

離散数理工学 第 6 回
離散代数：非交差経路の数え上げ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 17 日

最終更新：2020 年 11 月 16 日 16:22

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- ★ 休み (祝日) (11/3)
- 5 離散代数：行列式とパーマメント (11/10)
- 6 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- ★ 休み (調布祭片付け) (11/24)
- 7 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|---------------------------|---------|
| 9 | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) | (12/8) |
| ★ | 中間レポート出題 | (12/15) |
| 10 | 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) | (12/22) |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/5) |
| 12 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/12) |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) | (1/19) |
| 14 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) | (1/26) |
| ★ | 予備 | (2/2) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- 1 行列式を用いて非交差経路の数え上げができるようになる
- 2 非交差経路の数え上げを用いて、行列式に関する公式の組合せ的解釈ができるようになる

目次

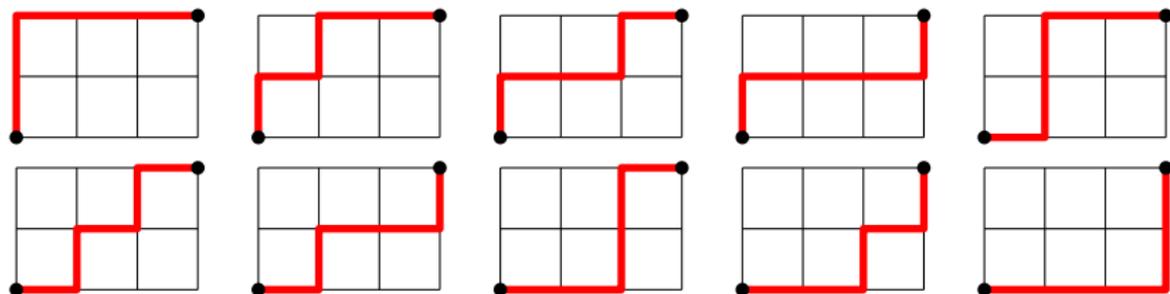
- ① 非交差経路の数え上げ
- ② 非交差経路の数え上げと行列式：LGV 公式
- ③ 重み付き非交差経路
- ④ 今日のまとめ

復習：格子道の数え上げ

復習：二項係数の組合せ的解釈

$\binom{a}{b} = (0, 0)$ から $(a - b, b)$ に至る単調な格子道の総数

$a = 5, b = 2$ のとき： $(0, 0)$ から $(3, 2)$ に至る格子道

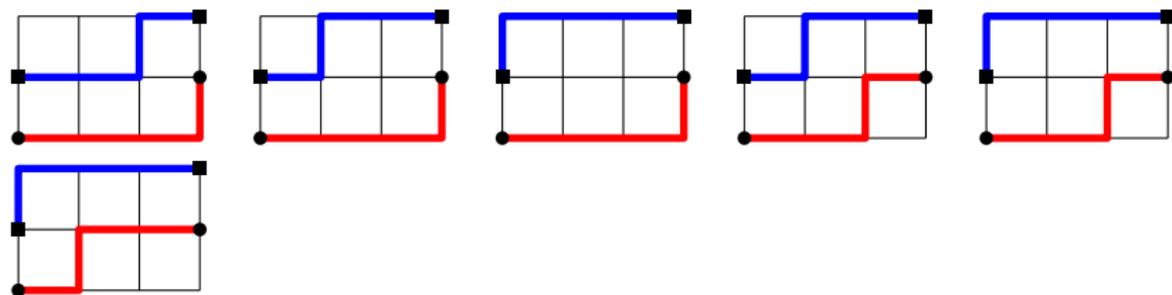


$$\binom{5}{2} = 10$$

非交差経路の数え上げ

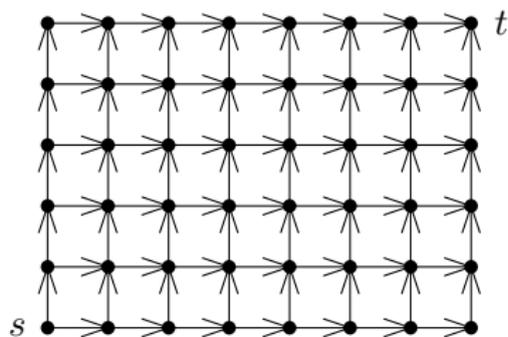
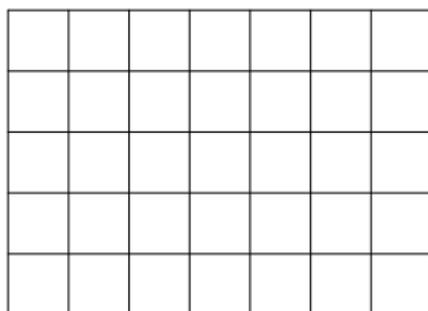
目標

