

離散数理工学 第9回  
離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020年12月22日

最終更新：2020年12月24日 10:37

- 1 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- ★ 休み (祝日) (11/3)
- 5 離散代数：行列式とパーマメント (11/10)
- 6 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- ★ 休み (調布祭片付け) (11/24)
- 7 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                           |         |
|----|---------------------------|---------|
| 8  | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)   | (12/8)  |
| ★  | 中間レポート出題                  | (12/15) |
| 9  | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)   | (12/22) |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/5)   |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/12)  |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)         | (1/19)  |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)         | (1/26)  |
| ★  | 予備                        | (2/2)   |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

確率的に定義されるグラフの性質を調べられるようになる

- ▶ ランダム・グラフの定義と性質
- ▶ ランダム・グラフの閾値現象 (相転移)

## 目次

- ① ランダム・グラフ
- ② ランダム・グラフの閾値現象
- ③ 今日のまとめ

## ランダム・グラフ

## ランダム・グラフとは？

「確率的に生成されるグラフ」で、次のいずれかを指す

- ▶ 確率的に生成された1つのグラフ
- ▶ グラフの集合上の確率分布

この講義では、「グラフの集合上の確率分布」を考える

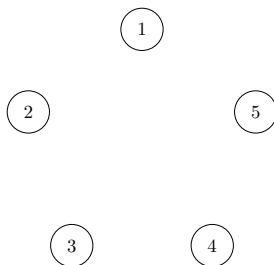
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



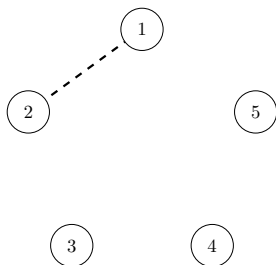
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$ ：頂点数
- ▶  $p$ ：辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：





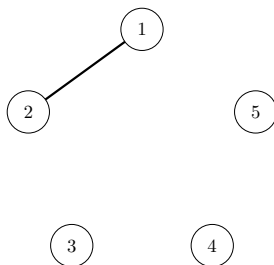
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



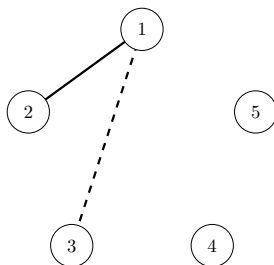
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



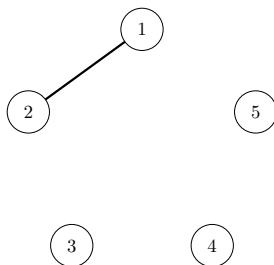
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



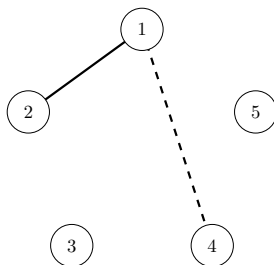
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



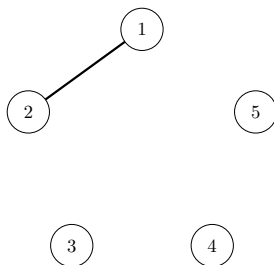
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



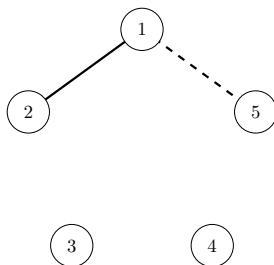
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



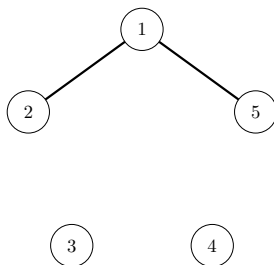
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



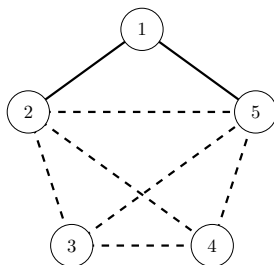
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$ ：頂点数
- ▶  $p$ ：辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：





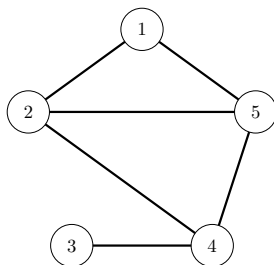
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$  : 頂点数
- ▶  $p$  : 辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：



