

離散数理工学 第 10 回  
離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 1 月 5 日

最終更新：2021 年 1 月 4 日 14:34

- 1 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- ★ 休み (祝日) (11/3)
- 5 離散代数：行列式とパーマメント (11/10)
- 6 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- ★ 休み (調布祭片付け) (11/24)
- 7 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                           |         |
|----|---------------------------|---------|
| 8  | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)   | (12/8)  |
| ★  | 中間レポート出題                  | (12/15) |
| 9  | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)   | (12/22) |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/5)   |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/12)  |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)         | (1/19)  |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)         | (1/26)  |
| ★  | 予備                        | (2/2)   |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの解析ができるようになる

- ▶ 前進問題
- ▶ 乱択クイックソート

### 乱択アルゴリズムとは？

乱数を用いる (あるいは, 用いてもよい) アルゴリズムのこと

確率的アルゴリズム, 乱数使用アルゴリズムとも呼ばれる

### なぜ乱数を用いるのか？

- ▶ アルゴリズムを設計しやすくなる
- ▶ アルゴリズムを解析しやすくなる
- ▶ 乱数を使わないとできないことが, 乱数を使うとできる

## 目次

① 前進問題

② 乱択クイックソート

③ 今日のまとめ

## 前進問題

## 前進問題

## 設定

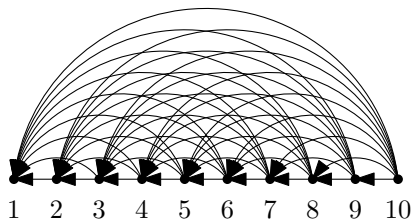
- ▶ 頂点集合を  $\{1, 2, \dots, n\}$  とする有向グラフ ( $n \geq 2$ )
- ▶ 大きな数から小さな数へ向かう辺が必ず存在

## 行うこと

- ▶ 頂点  $n$  から始めて、辺をたどることで頂点  $1$  に到達

## 問題

- ▶ 辺をいくつたどれば頂点  $1$  に到達できるか？



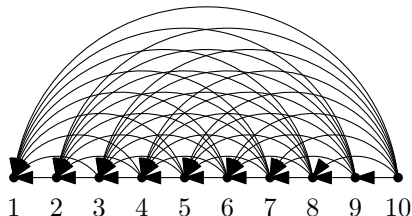
## 単純なアルゴリズム 1 (乱数を使わない)

- 1 たどる辺を任意に選び、辺の先に移動する
- 2 移動先から出る辺がなければ終了、そうでなければ1に戻る

たどる辺の数

- ▶ 最悪の場合： $n - 1$  個
- ▶ (最善の場合：1 個)

最悪計算量の意味では、よくないアルゴリズム





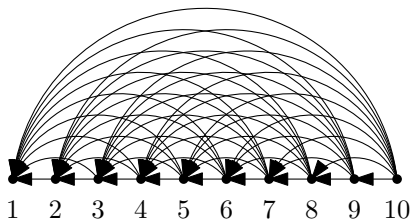
## 単純なアルゴリズム 2 (乱択)

- 1 たどる辺を**一様分布に従って**に選び、辺の先に移動する
- 2 移動先から出る辺がなければ終了、そうでなければ1に戻る

一様分布に  
従って選ぶ

≡

出る辺が  $k$  個ある場合、  
それぞれを確率  $1/k$  で選ぶ



## たどる辺の数の期待値

## 証明すること

単純なアルゴリズム 2 がたどる辺の数の期待値は  $H_{n-1}$

復習 :  $H_{n-1}$  は  $n-1$  次調和数であり,

$$H_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

事実として,  $H_{n-1} = \ln n + O(1)$  が成り立つ

- ▶ つまり, 単純なアルゴリズム 2 がたどる辺の数の期待値は  $O(\log n)$

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点 1 への到達までにたどる辺数

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$E[R_k] = \sum_{i=1}^{k-1} E[R_k | \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\ \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ})$$