非交差経路の数え上げ



まず、「非交差経路」をちゃんと定義する

有向グラフで考える

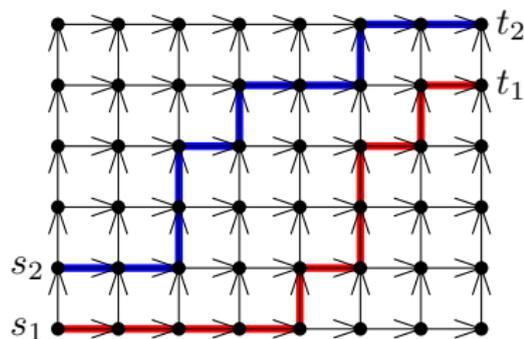


- ▶ s : 経路の始点
- ▶ t : 経路の終点

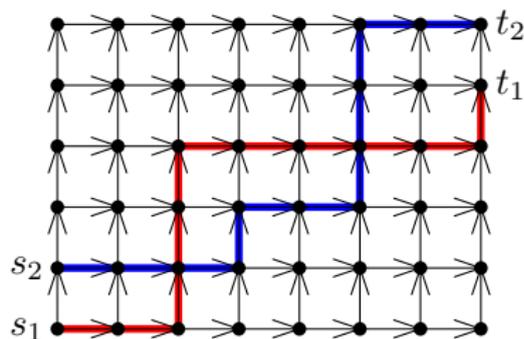
経路は s から t へ至る

非交差経路と交差経路

s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



非交差経路



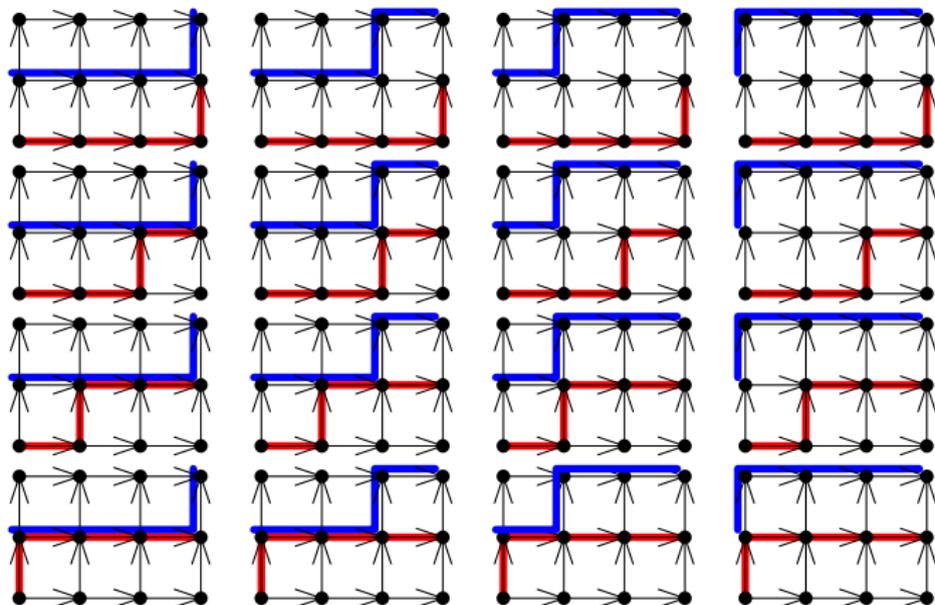
交差経路

定義：経路の交差

2つの経路が**交差する**とは、それらに共通する頂点があること

非交差経路と交差経路：数え上げ (1)

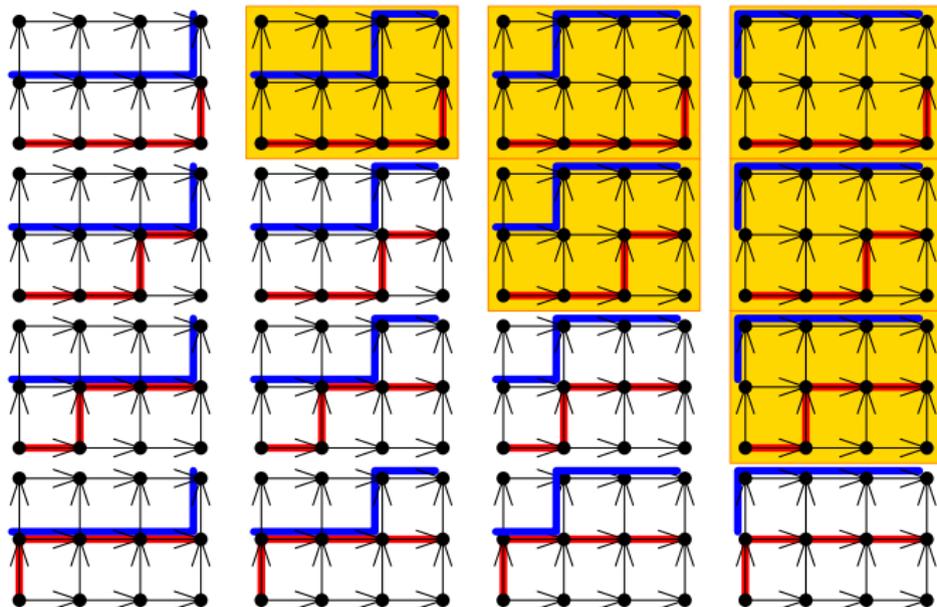
s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