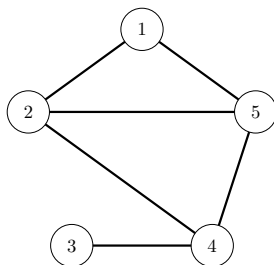
## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニィのランダム・グラフが最も古典的で有名

基本的な考え方：次の2つを予め決めておく

- ▶  $n$ ：頂点数
- ▶  $p$ ：辺確率

$n = 5$ ,  $p = 1/2$  のときの例：このグラフが得られる確率は  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$



## エルデシュ・レニイのランダム・グラフ

グラフの集合上の確率分布として、  
エルデシュとレニイのランダム・グラフが最も古典的で有名

定義：エルデシュとレニイのランダム・グラフ  $\mathbb{G}(n, p)$

- ▶ 実数  $p \in (0, 1)$  と正整数  $n$  を考える
- ▶  $\mathbb{G}(n, p)$  は、頂点数  $n$  の無向グラフ全体上の確率分布で、次を満たす
  - ▶ 各 2 頂点組  $\{u, v\}$  に対して、

$$\Pr(\{u, v\} \text{ が辺である}) = p \quad (\text{辺確率})$$

- ▶ 複数の異なる 2 頂点組  $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$  (任意) に対して、  
辺確率は互いに独立

以後、 $\mathbb{G}(n, p)$  のグラフの頂点集合を  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  で表す

## エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：辺確率の独立性

## 復習：互いに独立であること

「複数の異なる2頂点組  $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$  (任意) に対して、  
辺確率は互いに独立」とは？

任意の  $k \in \mathbb{N}$  と、

複数の異なる任意の2頂点組  $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$  に対して

$$\begin{aligned} & \Pr(\{u_1, v_1\} \text{ が辺である, かつ, } \dots, \text{ かつ, } \{u_k, v_k\} \text{ が辺である}) \\ &= \Pr(\{u_1, v_1\} \text{ が辺である}) \cdots \Pr(\{u_k, v_k\} \text{ が辺である}) \\ &= p^k \end{aligned}$$

## エルデシュ, レニィ, ギルバート

エルデシュとレニィのランダム・グラフは  
エルデシュとレニィの論文 (1959) に登場するが  
それと同時期に, ギルバートの論文 (1959) でも登場している



Paul Erdős  
(1913–1996)



Alfréd Rényi  
(1921–1970)



Edgar Gilbert  
(1923–2013)

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Erδος\\_budapest\\_fall\\_1992\\_\(cropped\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Erδος_budapest_fall_1992_(cropped).jpg)

<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Renyi.html>

<https://www.legacy.com/obituaries/dailyrecord/obituary.aspx?n=edgar-nelson-gilbert&pid=165433665&fhid=14801>

$\mathbb{G}(n, p)$  の基本的性質：グラフの生成確率

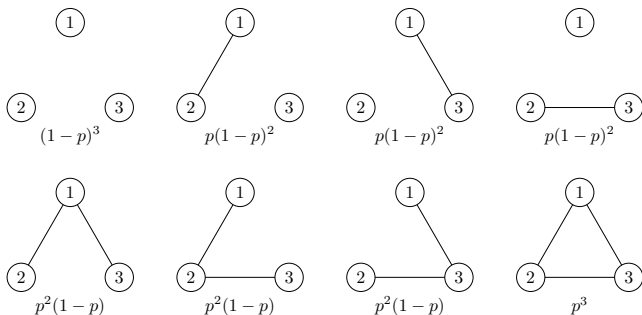
辺確率の独立性から、次がただちに分かる

性質：グラフの生成確率

グラフ  $G$  の頂点数が  $n$ 、辺数が  $m$  のとき、 $\mathbb{G}(n, p)$  において

$$\Pr(G \text{ が生成される}) = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

例： $n = 3$  のとき



$\mathbb{G}(n, p)$  における次数の期待値

頂点  $v$  の**次数**とは,  $v$  に隣接する頂点の数のこと ( $\deg(v)$  で表す)