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} E[R_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} E[R_k | \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\ &\quad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (E[1 + R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} E[R_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} E[R_k | \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\ &\quad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (E[1 + R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (1 + E[R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}
 E[R_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} E[R_k | \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\
 &\quad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} (E[1 + R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (1 + E[R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} \\
 &= 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]
 \end{aligned}$$



## 証明 (1)

- ▶ 任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, 次の確率変数  $R_k$  を定義

$R_k =$  頂点  $k$  から始めて, 頂点  $1$  への到達までにたどる辺数

- ▶ このとき,  $E[R_1] = 0$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} E[R_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} E[R_k | \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\ &\quad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (E[1 + R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (1 + E[R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i] \end{aligned}$$

- ▶ この再帰式を解きたい

## 解きたい再帰式：再掲

## 解きたい再帰式

$$E[R_k] = \begin{cases} 0 & (k = 1) \\ 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i] & (k \geq 2) \end{cases}$$

## 解きたい再帰式：再掲

## 解きたい再帰式

$$E[R_k] = \begin{cases} 0 & (k = 1) \\ 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i] & (k \geq 2) \end{cases}$$

$k \geq 2$  のとき、両辺を  $k-1$  倍すると

$$(k-1)E[R_k] = k-1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

## 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき, 両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

## 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき, 両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

- ▶ よって,  $k \geq 3$  のとき

$$(k - 2)E[R_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} E[R_i]$$

## 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき, 両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

- ▶ よって,  $k \geq 3$  のとき

$$(k - 2)E[R_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} E[R_i]$$

- ▶ 上の式から下の式を引くと,  $k \geq 3$  のとき

$$(k - 1)E[R_k] - (k - 2)E[R_{k-1}] = 1 + E[R_{k-1}]$$

## 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき, 両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

- ▶ よって,  $k \geq 3$  のとき

$$(k - 2)E[R_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} E[R_i]$$

- ▶ 上の式から下の式を引くと,  $k \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned}(k - 1)E[R_k] - (k - 2)E[R_{k-1}] &= 1 + E[R_{k-1}] \\ (k - 1)E[R_k] &= 1 + (k - 1)E[R_{k-1}]\end{aligned}$$

## 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき, 両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i]$$

- ▶ よって,  $k \geq 3$  のとき

$$(k - 2)E[R_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} E[R_i]$$

- ▶ 上の式から下の式を引くと,  $k \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} (k - 1)E[R_k] - (k - 2)E[R_{k-1}] &= 1 + E[R_{k-1}] \\ (k - 1)E[R_k] &= 1 + (k - 1)E[R_{k-1}] \\ E[R_k] &= \frac{1}{k - 1} + E[R_{k-1}] \end{aligned}$$



## 証明 (3)

- ▶ したがって、 $k \geq 3$  のとき

$$E[R_k] = \frac{1}{k-1} + E[R_{k-1}]$$

## 証明 (3)

- ▶ したがって、 $k \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[R_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathbf{E}[R_{k-1}] \\ &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathbf{E}[R_{k-2}] \end{aligned}$$

## 証明 (3)

- ▶ したがって、 $k \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[R_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathbb{E}[R_{k-1}] \\
 &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathbb{E}[R_{k-2}] \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{E}[R_2]}_{=1}
 \end{aligned}$$

## 証明 (3)

- ▶ したがって、 $k \geq 3$  のとき (厳密には数学的帰納法で証明)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[R_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathbb{E}[R_{k-1}] \\
 &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathbb{E}[R_{k-2}] \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{E}[R_2]}_{=1} \\
 &= H_{k-1}
 \end{aligned}$$