非交差経路の総数 = 6

非交差経路と交差経路：数え上げ (1)

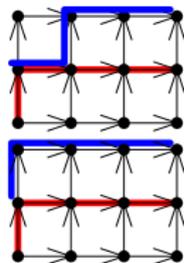
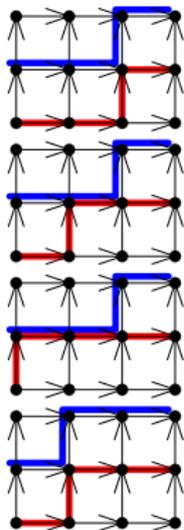
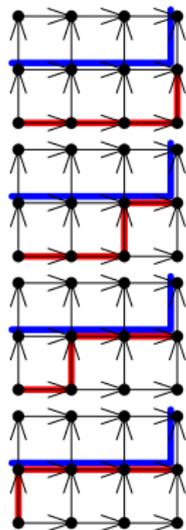
s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



非交差経路の総数 = 6

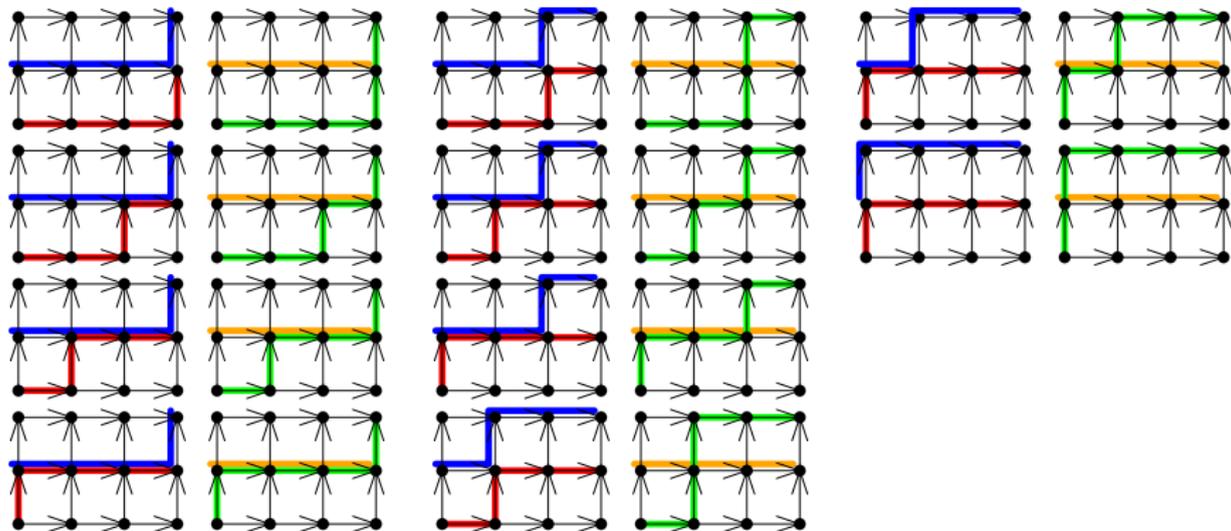
非交差経路と交差経路：数え上げ (2)

s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



非交差経路と交差経路：数え上げ (2)

s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



s_1 から t_2 へ至る経路 と s_2 から t_1 へ至る経路

非交差経路の数え上げ：ここまでのまとめ

 s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差しないものの総数

非交差経路の数え上げ：ここまでのまとめ

 s_1 から t_1 へ至る経路

 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差しないものの総数

=

 s_1 から t_1 へ至る経路

 s_2 から t_2 へ至る経路

の組の総数

-

 s_1 から t_1 へ至る経路

 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差するものの総数

非交差経路の数え上げ：ここまでのまとめ

$$\begin{aligned}
 & \boxed{s_1 \text{ から } t_1 \text{ へ至る経路}} \\
 & \boxed{s_2 \text{ から } t_2 \text{ へ至る経路}} \\
 & \qquad \text{の組で交差しないものの総数} \\
 \\
 = & \boxed{s_1 \text{ から } t_1 \text{ へ至る経路}} \\
 & \boxed{s_2 \text{ から } t_2 \text{ へ至る経路}} \\
 & \qquad \text{の組の総数} \\
 \\
 - & \boxed{s_1 \text{ から } t_1 \text{ へ至る経路}} \\
 & \boxed{s_2 \text{ から } t_2 \text{ へ至る経路}} \\
 & \qquad \text{の組で交差するものの総数} \\
 \\
 = & \boxed{s_1 \text{ から } t_1 \text{ へ至る経路}} \\
 & \boxed{s_2 \text{ から } t_2 \text{ へ至る経路}} \\
 & \qquad \text{の組の総数} \\
 \\
 - & \boxed{s_1 \text{ から } t_2 \text{ へ至る経路}} \\
 & \boxed{s_2 \text{ から } t_1 \text{ へ至る経路}} \\
 & \qquad \text{の組の総数}
 \end{aligned}$$