性質:  $\mathbb{G}(n, p)$  の次数の期待値

$\mathbb{G}(n, p)$  では, 任意の頂点  $v$  に対して, 次が成り立つ

$$E[\deg(v)] = (n - 1)p$$

例:  $n = 3$  のとき

$$\begin{aligned} E[\deg(\text{頂点 } 1)] &= 0 \cdot (1 - p)^3 + 1 \cdot p(1 - p)^2 + 1 \cdot p(1 - p)^2 + 0 \cdot p(1 - p)^2 \\ &\quad + 2 \cdot p^2(1 - p) + 1 \cdot p^2(1 - p) + 1 \cdot p^2(1 - p) + 2 \cdot p^3 \\ &= 2p(1 - p)^2 + 4p^2(1 - p) + 2p^3 \\ &= 2p \end{aligned}$$

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数の期待値：証明

$G = (V, E)$  を  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られる無向グラフとする

- ▶  $v$  以外の任意の頂点  $u \in V - \{v\}$  に対して,

$$\Pr(\{u, v\} \in E) = p$$

- ▶ 任意の頂点  $u \in V - \{v\}$  に対して, 次の標示確率変数  $X_u$  を考える

$$X_u = \begin{cases} 1 & (\{u, v\} \in E), \\ 0 & (\{u, v\} \notin E) \end{cases}$$

- ▶ このとき,  $\deg(v) = \sum_{u \in V - \{v\}} X_u$



$\mathbb{G}(n, p)$  における次数の期待値：証明 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\deg(v)] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in V - \{v\}} X_u \right] \\ &= \sum_{u \in V - \{v\}} \mathbb{E}[X_u] \\ &= \sum_{u \in V - \{v\}} \Pr(\{u, v\} \in E) \\ &= (n - 1)p \end{aligned}$$

□

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \geq 2^{2(n-1)p}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \geq 2^{2(n-1)p}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

ここで,

$$\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right] = \mathbb{E}\left[2^{\sum_{u \in V - \{v\}} X_u}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{u \in V - \{v\}} 2^{X_u}\right]$$

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \geq 2^{2(n-1)p}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right] &= \mathbb{E}\left[2^{\sum_{u \in V - \{v\}} X_u}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{u \in V - \{v\}} 2^{X_u}\right] \\ &= \prod_{u \in V - \{v\}} \mathbb{E}\left[2^{X_u}\right] \end{aligned}$$

$\mathbb{G}(n, p)$  における度数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \geq 2^{2(n-1)p}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right] &= \mathbb{E}\left[2^{\sum_{u \in V - \{v\}} X_u}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{u \in V - \{v\}} 2^{X_u}\right] \\ &= \prod_{u \in V - \{v\}} \mathbb{E}\left[2^{X_u}\right] = (2p + 1(1-p))^{n-1} = (1+p)^{n-1} \end{aligned}$$

$\mathbb{G}(n, p)$  における次数 — 期待値周辺への集中

## 疑問

$\deg(v)$  は  $(n-1)p$  の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \geq 2^{2(n-1)p}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[2^{\deg(v)}\right] &= \mathbb{E}\left[2^{\sum_{u \in V - \{v\}} X_u}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{u \in V - \{v\}} 2^{X_u}\right] \\ &= \prod_{u \in V - \{v\}} \mathbb{E}\left[2^{X_u}\right] = (2p + 1(1-p))^{n-1} = (1+p)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) \leq \frac{(1+p)^{n-1}}{2^{2(n-1)p}} = \left(\frac{1+p}{4p}\right)^{n-1}$$

