離散数理工学　第 4 回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 27 日

最終更新：2020 年 10 月 25 日　22:58

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)

⋆ 休み (祝日) (11/3)

5. 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
6. 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)

⋆ 休み (調布祭片付け) (11/24)

7. 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)
- ⋆ 中間レポート出題 (12/15)

10. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)
12. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)
14. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)
- ⋆ 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の**母関数**とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので,『微分積分学』,『解析学』,『複素関数論』の知識が使える

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \ldots$	1	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \ldots$	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \ldots$	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ

例：2 段の格子 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数　とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- 特性方程式を用いた方法 (前回)
- 行列を用いた方法 (前回)
- 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$
- つまり，上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore \quad a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore \quad a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore \quad a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}
\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= x(A(x) - 1) + x^2 A(x)
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= x(A(x) - 1) + x^2 A(x) = xA(x) - x + x^2 A(x)
\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 - x \quad = \quad xA(x) - x + x^2 A(x)$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\
\therefore \quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -1
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore \quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\
\therefore \quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\
\therefore \quad A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1}
\end{aligned}
$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}$$

このとき，$\dfrac{-1}{x^2+x-1}$ の部分分数分解が必要

- 「分母 $=0$」を x について解くと，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- したがって，ある定数 a, b が存在して

$$\frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

- この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$x^2+x-1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ なので，

$$\frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{b}{x-\alpha_2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$x^2+x-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ なので，

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\alpha_1}+\frac{b}{x-\alpha_2} \\ \therefore \quad -1 &= a(x-\alpha_2)+b(x-\alpha_1) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$x^2+x-1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ なので，

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{b}{x-\alpha_2} \\ \therefore \quad -1 &= a(x-\alpha_2) + b(x-\alpha_1) \end{aligned}$$

この式は，任意の x で成り立つから，

- $x = \alpha_1$ とすると，$-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- $x = \alpha_2$ とすると，$-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$x^2 + x - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ なので，

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{b}{x-\alpha_2} \\ \therefore \quad -1 &= a(x-\alpha_2) + b(x-\alpha_1) \end{aligned}$$

この式は，任意の x で成り立つから，

- $x = \alpha_1$ とすると，$-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- $x = \alpha_2$ とすると，$-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

したがって，$a = \dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$A(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_2}$$

□

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_2}}
\end{aligned}
$$

$\square$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n
\end{aligned}
$$

$\square$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

□

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha_2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) x^n
\end{aligned}
$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$
a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
$$

□

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1：直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- $\cdots$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

$\boxed{0}$ a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

したがって，考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1：書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$a_n = 4a_{n-1} - 3^{n-1}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore \quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore \quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore \quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n$$

母関数を $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1\end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1}
\end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} \\
&= 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n
\end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} \\
&= 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \\
&= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}
\end{aligned}
$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore \quad (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} = \frac{1-4x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x)-1 &= 4xA(x)-\frac{x}{1-3x} \\ \therefore\quad (1-4x)A(x) &= 1-\frac{x}{1-3x}=\frac{1-4x}{1-3x} \\ \therefore\quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x)-1 &= 4xA(x)-\frac{x}{1-3x} \\
\therefore \quad (1-4x)A(x) &= 1-\frac{x}{1-3x}=\frac{1-4x}{1-3x} \\
\therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x}
\end{aligned}
$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

□

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって，

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

□

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって，

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n \qquad \square$$

例題 2

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2：直感を得る

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- $\cdots$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2. 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+1}
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+1} \\
&= 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\text{右辺} = 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x} \\
&= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x} \\
&= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\
\therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\
\therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\
\therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\
\therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}
\end{aligned}
$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる，つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので，それを定める (次のページ)

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

$$\therefore$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}\\ \therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2\end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2\end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- $x = 0$ とすると，$0 = a + c$
- $x = 1$ とすると，$2 = -2b$
- $x = \frac{1}{3}$ とすると，$\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\
\therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2
\end{aligned}
$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- $x = 0$ とすると，$0 = a + c$
- $x = 1$ とすると，$2 = -2b$
- $x = \frac{1}{3}$ とすると，$\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって，$a = -\frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x}
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n
\end{aligned}
$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot 3^n - \frac{3}{2} - n\right) x^n
\end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot 3^n - \frac{3}{2} - n\right) x^n
\end{aligned}
$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない

実際，$n \geq 1$ のとき，$a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$ であるので，

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

a_n の代わりに，次の b_n を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして，b_n の母関数 $B(x)$ を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- $B(x)$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の指数型母関数と呼ぶことがある
- 一方で，$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の通常型母関数と呼ぶことがある

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

例題 3：書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{na_{n-1}}{n!} + \dfrac{3n}{n!} - \dfrac{2}{n!} = b_{n-1} + \dfrac{3}{(n-1)!} - \dfrac{2}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$b_n = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$$

$$\therefore \quad b_n x^n = b_{n-1} x^n + \frac{3}{(n-1)!} x^n - \frac{2}{n!} x^n$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right)$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right)$$

$$= xB(x) + 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 2$$

復習：テイラー展開

任意の実数 x に対して $\quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $B(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
B(x) - 4 &= xB(x) + 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 2 \\
\therefore \quad (1-x)B(x) &= 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 6 \\
\therefore \quad B(x) &= \frac{3x}{1-x}\,\mathrm{e}^x - \frac{2}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x} \\
&= \frac{-3(1-x)+3}{1-x}\,\mathrm{e}^x - \frac{2}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}
\end{aligned}
$$

$B(x)$ を x の関数として表現できた

例題 3：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$B(x) = -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
B(x) &= -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}x^\ell\right) + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n
\end{aligned}$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
B(x) &= -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}x^\ell\right) + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n
\end{aligned}
$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
B(x) &= -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}x^\ell\right) + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 6\right)x^n
\end{aligned}
$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

例題 3：母関数を用いた解法 まとめ

b_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

a_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = 6n! + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} - 3$

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

注意

今日扱ったのは，母関数に関する初歩

- 母関数にまつわる理論は膨大
- 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは,『複素関数論』が重要な役割を果たす

目次

1. 母関数 (復習)
2. 線形漸化式の厳密解法
3. より複雑な漸化式の解法
4. 母関数が収束しない場合
5. 今日のまとめ