非交差経路の数え上げ：ここまでのまとめ

 s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差しないものの総数

= s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組の総数

- s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差するものの総数

= s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組の総数

- s_1 から t_2 へ至る経路 s_2 から t_1 へ至る経路

の組の総数

$$= \binom{4}{1} \binom{4}{1} - \binom{3}{0} \binom{5}{2} = 16 - 10 = 6$$

非交差経路の数え上げ：行列式との関係

 s_1 から t_1 へ至る経路

 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差しないものの総数

$$= \binom{4}{1} \binom{4}{1} - \binom{3}{0} \binom{5}{2} = \begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{3}{0} \\ \binom{5}{2} & \binom{4}{1} \end{vmatrix} = 6$$

非交差経路の数え上げ：行列式との関係

 s_1 から t_1 へ至る経路 s_2 から t_2 へ至る経路

の組で交差しないものの総数

$$= \binom{4}{1} \binom{4}{1} - \binom{3}{0} \binom{5}{2} = \begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{3}{0} \\ \binom{5}{2} & \binom{4}{1} \end{vmatrix} = 6$$

今から見ていくこと

行列式が出てくるのは偶然ではなく、必然 → LGV 公式

目次

- ① 非交差経路の数え上げ
- ② 非交差経路の数え上げと行列式：LGV 公式
- ③ 重み付き非交差経路
- ④ 今日のまとめ

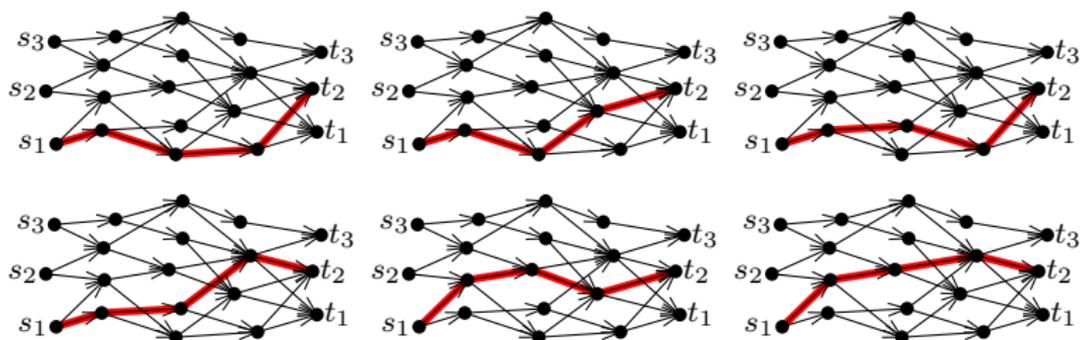
経路に関する記法 (1)

設定

- ▶ 有向閉路を持たない有向グラフ $G = (V, A)$
- ▶ k 個の頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k \in V$
- ▶ k 個の頂点 $t_1, t_2, \dots, t_k \in V$

記法

- ▶ $\mathcal{P}(s_i, t_j)$: s_i から t_j へ至る有向経路全体の集合



$$|\mathcal{P}(s_1, t_2)| = 6$$

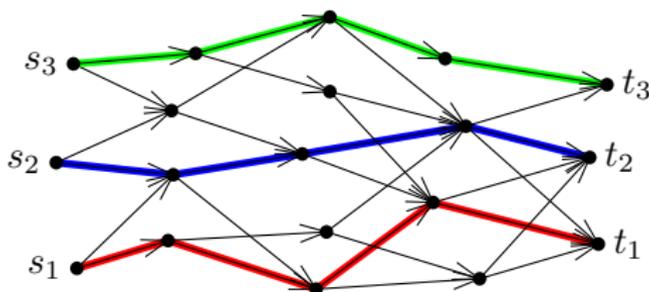
経路に関する記法 (2)

記法

▶ $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$

▶ $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^t \mathcal{P}(s_i, t_i)$

▶ $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mid P_i, P_j \text{ は非交差}, 1 \leq \forall i < \forall j \leq k\}$



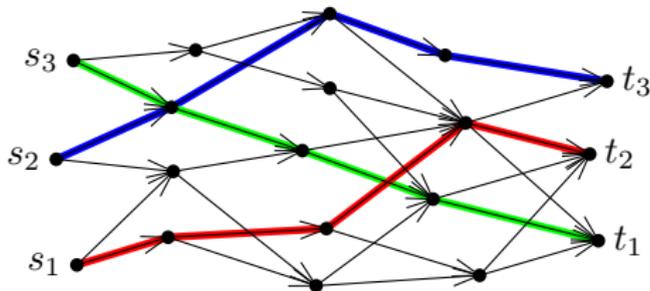
経路に関する記法 (3)

