離散数理工学　第 6 回
離散代数：非交差経路の数え上げ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 17 日

最終更新：2020 年 11 月 16 日　16:22

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)

★ 休み (祝日) (11/3)

5. 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
6. 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)

★ 休み (調布祭片付け) (11/24)

7. 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)

★ 中間レポート出題 (12/15)

10. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)
12. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)
14. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)

★ 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

1. 行列式を用いて非交差経路の数え上げができるようになる
2. 非交差経路の数え上げを用いて，行列式に関する公式の組合せ的解釈ができるようになる

目次

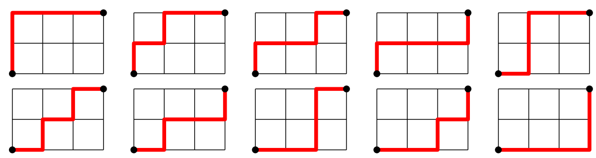
1. 非交差経路の数え上げ
2. 非交差経路の数え上げと行列式：LGV 公式
3. 重み付き非交差経路
4. 今日のまとめ

復習：格子道の数え上げ

復習：二項係数の組合せ的解釈

$\binom{a}{b} = (0,0)$ から $(a-b, b)$ に至る単調な格子道の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき：$(0,0)$ から $(3,2)$ に至る格子道

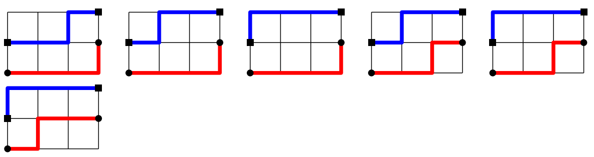


$\binom{5}{2} = 10$

非交差経路の数え上げ

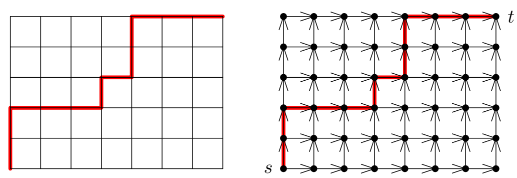
目標

非交差経路の数え上げ



まず,「非交差経路」をちゃんと定義する

有向グラフで考える

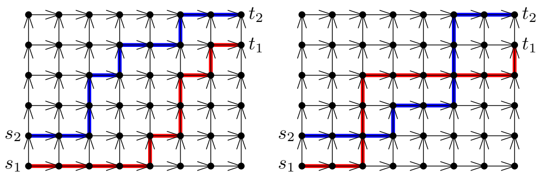


- s：経路の始点
- t：経路の終点

経路は s から t へ至る

非交差経路と交差経路

s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



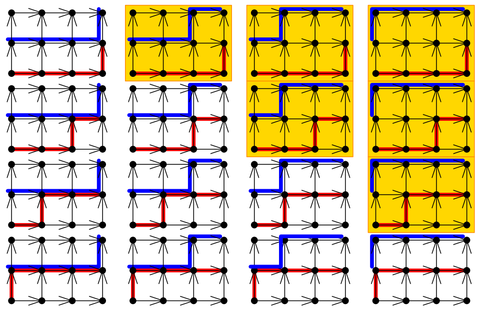
非交差経路　　　　交差経路

定義：経路の交差

2 つの経路が交差するとは，それらに共通する頂点があること

非交差経路と交差経路：数え上げ (1)

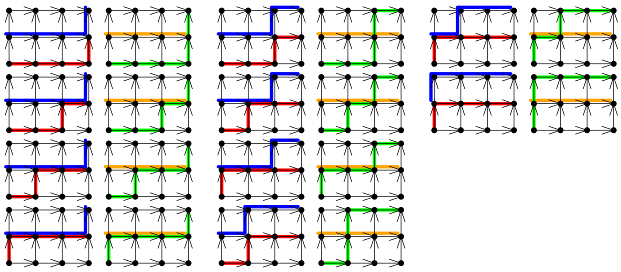
s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



