離散数理工学　第 7 回
離散代数：全域木の数え上げ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 12 月 1 日

最終更新：2020 年 11 月 30 日　09:59

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- ⋆ 休み (祝日) (11/3)
5. 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
6. 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- ⋆ 休み (調布祭片付け) (11/24)
7. 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)
- ⋆ 中間レポート出題 (12/15)
10. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)
12. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)
14. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)
- ⋆ 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

- 行列式を用いて全域木の数え上げができるようになる

目次

無向グラフのラプラス行列 (ラプラシアン)

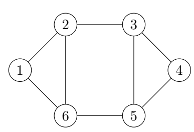
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：ラプラス行列

G のラプラス行列とは，行列 $L \in \mathbb{R}^{V\times V}$ で次のように定義されるもの

$$\ell_{uv} = \begin{cases} \deg_G(u) & (u = v \text{ のとき}), \\ -1 & (\{u,v\} \in E \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

← u の次数 (u に接続する辺数)



$$L(G) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

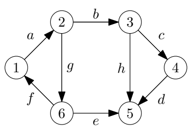
有向グラフの接続行列

有向グラフ $D = (V, A)$

定義：接続行列

D の接続行列とは，行列 $B \in \mathbb{R}^{V\times A}$ で次のように定義されるもの

$$b_{va} = \begin{cases} +1 & (v \text{ が } a \text{ の始点であるとき}), \\ -1 & (v \text{ が } a \text{ の終点であるとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

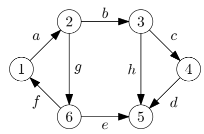


$$B(D) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ラプラス行列と接続行列の関係：例

$B(D)B(D)^\top$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = L(G)$$

ラプラス行列と接続行列の関係

設定

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- 有向グラフ $D = (V, A)$，A の各弧は E の辺を向き付けたもの

性質：ラプラス行列と接続行列の関係

G のラプラス行列を $L(G)$，D の接続行列を $B(D)$ とすると

$$L(G) = B(D)B(D)^\top$$

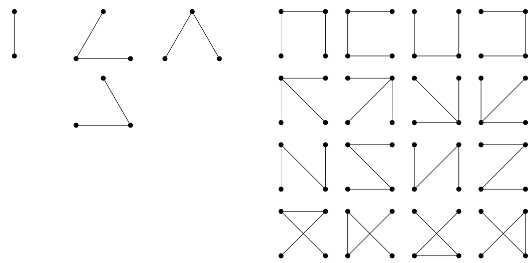
証明：演習問題

目次

全域木の数え上げ

問題

頂点数 n の完全グラフ K_n に全域木はいくつあるか？



$\rightsquigarrow a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 16, \ldots$

全域木の数え上げ：ラプラス行列

$$L(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$L_{11}(K_4) = L(K_4)$ の 1 行目と 1 列目を除去した行列

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(L_{11}(G)) = 16$ ← K_4 の全域木の総数

行列式を用いた全域木の数え上げ

無向グラフ $G = (V, E)$

定理：行列木定理 (Kirchhoff 1847)

G の全域木の総数は $\det(L_{11}(G))$ に等しい

証明の流れ

1. $L_{11}(G) = B_1(D)B_1(D)^\top$ を確認する ($B_1(D)$ は後で定義)
2. ビネ・コーシーの公式を $B_1(D)B_1(D)^\top$ に適用する
3. $B_1(D)$ の小行列式と G の全域木を対応させる

行列木定理の証明：ステップ 1

無向グラフ $G = (V, E)$ $\rightsquigarrow$ 各辺に向き付け $\rightsquigarrow$ 有向グラフ $D = (V, A)$

既に証明したこと

$$L(G) = B(D)B(D)^\top$$

$B_1(D) = B(D)$ から第 1 行を削除した行列

すぐに分かること

$$L_{11}(G) = B_1(D)B_1(D)^\top$$

$$B_1(D)B_1(D)^\top = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = L_{11}(G)$$

行列木定理の証明：ステップ 2

ビネ・コーシーの公式より

$$\begin{aligned} \det(L_{11}(G)) &= \det(B_1(D)B_1(D)^\top) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| = |V|-1}} \det(B_1(D)[*, S]) \det(B_1(D)^\top[S, *]) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| = |V|-1}} \det(B_1(D)[*, S])^2 \end{aligned}$$

定理：ビネ・コーシーの公式 (再掲)

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, k\} \\ |S| = n}} \det(A[*, S]) \det(B[S, *])$$

行列式を用いた全域木の数え上げ (再掲)

無向グラフ $G = (V, E)$

定理：行列木定理 (Kirchhoff 1847)

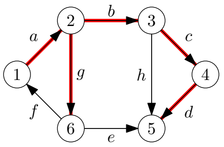
G の全域木の総数は $\det(L_{11}(G))$ に等しい

証明の流れ

1. $L_{11}(G) = B_1(D)B_1(D)^\top$ を確認する (済)
2. ビネ・コーシーの公式を $B_1(D)B_1(D)^\top$ に適用する (済)
3. $B_1(D)$ の小行列式と G の全域木を対応させる

行列木定理の証明：ステップ 3 — 例 (1)

$S \subseteq A$ が全域木に対応する場合

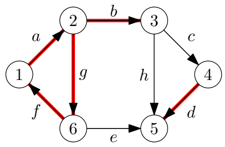


$$B_1(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\det(B_1(D)[*,S]) = \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

行列木定理の証明：ステップ 3 — 例 (2)

$S \subseteq A$ が全域木に対応しない場合



$$B_1(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\det(B_1(D)[*,S]) = \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

行列木定理の証明：ステップ 3

$S \subseteq A$, $|S| = |V| - 1$

補題

ここまでの設定において，

$$\det(B_1(D)[*,S]) = \begin{cases} \pm 1 & (S \text{ が } G \text{ の全域木の辺集合に対応するとき}), \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

証明：前のページの例に書かれていることに基づけば，証明できる

- S が G の全域木の辺集合に対応するときは，全域木の葉に着目する (事実：頂点数 2 以上の全域木が必ず 2 つ以上の葉を含む)
- S が G の全域木の辺集合に対応しないときは，S が閉路を含むので，その閉路に対応する列ベクトルの線形結合が 0 になることを示す

詳細は演習問題 □

行列木定理の証明：まとめ

ここまでの議論をまとめると

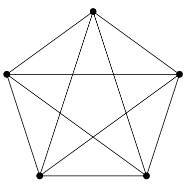
$$\begin{aligned} \det(L_{11}(G)) &= \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S|=|V|-1}} \det(B_1(D)[*,S])^2 \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq A, |S|=|V|-1 \\ S \text{ が全域木に対応する}}} \det(B_1(D)[*,S])^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{S \subseteq A, |S|=|V|-1 \\ S \text{ が全域木に対応しない}}} \det(B_1(D)[*,S])^2 \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq A, |S|=|V|-1 \\ S \text{ が全域木に対応する}}} 1 \\ &= G \text{ の全域木の総数} \end{aligned}$$

□

行列木定理：例 (1)

頂点数 5 の完全グラフ K_5

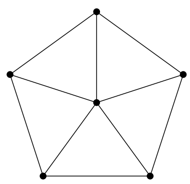
$$\det(L_{11}(K_5)) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 125$$



行列木定理：例 (2)

頂点数 6 のホイール W_6

$$\det(L_{11}(W_6)) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 121$$



目次

今日の目標

今日の目標

- 行列式を用いて全域木の数え上げができるようになる