記法 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して

▶ $\sigma(\mathbf{t}) = (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)})$

▶ $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) = \prod_{i=1}^t \mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})$

▶ $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) = \{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) \mid P_i, P_j \text{ は非交差}, 1 \leq \forall i < \forall j \leq k\}$

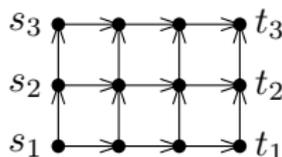


LGV 公式

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を $m_{ij} = |\mathcal{P}(s_i, t_j)|$ として定義する

定理 : LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k} \text{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|$$



$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

LGV = Lindström, Gessel, Viennot (3人の研究者の名前)

LGV 公式 : 証明 (1)

証明 : まず行列式の定義を思い出すと

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k m_{i\sigma(i)} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k |\mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})| \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k |\mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})| \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|
 \end{aligned}$$

LGV 公式：証明 (2)

各 $P \in \bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}_k} \mathcal{P}(s, \sigma(t))$ は次のどれか 1 つを満たす

- 1 P は非交差である
- 2 P は非交差ではない
 - ▶ このような k 個の経路に対応する置換 σ の符号は $+1$ か -1

今から証明すること

非交差ではない P において,

対応する置換の符号が $+1$ であるものの総数 $=$ 対応する置換の符号が -1 であるものの総数

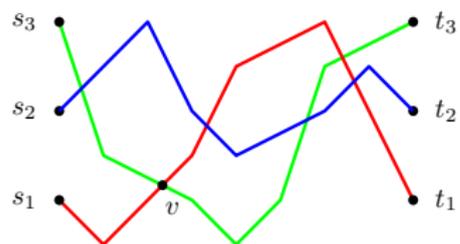
LGV 公式 : 証明 (3)

それを認めると

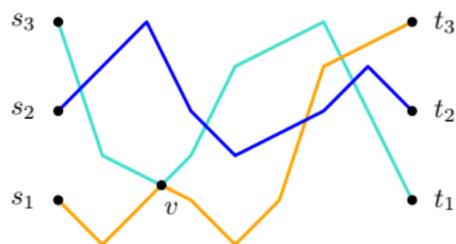
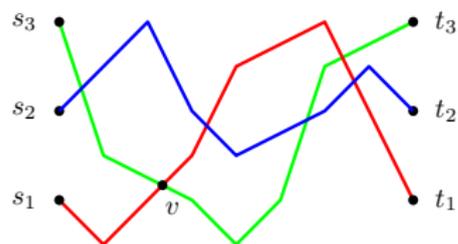
$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) (|\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| + |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) - \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\
 &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) - \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|
 \end{aligned}$$

となって, 証明が終わる

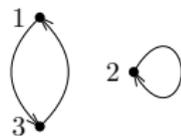
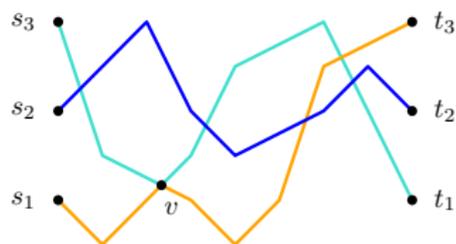
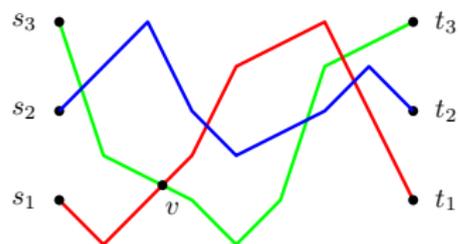
LGV 公式：証明 (イメージ)



LGV 公式：証明 (イメージ)



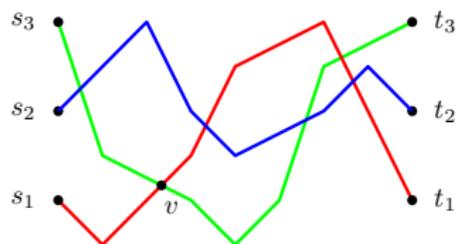
LGV 公式：証明 (イメージ)



LGV 公式：証明 (4)

非交差でない $(P_1, P_2, \dots, P_k) \in \mathcal{P}(s, \sigma(t))$ を考える

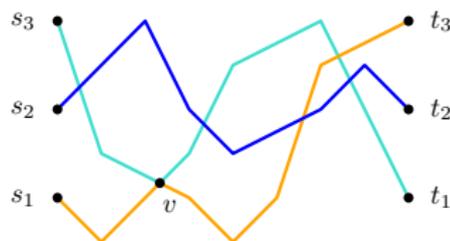
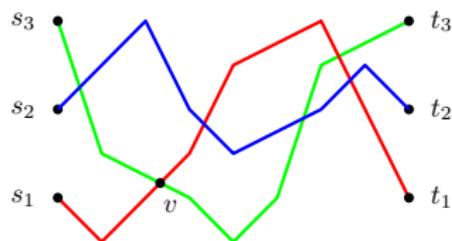
- ▶ 次を満たす i, j と v を考える
 - ▶ P_i が他の経路と交わるような最小の i
 $(i = \min\{i' \mid \exists j > i', P_{i'} \text{ と } P_j \text{ は交わる}\})$
 - ▶ P_i を s_i から $t_{\sigma(i)}$ へ向かって進むときに、
初めて他の経路と共有する頂点 v
 - ▶ v を P_i と共有する経路が P_j