非交差経路の総数 $= 6$

非交差経路と交差経路：数え上げ (2)

s_1 から t_1 へ至る経路 と s_2 から t_2 へ至る経路



s_1 から t_2 へ至る経路 と s_2 から t_1 へ至る経路

非交差経路の数え上げ：ここまでのまとめ

| s_1 から t_1 へ至る経路
s_2 から t_2 へ至る経路 | の組で交差しないものの総数

$=$ | s_1 から t_1 へ至る経路
s_2 から t_2 へ至る経路 | の組の総数

$-$ | s_1 から t_1 へ至る経路
s_2 から t_2 へ至る経路 | の組で交差するものの総数

$=$ | s_1 から t_1 へ至る経路
s_2 から t_2 へ至る経路 | の組の総数

$-$ | s_1 から t_2 へ至る経路
s_2 から t_1 へ至る経路 | の組の総数

$$= \binom{4}{1}\binom{4}{1} - \binom{3}{0}\binom{5}{2} = 16 - 10 = 6$$

非交差経路の数え上げ：行列式との関係

s_1 から t_1 へ至る経路
s_2 から t_2 へ至る経路
の組で交差しないものの総数

$$= \binom{4}{1}\binom{4}{1} - \binom{3}{0}\binom{5}{2} = \begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{3}{0} \\ \binom{5}{2} & \binom{4}{1} \end{vmatrix} = 6$$

今から見ていくこと

行列式が出てくるのは偶然ではなく，必然 $\longrightarrow$ LGV 公式

目次

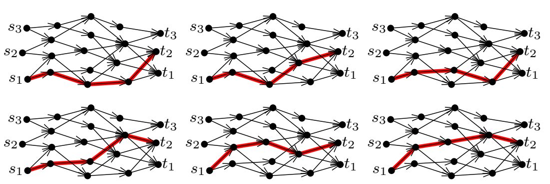
経路に関する記法 (1)

設定

- 有向閉路を持たない有向グラフ $G = (V, A)$
- k 個の頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k \in V$
- k 個の頂点 $t_1, t_2, \dots, t_k \in V$

記法

- $\mathcal{P}(s_i, t_j)$：s_i から t_j へ至る有向経路全体の集合

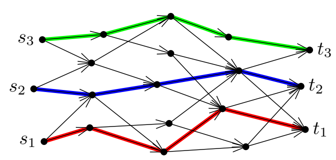


$|\mathcal{P}(s_1, t_2)| = 6$

経路に関する記法 (2)

記法

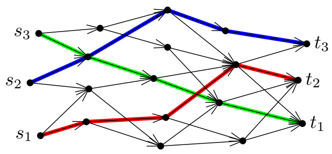
- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$
- $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{t} \mathcal{P}(s_i, t_i)$
- $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mid P_i, P_j$ は非交差，$1 \le \forall i < \forall j \le k\}$



経路に関する記法 (3)

$\boxed{\text{記法}}$ $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して

- $\sigma(\mathbf{t}) = (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)})$
- $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) = \prod_{i=1}^{t} \mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})$
- $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) = \{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) \mid P_i, P_j \text{ は非交差，} 1 \le \forall\, i < \forall\, j \le k\}$

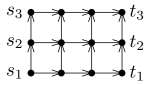


LGV 公式

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を $m_{ij} = |\mathcal{P}(s_i, t_j)|$ として定義する

定理：LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|$$



$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

LGV ＝ Lindström, Gessel, Viennot (3 人の研究者の名前)

LGV 公式：証明 (1)

証明：まず行列式の定義を思い出すと

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} m_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} |\mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} |\mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \end{aligned}$$

LGV 公式：証明 (2)

各 $\mathbf{P} \in \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))$ は次のどれか 1 つを満たす

1. $\mathbf{P}$ は非交差である
2. $\mathbf{P}$ は非交差ではない
   - このような k 個の経路に対応する置換 σ の符号は $+1$ か -1

今から証明すること

非交差ではない $\mathbf{P}$ において，

対応する置換の符号が $+1$ であるものの総数 ＝ 対応する置換の符号が -1 であるものの総数

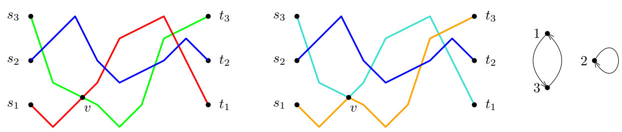
LGV 公式：証明 (3)

それを認めると

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) (|\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| + |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) - \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) - \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))| \end{aligned}$$

となって，証明が終わる

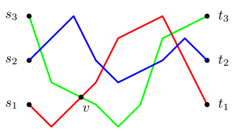
LGV 公式：証明 (イメージ)



