離散数理工学　第 11 回
離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 1 月 12 日

最終更新：2021 年 1 月 22 日　17:05

スケジュール 前半

1. 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- ⋆ 休み (祝日) (11/3)
5. 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
6. 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- ⋆ 休み (調布祭片付け) (11/24)
7. 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

8 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)

⋆ 中間レポート出題 (12/15)

9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)

10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)

11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)

12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)

13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)

⋆ 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの解析ができるようになる

- 多項式の同一性判定 (シュワルツ・ジッペルの補題)
- 多項式の同一性判定の応用：完全マッチングの存在性

重要な技法

- 成功確率の増幅

乱択アルゴリズムとは?: 復習

乱数を用いる (あるいは，用いてもよい) アルゴリズムのこと

確率的アルゴリズム，乱数使用アルゴリズムとも呼ばれる

乱択アルゴリズムの類型

乱択アルゴリズムは，主に次の 2 種類に分けられる

- ラスベガス型乱択アルゴリズム
  - 必ず正しい出力を行う
  - 計算量が確率的に定まる
- モンテカルロ型乱択アルゴリズム
  - 正しい出力を行う保証がない
  - 正しい出力に対する「ずれ」が確率的に定まる

目次

多項式の同一性判定 (1)

例題

x に関する次の 2 つの ($\mathbb{R}$ 上の) 多項式は「同じ」多項式か？

- $(x-2)^2-(x+4)(x-3)+(2x-1)^2$
- $4x^2-9x+17$

2 つの多項式 $p, q \in \mathbb{R}[x]$ が同じであるとは，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$p(x) = q(x)$$

となること

多項式の同一性判定 (2)

例題

x に関する次の 2 つの ($\mathbb{R}$ 上の) 多項式は「同じ」多項式か？

- $p(x) = (x-2)^2 - (x+4)(x-3) + (2x-1)^2$
- $q(x) = 4x^2 - 9x + 17$

展開すれば，次のようになることが分かる

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)^2 - (x+4)(x-3) + (2x-1)^2 \\ &= (x^2 - 4x + 4) - (x^2 + x - 12) + (4x^2 - 4x + 1) \\ &= (1 - 1 + 4)x^2 + (-4 - 1 - 4)x + (4 + 12 + 1) \\ &= 4x^2 - 9x + 17 = q(x) \end{aligned}$$

つまり，上の 2 つの多項式は同じである □

多項式の同一性判定 (3)

例題

x に関する次の 2 つの ($\mathbb{R}$ 上の) 多項式は「同じ」多項式か？

- $p(x) = (x-2)^2 - (x+4)(x-3) + (2x-1)^2$
- $q(x) = 4x^2 - 9x + 17$

$p(x), q(x)$ は x に関する (高々) 2 次式なので，3 つの異なる点で評価する

- $x = 0$ のとき，$\begin{cases} p(0) = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) + (-1)^2 = 17 \\ q(0) = 17 \end{cases}$
- $x = 1$ のとき，$\begin{cases} p(1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-2) + 1^2 = 12 \\ q(1) = 4 - 9 + 17 = 12 \end{cases}$
- $x = -1$ のとき，$\begin{cases} p(-1) = (-3)^2 - 3 \cdot (-4) + (-3)^2 = 30 \\ q(-1) = 4 + 9 + 17 = 30 \end{cases}$

つまり，上の 2 つの多項式は同じである □

多項式の同一性判定 (4)

「展開による方法」のよい点と悪い点

- よい点：同じか同じでないか，必ず分かる
- よい点：多変数多項式でも使える
- 悪い点：展開は大変

「評価による方法」のよい点と悪い点

- よい点：同じか同じでないか，必ず分かる
- よい点：多変数多項式でも使える
- よい点：評価は簡単
- 悪い点：多変数多項式だと，評価する点の数が多くなる

多項式の同一性判定 (5)