LGV 公式 : 証明 (5)

このとき, 次のように P_i と P_j を別の経路 P'_i と P'_j に変える

- ▶ $P'_i = P_i$ に沿って s_i から v まで進み,
そこから P_j に沿って $t_{\sigma(j)}$ に進む経路
- ▶ $P'_j = P_j$ に沿って s_j から v まで進み,
そこから P_i に沿って $t_{\sigma(i)}$ に進む経路



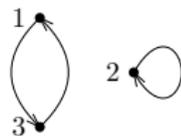
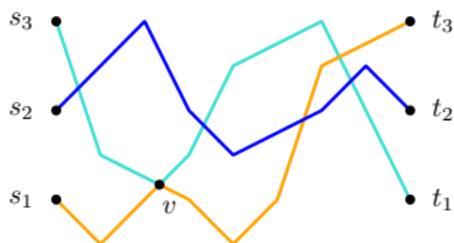
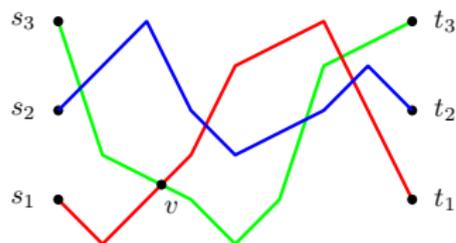
LGV 公式：証明 (6)

新しくできた $(P_1, \dots, P'_i, \dots, P'_j, \dots, P_k)$ も非交差ではない

- ▶ $(P_1, \dots, P'_i, \dots, P'_j, \dots, P_k)$ に対応する置換を σ' とし,
 $\sigma(i), \sigma(j)$ を $\sigma(j), \sigma(i)$ に変える置換を π とすると

$$\sigma' = \pi \circ \sigma$$

- ▶ そして, $\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\pi \circ \sigma) = \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\sigma) = (-1) \text{sgn}(\sigma)$
- ▶ $\therefore \sigma$ と σ' の符号は異なる



LGV 公式：証明 (7)

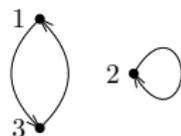
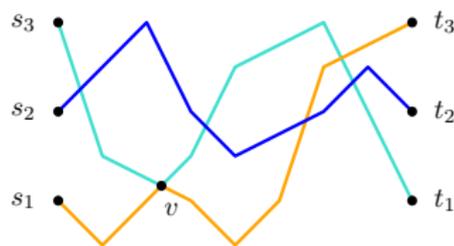
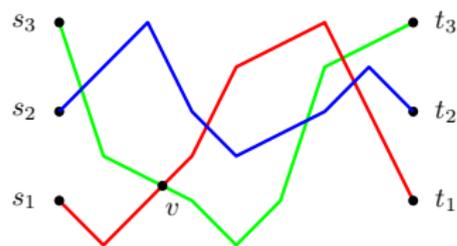
新しくできた $(P_1, \dots, P'_i, \dots, P'_j, \dots, P_k)$ も非交差ではない

- ▶ $(P_1, \dots, P'_i, \dots, P'_j, \dots, P_k)$ に同じ操作を適用すると $(P_1, \dots, P_i, \dots, P_j, \dots, P_k)$ に戻る

つまり、非交差でない k 個の経路を考えたとき

対応する置換の符号が $+1$ であるものの総数 = 対応する置換の符号が -1 であるものの総数

これで、LGV 公式の証明ができた □



LGV 公式の系

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を $m_{ij} = |\mathcal{P}(s_i, t_j)|$ として定義する

LGV 公式の系

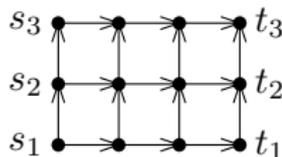
仮定

- ▶ $\mathcal{P}(s, \sigma(t))$ のどの2つの経路も非交差
 $\Rightarrow \sigma$ は恒等置換 (任意の i に対して $\sigma(i) = i$)

このとき,

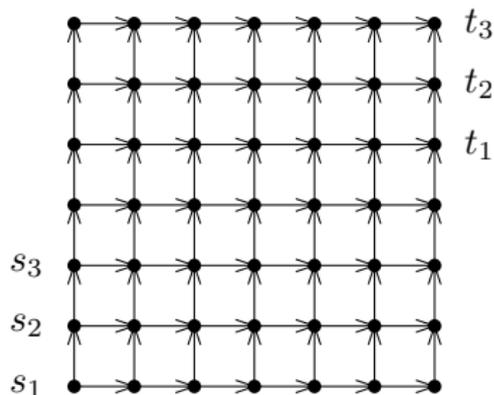
$$\det(M) = |\mathcal{N}(s, t)|$$

証明 : 恒等置換の符号は +1 だから □



$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

LGV 公式の適用：例



$$\det(M) = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 10 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 11 \\ 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= 24696$$