- ▶ 特に、 $n \geq 2$  に対して、

$$\mathbb{E}[R_n] = H_{n-1}$$



## 期待値が分かるとなぜよいか？

- ▶ たどる辺数の期待値が分かったからといって、アルゴリズムがそれだけの辺数しかたどらないとは限らない (乱数を使っているから)
- ▶ しかし、マルコフの不等式から

$$\begin{aligned} \Pr(R_n \geq 2H_{n-1}) &\leq \frac{E[R_n]}{2H_{n-1}} \\ &= \frac{H_{n-1}}{2H_{n-1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- ▶ つまり、 $\Pr(R_n < 2H_{n-1}) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- ▶  $\frac{1}{2}$  以上の確率で、たどる辺数は少ない ( $2H_{n-1}$  未満)

しっかりとした確率を導出するために、チェルノフ上界の技法を使う

## 前進問題：チェルノフ上界の技法

- ▶  $R_n$  の代わりに  $2^{R_n}$  を考えてみる

## 証明したいこと

任意の  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\mathbb{E}[2^{R_k}] = k$$

- ▶ これが正しいとすると,

$$\begin{aligned} \Pr(R_n \geq 2 \log_2 n) &= \Pr(2^{R_n} \geq 2^{2 \log_2 n}) \\ &= \Pr(2^{R_n} \geq n^2) \leq \frac{\mathbb{E}[2^{R_n}]}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- ▶ つまり,  $1 - \frac{1}{n}$  以上の確率でたどる辺数は少ない ( $2 \log_2 n$  未満)

$$\Pr(R_n < 2 \log_2 n) = 1 - \Pr(R_n \geq 2 \log_2 n) \geq 1 - \frac{1}{n}$$

## 前進問題：チェルノフ上界の技法 — 証明 (1)

先ほどと同様な手順を進める

- ▶  $E[2^{R_1}] = 2^0 = 1$ ,  $E[2^{R_2}] = 2^1 = 2$  で,  $k \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}
 E[2^{R_k}] &= \sum_{i=1}^{k-1} E[2^{R_k} \mid \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\
 &\quad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} E[2^{1+R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} E[2 \cdot 2^{R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} 2 E[2^{R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[2^{R_i}]
 \end{aligned}$$

- ▶ この再帰式を解きたい

## 前進問題：チェルノフ上界の技法 — 解きたい再帰式

## 解きたい再帰式

$$E[2^{R_k}] = \begin{cases} 1 & (k = 1) \\ \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[2^{R_i}] & (k \geq 2) \end{cases}$$



## 前進問題：チェルノフ上界の技法 — 証明 (2)

- ▶  $k \geq 2$  のとき，両辺を  $k - 1$  倍すると

$$(k - 1)E[2^{R_k}] = 2 \sum_{i=1}^{k-1} E[2^{R_i}]$$

- ▶ よって， $k \geq 3$  のとき

$$(k - 2)E[2^{R_{k-1}}] = 2 \sum_{i=1}^{k-2} E[2^{R_i}]$$

- ▶ 上の式から下の式を引くと， $k \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} (k - 1)E[2^{R_k}] - (k - 2)E[2^{R_{k-1}}] &= 2E[2^{R_{k-1}}] \\ E[2^{R_k}] &= \frac{k}{k - 1} E[2^{R_{k-1}}] \end{aligned}$$

## 前進問題：チェルノフ上界の技法 — 証明 (3)

- ▶ したがって、 $k \geq 3$  のとき (厳密には数学的帰納法で証明)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[2^{R_k}] &= \frac{k}{k-1} \mathbb{E}[2^{R_{k-1}}] \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \mathbb{E}[2^{R_{k-2}}] \\ &= \dots \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdots \frac{3}{2} \mathbb{E}[2^{R_2}] \\ &= k \end{aligned}$$