「評価による方法」のよい点と悪い点

- 悪い点：多変数多項式だと，評価する点の数が多くなる

例えば，

- 1 変数の多項式，次数が高々d $\rightsquigarrow$ 評価する点の数 $= d+1$
- 2 変数の多項式，次数が高々d $\rightsquigarrow$ 評価する点の数 $= \binom{d+2}{2}$

$$p(x,y) = a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}$$

- n 変数の多項式，次数が高々d $\rightsquigarrow$ 評価する点の数 $= \binom{d+n}{n}$

$$n = 100,\ d = 10 \rightsquigarrow \binom{d+n}{n} = 46,897,636,623,981 \text{ (約 46 兆)}$$

多項式の同一性判定：乱択アルゴリズム

考える乱択アルゴリズム

評価する点をランダムに選ぶ

ランダムに選ぶ方法

- 評価する点の候補となる有限集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ を決めておく
- S^n から一様分布に従って点を選ぶ

多項式の同一性判定：乱択アルゴリズム — シュワルツ・ジッペルの補題

考える状況

- $n \geq 1, d \geq 0$： 自然数
- p： n 変数実多項式で，次数が高々d であり，恒等的に 0 ではないもの (ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq 0$)
- $S \subseteq \mathbb{R}$： 有限集合

シュワルツ・ジッペルの補題

S から一様分布に従って独立に $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を選ぶとき

$$\Pr(p(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}$$

この補題は Schwartz ('80) と Zippel ('79) によるが，
DeMillo と Lipton ('78) も同じような命題を証明している

シュワルツ・ジッペルの補題を用いた多項式同一性判定

多項式同一性判定に対する乱択アルゴリズム

1. 適当に $S \subseteq \mathbb{R}$ を選ぶ
2. $r_1, \ldots, r_n \in S$ を一様分布に従って独立に選ぶ
3. $p(r_1, \ldots, r_n) - q(r_1, \ldots, r_n) = 0$ ならば,「同一である」と出力
   そうでなければ,「同一でない」と出力

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) = q(x)$ であるとき,

- 任意の $r_1, \ldots, r_n \in S$ に対して，$p(r_1, \ldots, r_n) = q(r_1, \ldots, r_n)$
- $\therefore$ アルゴリズムは正しく「同一である」と必ず出力

ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq q(x)$ であるとき,

- $p - q$ は恒等的に 0 ではない多項式
- シュワルツ・ジッペルの補題から，$p - q$ の次数が d のとき

$$\Pr(p(r_1, \ldots, r_n) - q(r_1, \ldots, r_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}$$

- $\therefore$ 正しく「同一でない」と出力する確率 $\geq 1 - \dfrac{d}{|S|}$

多項式の同一性判定：よい点と悪い点

「乱択アルゴリズム」のよい点と悪い点

- よい点：評価は簡単
- よい点：多変数多項式でも，評価する点の数が少ない
- 悪い点：同じか同じでないか，必ず分かるわけではない

「展開による方法」のよい点と悪い点

- よい点：同じか同じでないか，必ず分かる
- 悪い点：展開は大変

「評価による方法」のよい点と悪い点

- よい点：同じか同じでないか，必ず分かる
- よい点：評価は簡単
- 悪い点：多変数多項式だと，評価する点の数が多くなる

多項式の同一性判定：よい点と悪い点 (表)

	展開	評価	乱択
必ず分かる	○	○	×
計算が簡単	×	○	○
点の数が少ない	–	×	○

評価する点の数

$n = 100, d = 10$ のとき

- 乱択ではない $\rightsquigarrow \binom{d+n}{n}$ 約 46 兆
- 乱択 $\rightsquigarrow 1$ 1

間違える確率

- 乱択 $\rightsquigarrow$ 同じでないとき，間違える確率 $\leq \dfrac{d}{|S|}$

間違える確率を小さくするには？ (1)