(計算が間違っていなければ)

目次

- ① 非交差経路の数え上げ
- ② 非交差経路の数え上げと行列式 : LGV 公式
- ③ 重み付き非交差経路
- ④ 今日のまとめ

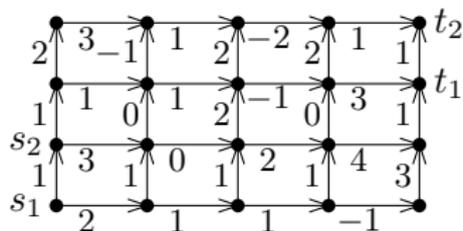
弧に重みのついた有向グラフ

設定

- ▶ 有向閉路を持たない有向グラフ $G = (V, A)$
- ▶ 弧に対する重み $w: A \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ k 個の頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k \in V$
- ▶ k 個の頂点 $t_1, t_2, \dots, t_k \in V$

記法

- ▶ $w(P) = \prod_{a \in P} w(a)$ (経路 P に使われる弧の重みの積)
- (P の弧数が 0 のとき, $w(P) = 1$ とする)



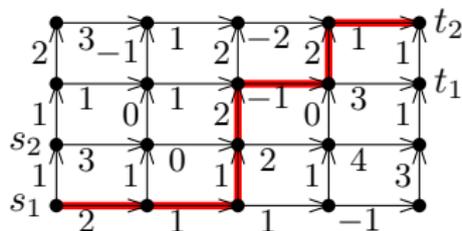
弧に重みのついた有向グラフ

設定

- ▶ 有向閉路を持たない有向グラフ $G = (V, A)$
- ▶ 弧に対する重み $w: A \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ k 個の頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k \in V$
- ▶ k 個の頂点 $t_1, t_2, \dots, t_k \in V$

記法

- ▶ $w(P) = \prod_{a \in P} w(a)$ (経路 P に使われる弧の重みの積)
- (P の弧数が 0 のとき, $w(P) = 1$ とする)



$$w(P) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -8$$

重み付き有向グラフに対する LGV 公式

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を, 次のように定義する

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

定理 : 重み付き有向グラフに対する LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^k w(P_i) \right)$$

- ▶ LGV 公式と同じように証明できる
- ▶ すべての弧 a に対して $w(a) = 1 \Rightarrow$ これは LGV 公式となる

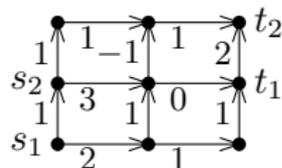
重み付き有向グラフに対する LGV 公式 : 例

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を, 次のように定義する

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

定理 : 重み付き有向グラフに対する LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^k w(P_i) \right)$$



$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 2 + 0 + 0 & 4 + 0 - 2 + 0 - 3 + 1 \\ 0 & 0 - 3 + 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \end{aligned}$$

$$\text{公式の右辺} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -4$$

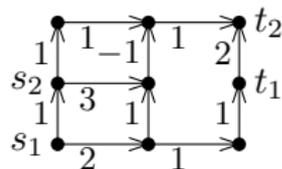
重み付き有向グラフに対する LGV 公式 : 例

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を, 次のように定義する

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

定理 : 重み付き有向グラフに対する LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^k w(P_i) \right)$$



$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 2 + 0 + 0 & 4 + 0 - 2 + 0 - 3 + 1 \\ 0 & 0 - 3 + 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \end{aligned}$$

$$\text{公式の右辺} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -4$$

行列式の組合せ的解釈

復習：行列式の定義

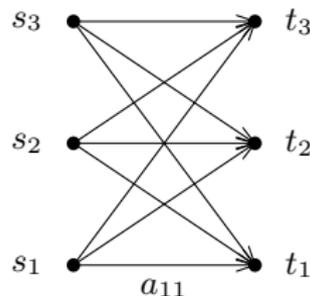
正方行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k a_{i\sigma(i)}$$

A に対して、右のようなグラフを考え、
 s_i と t_j を結ぶ弧の重み $= a_{ij}$ とすると

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(s, \sigma(t))} \prod_{i=1}^k w(P_i) = \prod_{i=1}^k a_{i\sigma(i)}$$

