離散数理工学　第 1 回
数え上げの基礎：二項係数

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 6 日

最終更新：2020 年 10 月 4 日　21:11

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 離散代数
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 離散代数
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

典型的な問題 1：誕生日のパラドックス

誕生日問題：設定

このクラスの中に，誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

$\rightsquigarrow$ 実際にやってみる

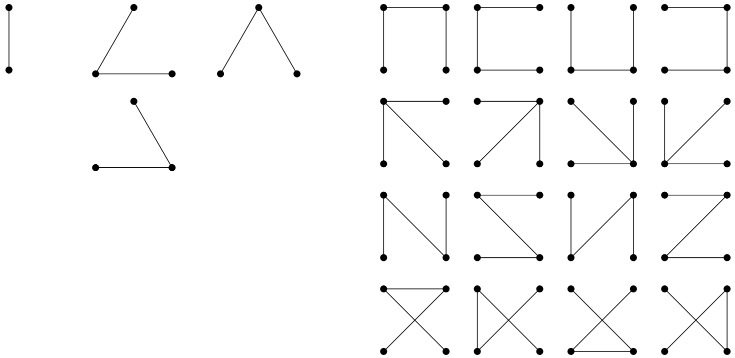
応用，関連する話題

- 暗号に対する攻撃 (誕生日攻撃)
- 負荷分散

典型的な問題 2：全域木の数え上げ

問題

頂点数 n の完全グラフに全域木はいくつあるか？



$\rightsquigarrow$ $a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 16, \ldots$

$\rightsquigarrow$ 線形代数を用いた数え上げ

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)

⋆ 休み (祝日) (11/3)

5. 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
6. 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)

⋆ 休み (調布祭片付け) (11/24)

7. 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9	離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)	(12/8)
⋆	中間レポート出題	(12/15)
10	離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)	(12/22)
11	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎)	(1/5)
12	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)	(1/12)
13	離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)	(1/19)
14	離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)	(1/26)
⋆	予備	(2/2)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- 大隅 正敏 (おおすみ まさとし)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/dme/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夕方 18 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/dme/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集

授業の進め方

講義 (85 分)

- スライドで進める
- 質問は CommentScreen で

退室 (5 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を Google Forms で提出する
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー (アポイントメントによる)

- 質問など

演習問題

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)

評価

2 回のレポート提出のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 5 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である
    (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある)
    (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
- 配点：1 題 10 点満点，計 50 点満点
- 成績評価
  - 「レポート 1 の素点 + レポート 2 の素点」による

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- J. マトウシェク, J. ネシェトリル (著), 根上生也, 中本敦浩 (訳), 「離散数学への招待 (上・下)」, 丸善出版, 2002.
- 浅野孝夫,「情報数学」, コロナ社, 2009.
- イジィ・マトウシェク (著), 徳重典英 (訳),「33 の素敵な数学小景」, 日本評論社, 2014.
- 高崎金久,「線形代数と数え上げ」, 日本評論社, 2012.
- 玉木久夫,「情報科学のための確率入門」, サイエンス社, 2002.
- 伏見正則,「確率と確率過程」, 朝倉書店, 2004.
- など

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

目次

階乗

定義：階乗とは？ (直観的定義)

自然数 $n \geq 0$ の**階乗**とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $\ldots$

階乗：再帰的定義

定義：階乗とは？ (再帰的定義)

自然数 $n \geq 0$ の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- $\ldots$

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n!$ = 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$ のとき，$n! = 24$

▶ 1 2 3 4	▶ 2 1 3 4	▶ 3 1 2 4	▶ 4 1 2 3
▶ 1 2 4 3	▶ 2 1 4 3	▶ 3 1 4 2	▶ 4 1 3 2
▶ 1 3 2 4	▶ 2 3 1 4	▶ 3 2 1 4	▶ 4 2 1 3
▶ 1 3 4 2	▶ 2 3 4 1	▶ 3 2 4 1	▶ 4 2 3 1
▶ 1 4 2 3	▶ 2 4 1 3	▶ 3 4 1 2	▶ 4 3 1 2
▶ 1 4 3 2	▶ 2 4 3 1	▶ 3 4 2 1	▶ 4 3 2 1

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

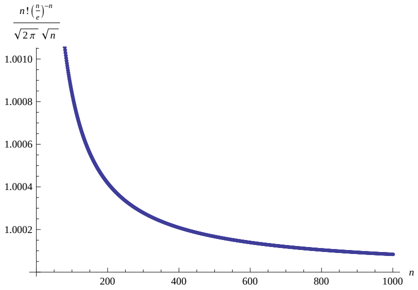
階乗：漸近公式

階乗の性質：スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$



$\leftarrow \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ のプロット

証明は『複素関数論』の典型的な応用であるが，ここでは行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

つまり，

- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の上界
- $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}\cdot 1\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e} \cdot 1 \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$
- したがって，$n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ となると仮定

