:     fnct(n/5)
7:     fnct((7*n)/10)
8:   end
9: end
```

ここで、演算子 $/$ は自然数に対する除算であり、小数点以下は切り捨てられる。

自然数 $n \geq 0$ に対して、 $\text{fnct}(n)$ が出力する G の総数を p_n で表す。以下の問いに答えよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して,

$$p_n = 1 + p_{\lfloor n/5 \rfloor} + p_{\lfloor 7n/10 \rfloor}$$

が成り立つことを証明せよ。

2. $p_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ。

問 3

次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ na_{n-1} + 2n + (-1)^n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $b_n = a_n/n!$ とする。母関数を用いる方法によって、数列 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ。
2. 小問 1 の結果を用いて、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

問 4

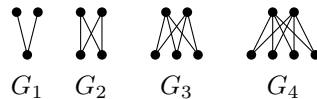
1 以上の自然数 n, m を考える. 任意の行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |S|=n}} \det(A[*, S]) \det(B[S, *])$$

が成り立つ. ただし, $A[*, S] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする列に A を制限してできる行列であり, $B[S, *] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする行に B を制限してできる行列であるとする. この事実を, 重み付き有向グラフに対する LGV 公式を用いて証明せよ.

問 5

次のグラフ $G_1, G_2, G_3, G_4, \dots$ を考える



一般に, G_n は上側に 2 頂点, 下側に n 頂点を持つ完全二部グラフであるとする. 以下の問いに答えよ.

1. グラフ G_1, G_2, G_3 のラプラス行列 L_1, L_2, L_3 を具体的に記述せよ. (頂点の番号 (ラベル) は適当に与えてよいが, どのように与えたのか説明すること.)
2. 前小問を用いて, 行列式を計算することにより, グラフ G_1, G_2, G_3 の全域木の総数を求めよ. (この小問において, 行列式の計算手順を記述する必要はないが, どの行列式を計算するのかということは説明すること.)
3. 前小問と同じ考え方を用い, 行列式を計算することにより, グラフ G_n の全域木の総数を求めよ (ただし, $n \geq 1$ とする). この小問では, 行列式の計算手順も記述すること. (ヒント: 行列式の計算は, うまく基本変形を繰り返すことでできる.)

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 1 月 4 日 (月) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「必須レポート提出」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 日本語表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 日本語表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上