アイディア 1 : $|S|$ を大きくする

- 例えば，$d = 10$ のとき
  - $|S| = 100$ ならば，$\dfrac{d}{|S|} = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$
  - $|S| = 200$ ならば，$\dfrac{d}{|S|} = \dfrac{10}{200} = \dfrac{1}{20}$

アイディア 2 : 同じアルゴリズムを繰り返して実行する

間違える確率を小さくするには？ (2)

乱択アルゴリズムの反復実行

K = 反復回数

1. 先ほどの乱択アルゴリズムを K 回独立に実行する
2. 1 回でも $p(r_1, \ldots, r_n) \neq q(r_1, \ldots, r_n) \Rightarrow$ 「同一でない」と出力
   そうでない $\Rightarrow$ 「同一である」と出力

ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq q(x)$ であるとき

- K 回とも $p(r_1, \ldots, r_n) = q(r_1, \ldots, r_n)$ となるとき，出力が間違い
- 出力が間違いである確率 $\leq \left(\dfrac{d}{|S|} \right)^K$

結論：確率増幅

反復実行により，間違う確率を指数関数的に小さくできる

反復実行は，モンテカルロ型乱択アルゴリズムにおける常套手段

目次

シュワルツ・ジッペルの補題 (再掲)

考える状況

- $n \geq 1, d \geq 0$： 自然数
- p： n 変数実多項式で，次数が高々d であり，恒等的に 0 ではないもの (ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq 0$)
- $S \subseteq \mathbb{R}$： 有限集合

シュワルツ・ジッペルの補題 (再掲)

S から一様分布に従って独立に $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を選ぶとき

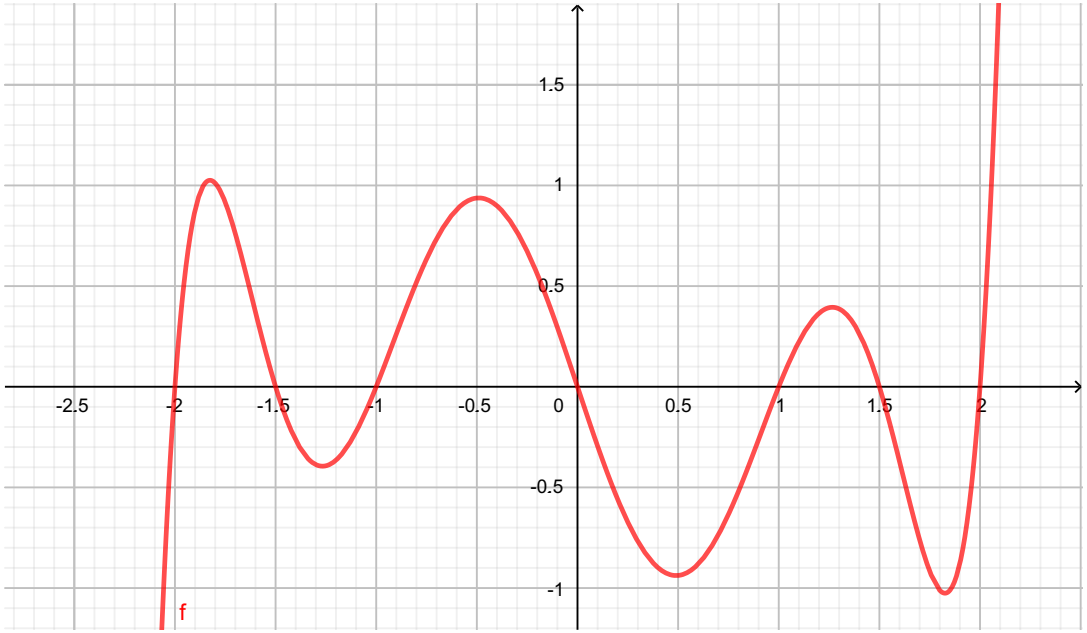
$$\Pr(p(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}$$

証明は n に関する帰納法

シュワルツ・ジッペルの補題：証明 (1)