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ となると仮定

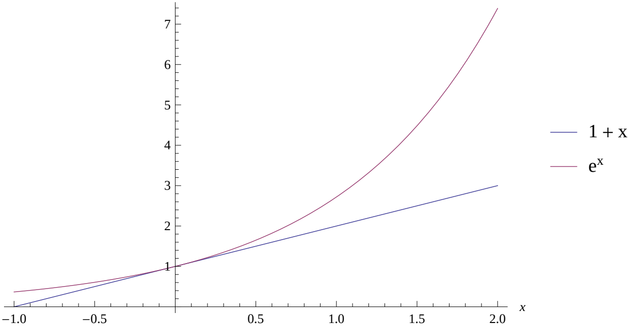
証明すること (目標)

$$(k+1)! \leq \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}$$

有用な不等式

事実：有用な不等式 (演習問題)

任意の実数 x に対して
$$1 + x \leq \mathrm{e}^{x}$$



階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$(k+1)! \quad = \quad (k+1) \cdot k!$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot \mathrm{e}\, k \left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\le \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\leq \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\le \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\cdot(\mathrm{e}^{-1})\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} = \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \qquad \square
\end{aligned}
$$

目次

二項係数

定義：二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_a\mathrm{C}_b$」という記号を高校では (なぜか) 使うが，
国際的にはあまり用いられない (通じないか，通じにくい)

組合せ的解釈 (1)：部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における，要素数 b の部分集合の総数

$a = 5$, $b = 2$ のとき：$\{1,2,3,4,5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},$$
$$\{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

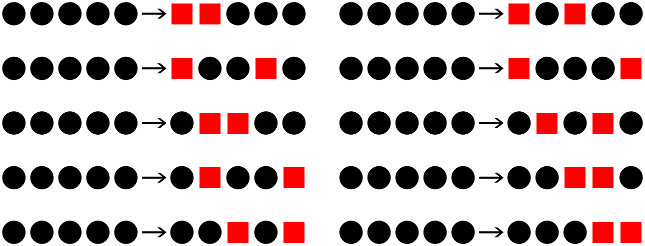
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (2)：着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5$, $b = 2$ のとき



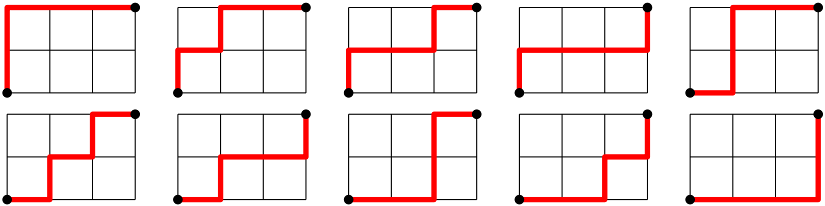
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3)：格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = $(0,0)$ から $(a-b,b)$ に至る (単調な) 格子道の総数

$a=5$, $b=2$ のとき：$(0,0)$ から $(3,2)$ に至る格子道



$$\binom{5}{2} = 10$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ヒント：まず，$\displaystyle\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

<u>下界の証明</u>：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1}$$

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b}$$

注：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^b \quad \square$$

注：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \binom{a}{a-b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

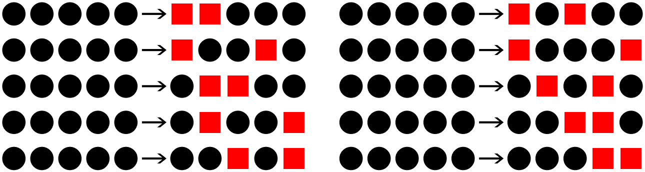
性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ
- 右辺 $=$ a 個のものの中から色を塗らない $a-b$ 個を選ぶ

$a = 5$, $b = 2$ のとき



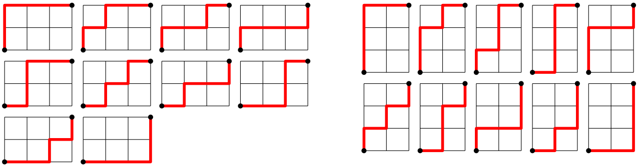
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=(0,0)$ から $(a-b,b)$ へ至る格子道の総数
- 右辺 $=(0,0)$ から $(b,a-b)$ へ至る格子道の総数



直線 $y=x$ に関してこの 2 つは対称なので，等式が成り立つ

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

$\square$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square
\end{aligned}$$