つまり、このグラフに LGV 公式を適用すると
 $\det(A)$ が得られる



行列式の組合せ的解釈：応用

LGV 公式を使うと，行列式の性質を組合せ的に証明できるようになる

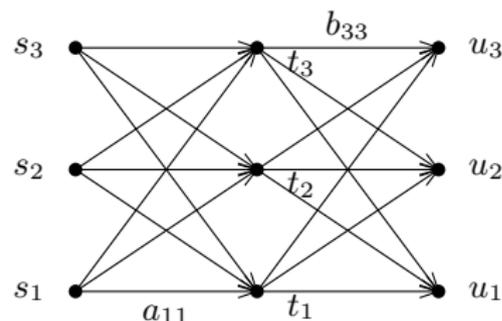
復習：行列式の性質

正方行列 $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

LGV 公式を用いた証明：次のようなグラフを考える

- ▶ s_i と t_j を結ぶ弧の重みを a_{ij} ， t_i と u_j を結ぶ弧の重みを b_{ij} とする



▶ このとき，

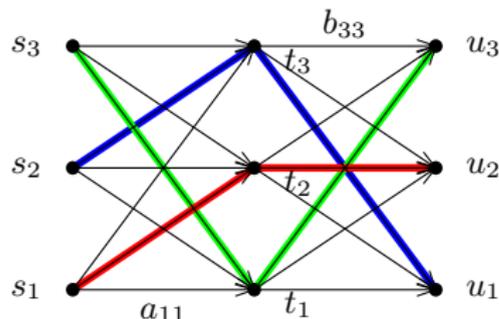
s_i から u_j へ至る経路の重みの和

$$= \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = \text{行列 } AB \text{ の第 } i, j \text{ 成分}$$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き)

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ を1つ固定

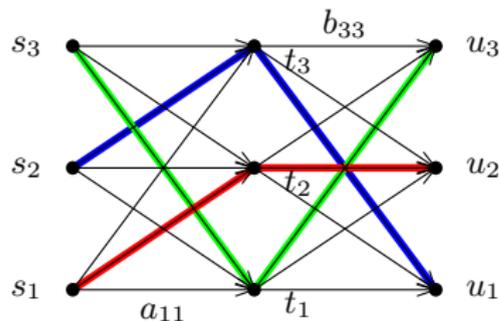
- ▶ $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(s, \sigma(\mathbf{u}))$ を \mathbf{t} において分割すると、
ある唯一の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して、
 $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(s, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ が唯一に得られる
- ▶ 各置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して、
 $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(s, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ をつなげると、
唯一の $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(s, \sigma(\mathbf{u}))$ が得られる



行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き)

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ を1つ固定

- ▶ $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$ を \mathbf{t} において分割すると、ある唯一の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して、 $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ が唯一に得られる
- ▶ 各置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して、 $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ をつなげると、唯一の $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$ が得られる



つまり、次の2つの集合の間に1対1対応がある

- ▶ $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$
- ▶ $\bigcup_{\pi \in \mathfrak{S}_k} (\mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t})) \times \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u})))$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 2)

LGV 公式より

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^k w(P_i) \right)$$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \left(\sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^k w(Q_i) \right)$$

$$\det(B) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\tau) \left(\sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^k w(R_i) \right)$$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 3)

したがって,

$$\begin{aligned}
 & \det(AB) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^k w(P_i) \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^k w(Q_i) \prod_{i=1}^k w(R_i) \right) \\
 &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k w(Q_i) \prod_{i=1}^k w(R_i)
 \end{aligned}$$

ここで, $\tau = \sigma \circ \pi^{-1}$ とすると

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ の選択と $\sigma \circ \pi^{-1} \in \mathfrak{S}_k$ の選択の間に 1 対 1 対応があるので,
(次のページに続く)

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 4)

(前のページからの続き)

$$\begin{aligned}
& \det(AB) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \operatorname{sgn}(\tau \circ \pi) \prod_{i=1}^k w(Q_i) \prod_{i=1}^k w(R_i) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^k w(Q_i) \prod_{i=1}^k w(R_i) \\
&= \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^k w(Q_i) \right) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^k w(R_i) \right) \\
&= \det(A) \det(B)
\end{aligned}$$

つまり、 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ が成り立つ

□

ビネ・コーシーの公式

同じようにして、行列式に対する重要な公式を証明できる

定理：ビネ・コーシーの公式

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |S|=n}} \det(A[* , S]) \det(B[S , *])$$

ただし,

- ▶ $A[* , S] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする列に A を制限してできる行列
- ▶ $B[S , *] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする行に B を制限してできる行列

証明：演習問題

ビネ・コーシーの公式：例

例： $n = 2, m = 3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad \text{であり,}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

定理：ビネ・コーシーの公式 (再掲)

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |S|=n}} \det(A[* , S]) \det(B[S , *])$$

目次

- ① 非交差経路の数え上げ
- ② 非交差経路の数え上げと行列式 : LGV 公式
- ③ 重み付き非交差経路
- ④ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

- 1 行列式を用いて非交差経路の数え上げができるようになる
- 2 非交差経路の数え上げを用いて、行列式に関する公式の組合せ的解釈ができるようになる

次回は、行列式を用いて「全域木の数え上げ」を行う

目次

- ① 非交差経路の数え上げ
- ② 非交差経路の数え上げと行列式：LGV 公式
- ③ 重み付き非交差経路
- ④ 今日のまとめ