$n = 1$ のとき

- $p(r) = 0$ となる r の数 $\leq d$ ($\because p$ は高々d 次多項式)
- $\therefore \Pr(p(r) = 0) \leq \dfrac{d}{|S|}$



シュワルツ・ジッペルの補題：証明 (2)

$\boxed{n = k \geq 2 \text{ のとき}}$ ($n < k$ のときは成り立つと仮定する)

- $p(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ を次の形に書く

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{d} q_i(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^i$$

例：$k = 3,\ d = 2$

$$p(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1^2 - 3x_1x_2)}_{q_0(x_1,x_2)} + \underbrace{(-2x_1 + x_2 - 4)}_{q_1(x_1,x_2)} x_3 + \underbrace{3}_{q_2(x_1,x_2)} x_3^2$$

- q_i は $n-1$ 変数多項式で，次数は高々 $d - i$
- ある i に対して，q_i は恒等的に 0 ではない
  ($\because p$ が恒等的に 0 ではない)
- そのような i の中で最大のものを考え，i^* とする

シュワルツ・ジッペルの補題：証明 (3)

このとき，$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{i^*} q_i(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^i$

- q_{i^*} は恒等的に 0 ではないので，帰納法の仮定から

$$\Pr(q_{i^*}(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}) = 0) \leq \frac{d - i^*}{|S|}$$

- $q_{i^*}(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}) \neq 0$ という仮定の下で，
  $p(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, x_n)$ は 1 変数 i^* 次多項式
- したがって，帰納法の仮定から

$$\Pr(p(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, r_k) = 0 \mid q_{i^*}(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}) \neq 0) \leq \frac{i^*}{|S|}$$

シュワルツ・ジッペルの補題：証明 (4)

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\Pr(p(r_1,\ldots,r_k)=0)\\
&=\Pr(p(r_1,\ldots,r_k)=0 \mid q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})=0)\cdot\Pr(q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})=0)\\
&\quad+\Pr(p(r_1,\ldots,r_k)=0 \mid q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})\neq 0)\cdot\Pr(q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})\neq 0)\\
&\leq \Pr(q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})=0)+\Pr(p(r_1,\ldots,r_k)=0 \mid q_{i^*}(r_1,\ldots,r_{k-1})\neq 0)\\
&\leq \frac{d-i^*}{|S|}+\frac{i^*}{|S|}\\
&=\frac{d}{|S|}
\end{aligned}
$$

□

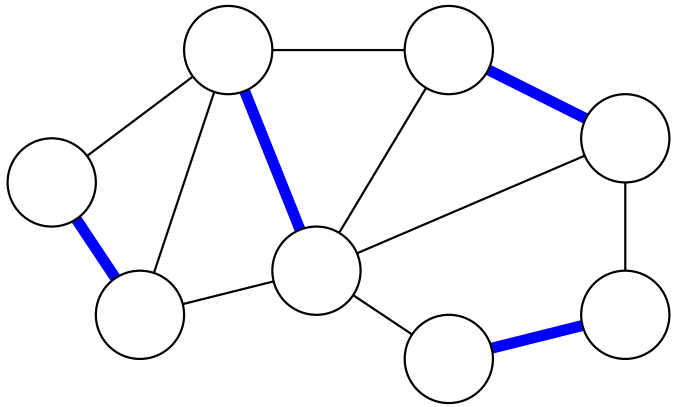
目次

多項式の同一性判定 → 完全マッチングの存在判定

多項式の同一性判定の応用として，
二部グラフにおける完全マッチングの存在判定がある

定義：完全マッチングとは？ (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$ の完全マッチングとは，辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
各頂点 $v \in V$ に対して，v に接続する M の辺がただ 1 つ存在するもの



そのために，グラフから多変数多項式を構成する

エドモンズ行列

二部グラフ $G = (A, B, E)$，$|A| = |B|$,
$A = \{1, 2, \ldots, n\}, B = \{1', 2', \ldots, n'\}$