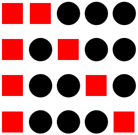
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：着色

性質：パスカルの三角形

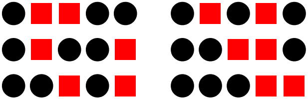
任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初のものを塗る場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初のものを塗らない場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



$$\binom{4}{1} = 4$$



$$\binom{4}{2} = 6$$

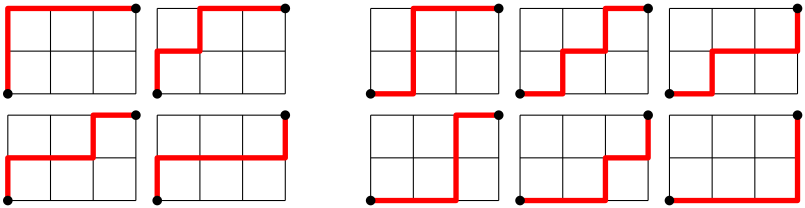
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



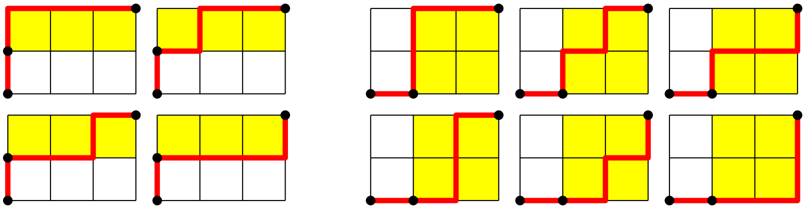
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

性質：パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



パスカルの三角形

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

パスカルの三角形

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b{-}1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} b = a \binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b{-}1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

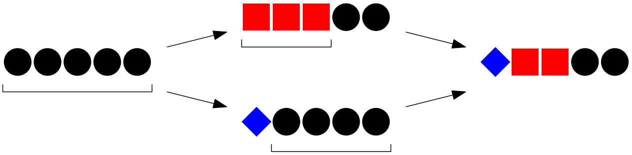
性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

- 左辺 $=$ a 個のものの中から b 個に赤を塗り，
  その b 個の中から 1 個に青を塗る
- 右辺 $=$ a 個のものの中から 1 個に青を塗り，
  残り $a-1$ 個の中から $b-1$ 個に赤を塗る



目次

二項定理

性質：二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ヒント：n に関する数学的帰納法 $+$ パスカルの三角形

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

証明：二項定理の式において，$x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

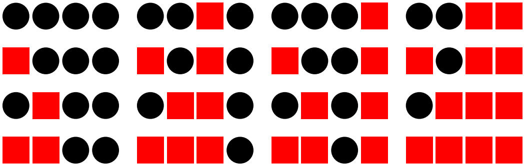
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $= n$ 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $= n$ 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



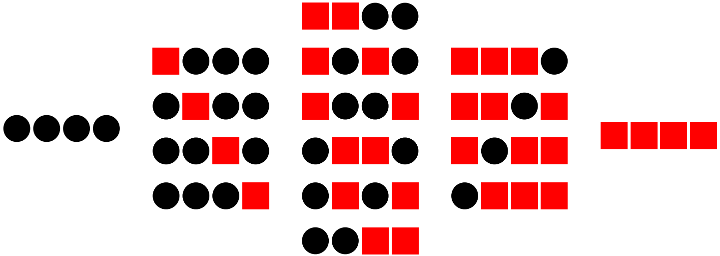
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $= n$ 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $= n$ 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に，$(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方,

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell \right)$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2
$$

したがって，

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}
$$

□

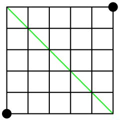
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

右辺 $= (0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数



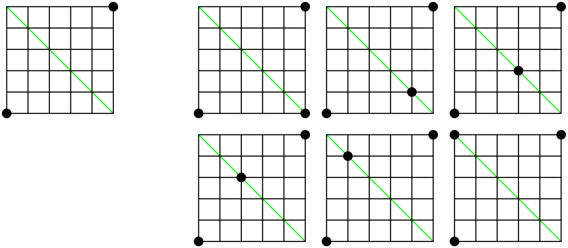
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



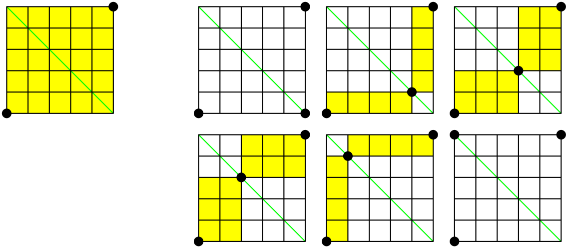
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

この講義の概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．

目次