## 前進問題：まとめ

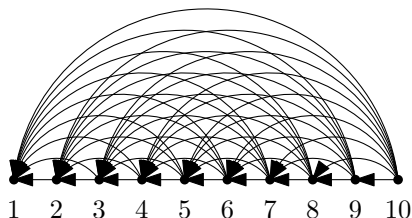
## 乱数を使わないアルゴリズム

- ▶ 最悪時：たどる辺数 =  $n - 1$

## 乱択アルゴリズム

- ▶ 期待値：たどる辺数 =  $H_{n-1}$  ( $= \ln n + O(1)$ )
- ▶ 高確率：たどる辺数 =  $O(\log n)$

∴ 乱数を使うことで、問題を高速に解けた



## 目次

① 前進問題

② 乱択クイックソート

③ 今日のまとめ

## ソートिंग

## ソートिंग (整列問題) とは？

- ▶ 入力：異なる  $n$  個の数から成る配列  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  (配列)
- ▶ 出力： $A$  の並べ替え  $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$  で,  
 $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_n$  を満たすもの

例： $A = (8, 3, 5, 1, 7, 9, 2, 4) \rightsquigarrow A' = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)$

## アルゴリズムにおける基本的な問題

## クイックソート：基本的な考え方

## クイックソート

再帰によってソーティングを行うアルゴリズム (の1つ)

- 1  $A$  から要素を1つ選択 (その要素を**ピボット**と呼ぶ)
  - 2  $A$  を3つの部分に分割
    - ▶  $A_1$  : ピボットよりも小さい要素から成る配列
    - ▶  $p$  : ピボット
    - ▶  $A_2$  : ピボットよりも大きい要素から成る配列
  - 3  $A_1$  と  $A_2$  を再帰的に整列 (結果をそれぞれ  $A'_1, A'_2$  とする)
  - 4  $A'_1$  と  $p$  と  $A'_2$  をこの順に連結して出力
- 
- ▶ アルゴリズムの正当性は直ちに分かる
  - ▶ ピボットの選択法,  $A_1, A_2$  の作成法によって, 細かな実装が変わる

## クイックソート：ピボット選択法

ピボットの選択法,  $A_1, A_2$  の作成法によって, 細かな実装が変わる

## よく使われるピボット選択法

- ▶ 配列の先頭の要素をピボットとする
- ▶ 配列の先頭の3要素の中央値をピボットとする
- ▶ 配列の中のランダムな要素をピボットとする (乱択アルゴリズム)  
(各要素が選択される確率は同一 (一様分布に従う標本抽出))

## 乱択クイックソート

## 乱択クイックソート (適当な疑似コード)

```
1: def quicksort(A) # A: array of distinct numbers
2:   return nil if length(A) == 0
3:   p = a number in A chosen uniformly at random
4:   delete p from A
5:   foreach e in A {
6:     print "G"
7:     if e < p then add e to A1 else add e to A2
8:   }
9:   return quicksort(A1) + p + quicksort(A2)
10: end
```



## 乱択クイックソート

## 乱択クイックソート (Ruby)

```
1: def quicksort(a)
2:   return nil.to_a if a.length == 0
3:   p = a.sample()
4:   a.delete(p)
4':  a1 = Array.new(); a2 = Array.new()
5:   a.each { |e|
6:     print "G"
7:     e < p ? a1 << e : a2 << e
8:   }
9:   return quicksort(a1) + [p] + quicksort(a2)
10: end
```

## ソーティング・アルゴリズムの理論的性能評価

評価尺度として、以下のものがよく用いられる

- ▶ 比較回数：2要素の比較を行った回数
- ▶ 移動回数：要素を移動した回数
- ▶ 領域量：入力配列以外に用いた変数の数

ここでは、**比較回数**に注目 (比較回数 = 出力されたGの個数)

- ▶ 乱択クイックソートにおいて、  
比較回数は使用される乱数によって変わる (つまり、確率変数)

$X_A$  = 入力  $A$  に対する乱択クイックソートの比較回数 (確率変数)

## 乱択クイックソートの解析：注目する確率変数

$X_A$  = 入力  $A$  に対する乱択クイックソートの比較回数 (確率変数)

$x_n$  = 入力サイズを  $n$  としたときの, 最悪時期待比較回数

=  $\max\{E[X_A] \mid |A| = n\}$  (実数)

## 目標：次を証明すること

$x_n$  が小さいこと (具体的には,  $x_n = O(n \log n)$  となること)