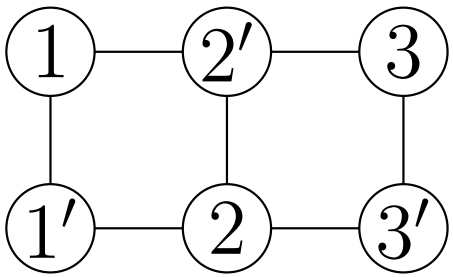
定義：エドモンズ行列

G のエドモンズ行列とは，次の $n \times n$ 行列 $M_G = (m_{i,j})$

$$m_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} & (\{i, j'\} \in E \text{ のとき}) \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

ただし，辺 $\{i, j'\}$ に対して，$x_{i,j}$ は変数

$G =$



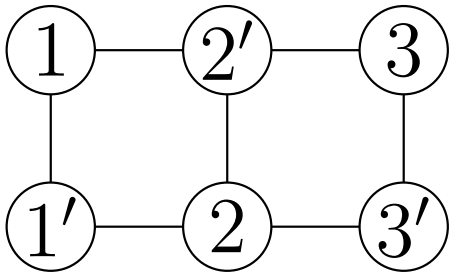
$$M_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1' & 2' & 3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 0 & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \end{array}$$

エドモンズ行列の行列式

$$\det(M_G) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 0 & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3} - x_{1,1}x_{2,3}x_{3,2} - x_{1,2}x_{2,1}x_{3,3}$$

$G =$



- 行列式は $(x_e \mid e \in E)$ に関する多項式　(変数の数 $= |E|$，次数 $= n$)
- $\det(M_G)$ の各単項式が G の完全マッチングに対応する

(c.f. 第 5 回講義)

$\therefore \det(M_G)$ が恒等的に 0 である $\Leftrightarrow$ G に完全マッチングが存在しない

実験

G が偶数長の閉路であるとき，$\det(M_G)$ が恒等的に 0 か，
乱択アルゴリズムで調べた

- $n \in \{2, 3, \ldots, 30\}, S = \{1, 2, \ldots, k\}, k \in \{2, 3, \ldots, 30\}$
- Ruby の `rand` で乱数生成
- 乱択アルゴリズムを 100 回実行し，「恒等的に 0 ではない」と出力した回数を報告

k

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	66	82	89	97	95	93	96	97	97	98	100	98	98	99	99	99	99	99	100	99	98	99	100	97	100	99	98	99	100
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
4	61	89	92	98	98	99	97	97	99	99	99	99	100	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
5	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
6	84	91	91	98	97	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
7	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
8	79	92	96	100	100	99	100	100	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
9	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
10	84	96	98	100	98	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
11	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
12	87	98	97	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
13	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
14	83	97	98	100	100	100	100	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
15	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
16	86	97	100	100	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
17	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
18	89	97	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
19	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
20	86	98	100	100	100	100	100	100	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
21	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
22	94	97	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
23	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
24	89	98	96	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
25	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
26	87	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
27	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
28	91	97	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
29	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
30	90	100	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

実験 (続き)