## 目次

① ランダム・グラフ

② ランダム・グラフの閾値現象

③ 今日のまとめ



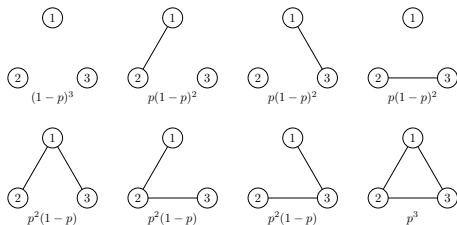
## ランダム・グラフが孤立点を含む確率

無向グラフの**孤立点**：次数が0の頂点のこと

## 例題

エルデシュとレニィのランダム・グラフ  $\mathbb{G}(n, p)$  において、孤立点が存在する確率を計算せよ

$n = 3$  のとき、  
孤立点が存在する確率  
 $= (1 - p)^2(1 + 2p)$



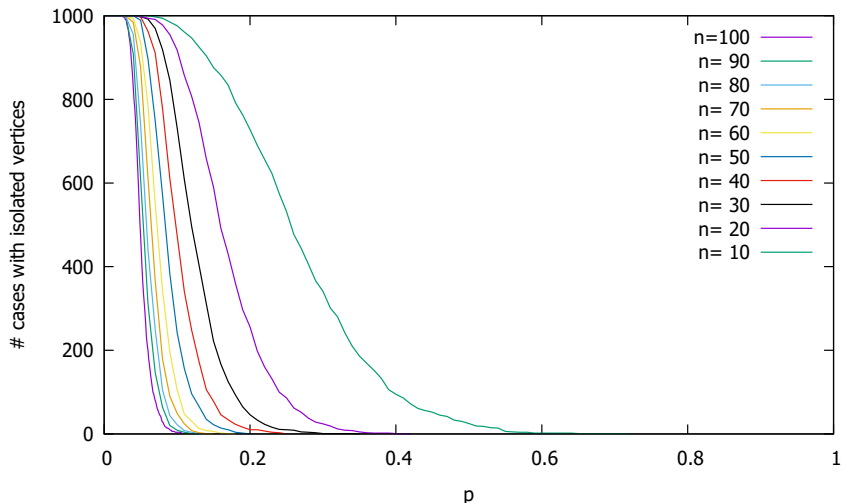
- ▶ これを正確に計算するのは 難しい
- ▶  $\therefore n \rightarrow \infty$  のときの漸近的な振る舞いを考察する

**注**：漸近的な振る舞いの方が (粗い情報なので) 考察しやすい

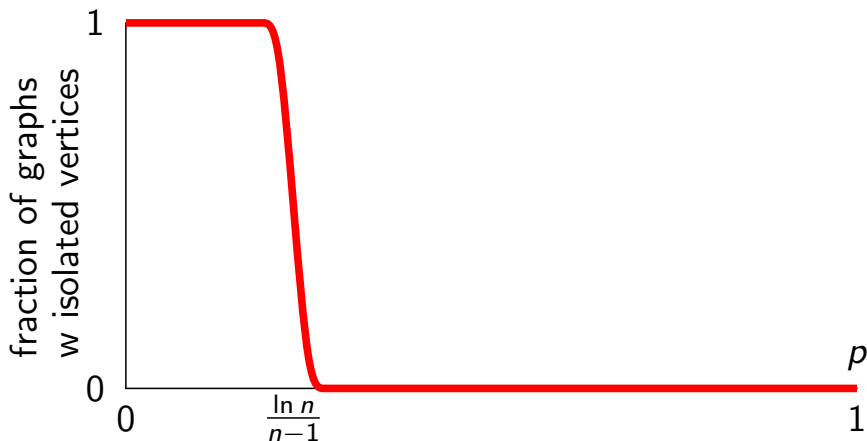
## シミュレーション

横軸 :  $p \in [0.0, 1.0]$

縦軸 : 1000 回の試行中, 孤立点を持つグラフが得られた総数



## 理論：今から証明すること

 $n \rightarrow \infty$  のとき

「孤立点を持つ」という性質は閾値現象を持つ (相転移を起こす)

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：先に結論

$G$  は  $\mathbb{G}(n, p)$  に従って得られるグラフとする

性質：ランダム・グラフが孤立点を含む確率

$\varepsilon \in (0, 1)$  は任意の正実数

▶  $p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n - 1}$  のとき

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

▶  $p \geq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{n - 1}$  のとき

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

感覚をつかむため、まず  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  のときに証明する

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (1)

- ▶ 頂点  $v \in V$  に着目
- ▶  $G$  において  $v$  が孤立点である確率を計算すると

$$\Pr(v \text{ が孤立点}) = (1 - p)^{n-1}$$

- ▶ 次の確率変数  $X_v$  を考える

$$X_v = \begin{cases} 1 & (v \text{ が孤立点である}), \\ 0 & (v \text{ が孤立点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ このとき、 $G$  における孤立点の総数 (確率変数) を  $X$  とすると

$$X = \sum_{v \in V} X_v, \quad \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) = \Pr(X \geq 1)$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