そのために  $x_n$  が満たす漸化式を導出する

## 乱択クイックソートの解析：注目する確率変数

$X_A$  = 入力  $A$  に対する乱択クイックソートの比較回数 (確率変数)

$x_n$  = 入力サイズを  $n$  としたときの, 最悪時期待比較回数

=  $\max\{E[X_A] \mid |A| = n\}$  (実数)

## 目標：次を証明すること

$x_n$  が小さいこと (具体的には,  $x_n = O(n \log n)$  となること)

そのために  $x_n$  が満たす漸化式を導出する

- ▶  $x_0 = 0$  (要素数 0 の入力に対して, 比較は行わない)

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (1)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = E[X_A]$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (1)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$\begin{aligned}x_n &= E[X_A] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \Pr(a'_i \text{ がピボット}) \\ &\quad (\text{ただし, } a'_i \text{ は } A \text{ の中で } i \text{ 番目に小さい要素})\end{aligned}$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (1)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$\begin{aligned}
 x_n &= E[X_A] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \Pr(a'_i \text{ がピボット}) \\
 &\quad (\text{ただし, } a'_i \text{ は } A \text{ の中で } i \text{ 番目に小さい要素}) \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (2)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}$$

(ただし,  $a'_i$  は  $A$  の中で  $i$  番目に小さい要素)



## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (2)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}$$

(ただし,  $a'_i$  は  $A$  の中で  $i$  番目に小さい要素)

ここで,  $a'_i$  がピボットであるとき

▶  $|A_1| = i - 1, |A_2| = n - i$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (2)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}$$

(ただし,  $a'_i$  は  $A$  の中で  $i$  番目に小さい要素)

ここで,  $a'_i$  がピボットであるとき

- ▶  $|A_1| = i - 1, |A_2| = n - i$
- ▶  $\therefore E[X_{A_1}] \leq x_{i-1}$  かつ  $E[X_{A_2}] \leq x_{n-i}$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (2)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}$$

(ただし,  $a'_i$  は  $A$  の中で  $i$  番目に小さい要素)

ここで,  $a'_i$  がピボットであるとき

- ▶  $|A_1| = i - 1$ ,  $|A_2| = n - i$
- ▶  $\therefore E[X_{A_1}] \leq x_{i-1}$  かつ  $E[X_{A_2}] \leq x_{n-i}$

したがって,  $n \geq 1$  のとき

$$x_n \leq \sum_{i=1}^n (n - 1 + x_{i-1} + x_{n-i}) \frac{1}{n}$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (2)

$n \geq 1$  のとき,  $x_n = E[X_A]$  となるような入力  $A$  を考えてみると

$$x_n = \sum_{i=1}^n E[X_A \mid a'_i \text{ がピボット}] \frac{1}{n}$$

(ただし,  $a'_i$  は  $A$  の中で  $i$  番目に小さい要素)

ここで,  $a'_i$  がピボットであるとき

- ▶  $|A_1| = i - 1, |A_2| = n - i$
- ▶  $\therefore E[X_{A_1}] \leq x_{i-1}$  かつ  $E[X_{A_2}] \leq x_{n-i}$

したがって,  $n \geq 1$  のとき

$$x_n \leq \sum_{i=1}^n (n - 1 + x_{i-1} + x_{n-i}) \frac{1}{n} = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (3)

 $x_n$  に関して得られた漸化式

$$x_0 = 0$$

$$x_n \leq n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i \quad (n \geq 1)$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (3)

 $x_n$  に関して得られた漸化式

$$x_0 = 0$$

$$x_n \leq n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i \quad (n \geq 1)$$

ここで、次の漸化式を満たす数列  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  を考える

$$t_0 = 0$$

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

## 乱択クイックソートの解析：漸化式 (3)

 $x_n$  に関して得られた漸化式

$$x_0 = 0$$

$$x_n \leq n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i \quad (n \geq 1)$$