G が偶数長の閉路であるとき，$\det(M_G)$ が恒等的に 0 か，
乱択アルゴリズムで調べた

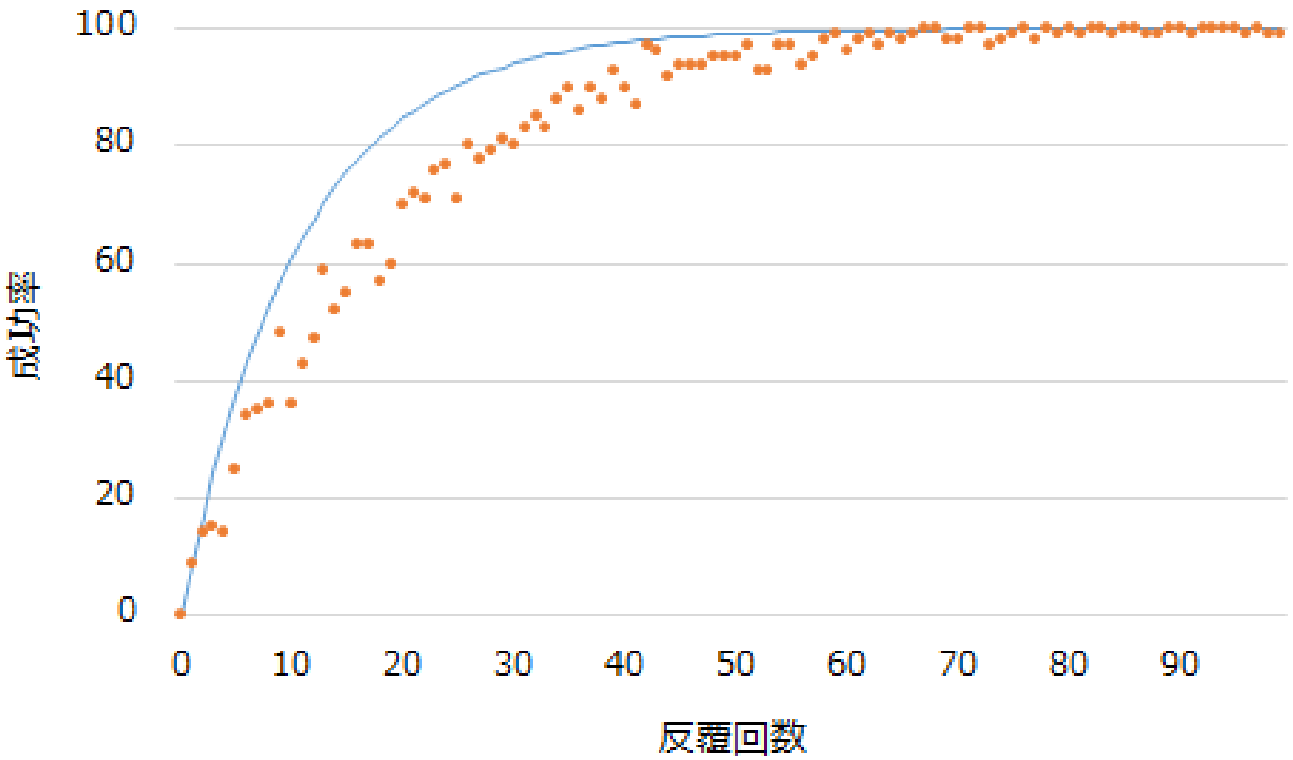
- $n \in \{2, 3, \ldots, 30\}, S = \{-k, \ldots, k\}, k \in \{2, 3, \ldots, 30\}$
- Ruby の `rand` で乱数生成
- 乱択アルゴリズムを 100 回実行し，「恒等的に 0 ではない」と出力した回数を報告