- ▶ このとき，マルコフの不等式より

$$\Pr(X \geq 1) \leq \frac{E[X]}{1}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

- ▶ このとき，マルコフの不等式より

$$\Pr(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v]$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき，マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \end{aligned}$$



ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \\ &\leq n e^{-\frac{3}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \\ &\leq n e^{-\frac{3}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} = n e^{-\frac{3}{2} \ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \\ &\leq n e^{-\frac{3}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} = n e^{-\frac{3}{2} \ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (2)

$$p \geq \frac{3 \ln n}{2n-1} \text{ とする}$$

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \\ &\leq n e^{-\frac{3}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} = n e^{-\frac{3}{2} \ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

▶ つまり、 $\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (3)

より一般に、 $p \geq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  とする (ただし、 $\varepsilon > 0$ )

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が大きい場合 (3)

より一般に、 $p \geq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  とする (ただし、 $\varepsilon > 0$ )

▶ このとき、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned}
 \Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[X_v] \\
 &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\
 &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n e^{-p(n-1)} \\
 &\leq n e^{-(1+\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} = n e^{-(1+\varepsilon) \ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \\
 &= \frac{1}{n^\varepsilon} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

▶ つまり、 $\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$



ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (1)

$$p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n - 1} \text{ とする}$$

- ▶ 先ほどと同様に、 $X_v$  と  $X$  を定義する
- ▶ このとき、 $\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) \rightarrow 0$  を示したいが

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &\leq \Pr(X \geq 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

単純にマルコフの不等式が使えないので、困る…

## 解決策

チェビシェフの不等式を使う

## 確率論の復習：チェビシェフの不等式

## 定理：チェビシェフの不等式

確率変数  $X$  と正実数  $t > 0$  に対して、

$$\Pr(|X - E[X]| \geq t) \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{t^2}$$

証明：マルコフの不等式より

$$\Pr(|X - E[X]| \geq t) = \Pr(|X - E[X]|^2 \geq t^2) \leq \frac{E[|X - E[X]|^2]}{t^2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} E[|X - E[X]|^2] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[2E[X]X] + E[E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

□

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (2)

$$\begin{aligned}\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &= \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| = \mathbf{E}[X])\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (2)

$$\begin{aligned}\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &= \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| = \mathbf{E}[X]) \\ &\leq \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \mathbf{E}[X])\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (2)

$$\begin{aligned}\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &= \Pr(|X - \mathbb{E}[X]| = \mathbb{E}[X]) \\ &\leq \Pr(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$ が小さい場合 (2)

$$\begin{aligned}\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &= \Pr(|X - \mathbb{E}[X]| = \mathbb{E}[X]) \\ &\leq \Pr(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1\end{aligned}$$

## まとめ

- ▶ 既に計算済み： $\mathbb{E}[X] = n(1-p)^{n-1}$
- ▶ いまから計算： $\mathbb{E}[X^2] = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (3)

$$E[X^2] = E \left[ \left( \sum_{v \in V} X_v \right)^2 \right]$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (3)

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{v \in V} X_v \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_u X_v \right]$$



ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{v \in V} X_v \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_u X_v \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v^2 + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (3)

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= E \left[ \left( \sum_{v \in V} X_v \right)^2 \right] = E \left[ \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_u X_v \right] \\
 &= E \left[ \sum_{v \in V} X_v^2 + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \\
 &= E \left[ \sum_{v \in V} X_v + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \quad (\because X_v \text{ は } 0 \text{ か } 1)
 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{v \in V} X_v \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_u X_v \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v^2 + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \quad (\because X_v \text{ は } 0 \text{ か } 1) \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{v \in V} X_v \right] + \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v \right] \\
&= \mathbb{E}[X] + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} \mathbb{E}[X_u X_v]
\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (4)

$u$  と  $v$  が異なる頂点であるとき

$$\begin{aligned} E[X_u X_v] &= \Pr(X_u X_v = 1) = \Pr(X_u = 1 \text{ かつ } X_v = 1) \\ &= \Pr(u \text{ と } v \text{ がともに孤立点である}) \\ &= (1 - p)^{2n-3} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (4)