ここで、次の漸化式を満たす数列  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  を考える

$$t_0 = 0$$

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

- ▶ このとき、任意の  $n \geq 0$  に対して次が成り立つ (演習問題)

$$x_n \leq t_n$$

- ▶ つまり、 $t_n$  の上界が分かれば、 $x_n$  の上界となる

## 漸化式を解く (1)

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$



## 漸化式を解く (1)

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

この式において、添え字をずらしたものを考えると

$$t_{n+1} = n + \sum_{i=0}^n \frac{2}{n+1} t_i \quad (n \geq 0)$$

## 漸化式を解く (1)

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

この式において、添え字をずらしたものを考えると

$$t_{n+1} = n + \sum_{i=0}^n \frac{2}{n+1} t_i \quad (n \geq 0)$$

これら2つの式を変形すると

$$\begin{aligned} nt_n &= (n-1)n + \sum_{i=0}^{n-1} 2t_i \quad (n \geq 1) \\ (n+1)t_{n+1} &= n(n+1) + \sum_{i=0}^n 2t_i \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

## 漸化式を解く (1)

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

この式において、添え字をずらしたものを考えると

$$t_{n+1} = n + \sum_{i=0}^n \frac{2}{n+1} t_i \quad (n \geq 0)$$

これら2つの式を変形すると

$$nt_n = (n-1)n + \sum_{i=0}^{n-1} 2t_i \quad (n \geq 1)$$

$$(n+1)t_{n+1} = n(n+1) + \sum_{i=0}^n 2t_i \quad (n \geq 0)$$

下から上を引くと、 $n \geq 1$  のとき、

$$(n+1)t_{n+1} - nt_n = 2n + 2t_n$$

## 漸化式を解く (2)

整理すると,  $n \geq 1$  のとき,

$$(n + 1)t_{n+1} = 2n + (n + 2)t_n$$

## 漸化式を解く (2)

整理すると,  $n \geq 1$  のとき,

$$(n+1)t_{n+1} = 2n + (n+2)t_n$$

両辺を  $2(n+1)(n+2)$  で割ると,  $n \geq 1$  のとき,

$$\frac{t_{n+1}}{2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{t_n}{2(n+1)}$$

## 漸化式を解く (2)

整理すると,  $n \geq 1$  のとき,

$$(n+1)t_{n+1} = 2n + (n+2)t_n$$

両辺を  $2(n+1)(n+2)$  で割ると,  $n \geq 1$  のとき,

$$\frac{t_{n+1}}{2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{t_n}{2(n+1)}$$

ここで,  $s_n = \frac{t_n}{2(n+1)}$  と置くと, 得られる漸化式は

$$s_0 = \frac{t_0}{2(0+1)} = 0$$

$$s_1 = \frac{t_1}{2(1+1)} = 0$$

$$s_{n+1} = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} + s_n \quad (n \geq 1)$$

## 漸化式を解く (2)

整理すると,  $n \geq 1$  のとき,

$$(n+1)t_{n+1} = 2n + (n+2)t_n$$

両辺を  $2(n+1)(n+2)$  で割ると,  $n \geq 1$  のとき,

$$\frac{t_{n+1}}{2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{t_n}{2(n+1)}$$

ここで,  $s_n = \frac{t_n}{2(n+1)}$  と置くと, 得られる漸化式は

$$s_0 = \frac{t_0}{2(0+1)} = 0$$

$$s_1 = \frac{t_1}{2(1+1)} = 0$$

$$s_{n+1} = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} + s_n \quad (n \geq 1)$$

解けそうな形に近づいてきた

## 漸化式を解く (3)

$n \geq 2$  のとき,

$$s_n = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1}$$



## 漸化式を解く (3)

$n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1} \\ &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + s_{n-2} \end{aligned}$$

## 漸化式を解く (3)

 $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1} \\ &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + s_{n-2} \\ &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \cdots + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + s_1 \end{aligned}$$