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	73	91	95	95	92	95	97	96	99	100	97	98	99	98	99	100	99	99	100	100	100	100	99	100	100	100	99	100	100
3	73	85	88	91	95	94	98	97	96	99	97	97	99	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100	98	100	99	100	100	100
4	64	78	84	88	88	93	98	96	95	97	98	95	96	100	98	97	98	100	100	99	100	99	100	100	99	100	99	100	100
5	54	75	83	78	83	93	90	90	95	97	97	97	99	99	100	100	97	99	97	99	97	100	99	99	99	97	98	98	100
6	50	63	71	83	88	89	93	92	94	96	95	93	99	96	98	97	99	98	98	99	99	99	99	99	100	100	99	100	99
7	32	53	65	76	86	87	94	91	93	95	96	93	98	94	96	97	100	97	100	100	98	99	98	100	98	96	100	100	100
8	35	53	59	68	76	78	81	91	93	91	94	87	92	92	94	97	96	96	96	96	100	98	97	95	96	98	99	100	100
9	28	46	63	68	74	78	84	86	86	87	97	91	94	93	93	96	98	99	97	96	97	95	91	96	97	99	97	96	97
10	15	42	51	60	66	82	79	85	88	86	89	89	91	91	93	97	95	93	96	93	96	93	99	99	98	95	99	100	99
11	16	25	44	64	67	77	71	81	82	86	84	86	90	91	94	96	96	93	96	93	94	95	96	99	97	97	97	99	98
12	13	24	44	56	58	75	70	75	75	85	89	85	89	91	94	92	94	96	95	95	91	95	92	96	96	97	98	97	98
13	8	20	32	52	50	67	74	73	79	87	91	88	84	80	90	88	96	90	93	93	98	98	95	94	98	96	93	98	95
14	7	15	34	42	50	51	61	79	73	77	88	85	78	87	86	86	92	95	92	95	98	95	95	93	95	91	96	99	97
15	12	20	28	34	53	61	69	67	74	68	89	79	83	87	85	89	87	90	85	91	88	92	90	94	95	95	97	95	96
16	4	22	16	40	50	54	62	63	70	75	75	78	77	79	81	87	92	87	89	89	92	93	89	91	96	98	95	94	97
17	2	13	27	33	35	55	63	69	72	73	76	81	78	83	84	83	87	86	90	84	87	87	93	94	92	94	94	95	94
18	4	9	28	33	43	46	44	52	68	70	68	76	88	84	75	85	90	92	87	91	87	88	94	92	90	92	91	85	92
19	3	8	22	26	43	39	60	59	69	67	79	65	76	76	89	79	84	86	85	83	93	91	90	91	94	91	93	92	92
20	2	6	21	23	35	37	45	53	59	56	69	77	81	79	85	81	84	81	88	85	87	85	86	87	91	90	89	95	91
21	2	6	18	27	31	45	53	47	59	59	67	63	73	72	86	78	86	81	75	88	89	84	92	92	91	85	91	94	92
22	1	6	15	21	31	35	36	53	58	55	68	64	73	72	72	79	71	85	81	74	87	86	87	82	91	91	87	93	86
23	2	1	14	20	21	35	50	44	56	52	66	73	71	78	73	85	71	78	79	83	88	87	83	86	84	91	90	89	92
24	1	6	9	18	16	30	40	42	59	57	67	64	65	77	74	77	75	78	78	86	83	82	84	84	87	84	87	88	88
25	0	2	10	22	19	27	35	58	56	56	64	65	66	65	75	63	74	80	83	80	80	86	82	91	87	86	89	87	94
26	0	3	8	21	22	37	41	42	49	53	58	63	72	59	73	67	75	77	70	82	76	76	89	84	83	91	89	87	86
27	0	0	15	8	18	29	32	43	51	59	64	53	59	69	62	73	81	70	78	75	84	81	77	83	81	82	91	85	89
28	0	5	9	14	20	24	26	43	49	53	50	58	62	69	62	70	76	70	83	75	68	78	81	85	86	85	82	88	85
29	0	0	2	9	19	20	39	37	46	50	58	53	66	73	65	66	76	69	68	80	75	81	82	83	79	78	83	83	91
30	0	1	9	11	12	31	27	28	44	39	52	51	62	58	75	71	59	80	84	70	66	75	69	79	79	85	84	80	84

実験 (続き 2)

乱択アルゴリズムを反復実行し，成功率増幅の様子を観察した

- $n = 30, S = \{-k, \ldots, k\}, k = 4$，Ruby の `rand` で乱数生成
- 乱択アルゴリズムの反復回数 $\in \{0, 1, \ldots, 100\}$
- 100 回実行し，正しく報告した回数を報告



目次

今日の目標

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの解析ができるようになる

- 多項式の同一性判定 (シュワルツ・ジッペルの補題)
- 多項式の同一性判定の応用：完全マッチングの存在性

重要な技法

- 成功確率の増幅

目次