$u$  と  $v$  が異なる頂点であるとき

$$\begin{aligned} E[X_u X_v] &= \Pr(X_u X_v = 1) = \Pr(X_u = 1 \text{ かつ } X_v = 1) \\ &= \Pr(u \text{ と } v \text{ がともに孤立点である}) \\ &= (1 - p)^{2n-3} \end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} E[X_u X_v] = n(n-1) \cdot (1-p)^{2n-3}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (4)

$u$  と  $v$  が異なる頂点であるとき

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_u X_v] &= \Pr(X_u X_v = 1) = \Pr(X_u = 1 \text{ かつ } X_v = 1) \\ &= \Pr(u \text{ と } v \text{ がともに孤立点である}) \\ &= (1 - p)^{2n-3} \end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} \mathbb{E}[X_u X_v] = n(n-1) \cdot (1-p)^{2n-3}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X] + \sum_{u \in V} \sum_{v \in V - \{u\}} \mathbb{E}[X_u X_v] \\ &= n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1 \\ &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1 \\ &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \\ &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \end{aligned}$$



ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1 \\
 &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \\
 &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n^2(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1
 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$ が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1 \\
 &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \\
 &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n^2(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{1}{1-p} - 1
 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1 \\
 &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \\
 &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n^2(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{1}{1-p} - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1
 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) \leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\ &\leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\ &\leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\ &= \frac{1}{n} n^{1/2} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n} n^{1/2} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1
 \end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$ が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n} n^{1/2} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &\rightarrow 0 + e^0 - 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると、 $p \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n} n^{1/2} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} + e^{\frac{1}{2} \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &\rightarrow 0 + e^0 - 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (6)

より一般に、 $p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  のとき (ただし、 $\varepsilon > 0$ ),

$$\begin{aligned} \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\ &\leq \frac{1}{n} e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \end{aligned}$$

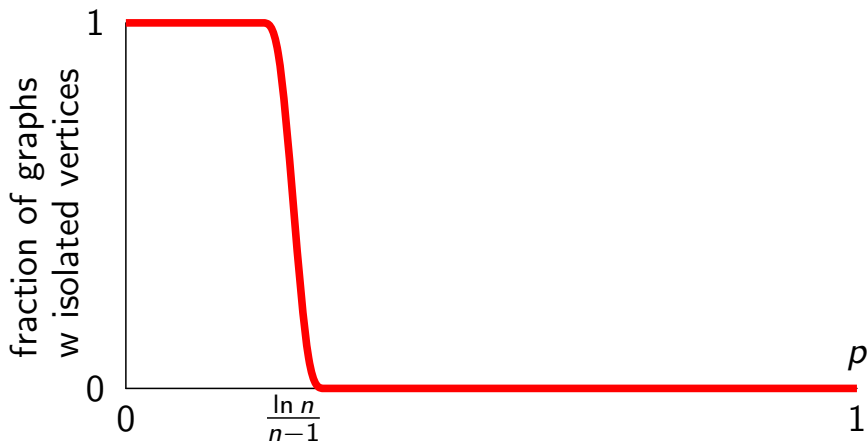
ランダム・グラフが孤立点を含む確率： $p$  が小さい場合 (6)

より一般に、 $p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$  のとき (ただし、 $\varepsilon > 0$ ),

$$\begin{aligned}
 \Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n} e^{p(n-1)} + e^p - 1 \\
 &\leq \frac{1}{n} e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1} (n-1)} + e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n} n^{1-\varepsilon} + e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &= \frac{1}{n^\varepsilon} + e^{(1-\varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
 &\rightarrow 0 + e^0 - 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

## 理論：まとめ

 $n \rightarrow \infty$  のとき

「孤立点を持つ」という性質は閾値現象を持つ (相転移を起こす)

## 目次

- ① ランダム・グラフ
- ② ランダム・グラフの閾値現象
- ③ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

確率的に定義されるグラフの性質を調べられるようになる

- ▶ ランダム・グラフの定義と性質
- ▶ ランダム・グラフの閾値現象 (相転移)

## 目次

- ① ランダム・グラフ
- ② ランダム・グラフの閾値現象
- ③ 今日のまとめ