## 漸化式を解く (3)

 $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1} \\ &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + s_{n-2} \\ &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \cdots + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + s_1 \\ &= \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 漸化式を解く (3)

$n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}
 s_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1} \\
 &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + s_{n-2} \\
 &= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \cdots + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + s_1 \\
 &= \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{n+1} + H_{n+1} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

復習:  $H_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$  (調和数)

## 漸化式を解く (3)

 $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} + s_{n-1} \\
&= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + s_{n-2} \\
&= \left( \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \cdots + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + s_1 \\
&= \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n+1} + H_{n+1} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \\
&= H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2
\end{aligned}$$

復習:  $H_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$  (調和数)

## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$t_n = 2(n+1)s_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$t_n = 2(n+1)s_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

したがって,

$$x_n \leq t_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$



## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$t_n = 2(n+1)s_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

したがって,

$$x_n \leq t_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

$H_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$  なので (第8回の演習問題)

$$x_n \leq 2(n+1)(1 + \ln(n+1)) + 2 - 4(n+1)$$

## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$t_n = 2(n+1)s_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

したがって,

$$x_n \leq t_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

$H_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$  なので (第8回の演習問題)

$$\begin{aligned} x_n &\leq 2(n+1)(1 + \ln(n+1)) + 2 - 4(n+1) \\ &= 2(n+1)\ln(n+1) - 2n \end{aligned}$$

## 漸化式を解く (4)

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$s_n = H_{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2$$

したがって,  $n \geq 0$  に対して,

$$t_n = 2(n+1)s_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

したがって,

$$x_n \leq t_n = 2(n+1)H_{n+1} + 2 - 4(n+1)$$

$H_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$  なので (第8回の演習問題)

$$\begin{aligned} x_n &\leq 2(n+1)(1 + \ln(n+1)) + 2 - 4(n+1) \\ &= 2(n+1)\ln(n+1) - 2n = O(n \log n) \end{aligned}$$

## 乱択クイックソートの解析：まとめ

## ここまでで分かったこと

任意の  $n \geq 0$  と,  $|A| = n$  であるような任意の入力  $A$  に対して

$$E[X_A] \leq 2(n+1) \ln(n+1)$$

## 乱択クイックソートの解析：まとめ

## ここまでで分かったこと

任意の  $n \geq 0$  と,  $|A| = n$  であるような任意の入力  $A$  に対して

$$E[X_A] \leq 2(n+1) \ln(n+1)$$

したがって, マルコフの不等式を適用してみると

$$\begin{aligned} \Pr(X_A \geq 4(n+1) \ln(n+1)) &\leq \frac{E[X_A]}{4(n+1) \ln(n+1)} \\ &\leq \frac{2(n+1) \ln(n+1)}{4(n+1) \ln(n+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- ▶ つまり, 比較回数が  $4(n+1) \ln(n+1)$  を超える確率は高くない

## 乱択クイックソートの解析：まとめ

## ここまでで分かったこと

任意の  $n \geq 0$  と,  $|A| = n$  であるような任意の入力  $A$  に対して

$$E[X_A] \leq 2(n+1) \ln(n+1)$$

したがって, マルコフの不等式を適用してみると

$$\begin{aligned} \Pr(X_A \geq 4(n+1) \ln(n+1)) &\leq \frac{E[X_A]}{4(n+1) \ln(n+1)} \\ &\leq \frac{2(n+1) \ln(n+1)}{4(n+1) \ln(n+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- ▶ つまり, 比較回数が  $4(n+1) \ln(n+1)$  を超える確率は高くない
- ▶ 「チェルノフ上界の技法」を用いると,  
 $n \rightarrow \infty$  のとき, この確率が 0 に収束することを証明できる  
 (ちょっと面倒で, 他のアイデアも必要なので, 省略)

# 目次

① 前進問題

② 乱択クイックソート

③ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの解析ができるようになる

- ▶ 前進問題
- ▶ 乱択クイックソート



# 目次

① 前進問題

② 乱択クイックソート

③ 今日のまとめ