LGV 公式：証明 (4)

非交差でない $(P_1, P_2, \dots, P_k) \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))$ を考える

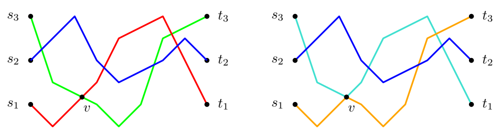
- 次を満たす i, j と v を考える
  - P_i が他の経路と交わるような最小の i
    ($i = \min\{i' \mid \exists\, j > i',\ P_{i'}$ と P_j は交わる $\}$)
  - P_i を s_i から $t_{\sigma(i)}$ へ向かって進むときに，初めて他の経路と共有する頂点 v
  - v を P_i と共有する経路が P_j



LGV 公式：証明 (5)

このとき，次のように P_i と P_j を別の経路 P'_i と P'_j に変える

- $P'_i = P_i$ に沿って s_i から v まで進み，
  そこから P_j に沿って $t_{\sigma(j)}$ に進む経路
- $P'_j = P_j$ に沿って s_j から v まで進み，
  そこから P_i に沿って $t_{\sigma(i)}$ に進む経路



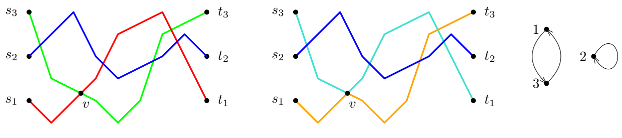
LGV 公式：証明 (6)

新しくできた $(P_1, \ldots, P'_i, \ldots, P'_j, \ldots, P_k)$ も非交差ではない

- $(P_1, \ldots, P'_i, \ldots, P'_j, \ldots, P_k)$ に対応する置換を σ' とし，$\sigma(i), \sigma(j)$ を $\sigma(j), \sigma(i)$ に変える置換を π とすると

$$\sigma' = \pi \circ \sigma$$

- そして，$\mathrm{sgn}(\sigma') = \mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)\,\mathrm{sgn}(\sigma)$
- $\therefore \sigma$ と σ' の符号は異なる



LGV 公式：証明 (7)

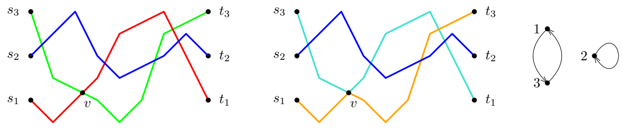
新しくできた $(P_1, \ldots, P'_i, \ldots, P'_j, \ldots, P_k)$ も非交差ではない

- $(P_1, \ldots, P'_i, \ldots, P'_j, \ldots, P_k)$ に同じ操作を適用すると $(P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_j, \ldots, P_k)$ に戻る

つまり，非交差でない k 個の経路を考えたとき

対応する置換の符号が $+1$ であるものの総数 $=$ 対応する置換の符号が -1 であるものの総数

これで，LGV 公式の証明ができた □



LGV 公式の系

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を $m_{ij} = |\mathcal{P}(s_i, t_j)|$ として定義する

LGV 公式の系

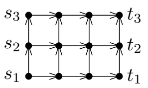
仮定

- $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))$ のどの 2 つの経路も非交差 $\Rightarrow$ σ は恒等置換 (任意の i に対して $\sigma(i) = i$)

このとき，

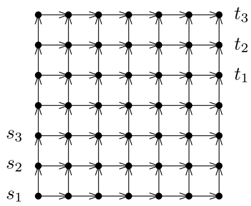
$$\det(M) = |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{t})|$$

証明：恒等置換の符号は $+1$ だから □



$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

LGV 公式の適用：例



$$\det(M) = \begin{vmatrix} \binom{10}{4} & \binom{11}{5} & \binom{12}{6} \\ \binom{9}{3} & \binom{10}{4} & \binom{11}{5} \\ \binom{8}{2} & \binom{9}{3} & \binom{10}{4} \end{vmatrix} = 24696$$

(計算が間違ってなければ)

目次

弧に重みのついた有向グラフ

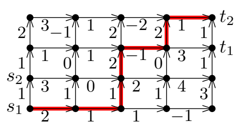
設定

- 有向閉路を持たない有向グラフ $G = (V, A)$
- 弧に対する重み $w \colon A \to \mathbb{R}$
- k 個の頂点 $s_1, s_2, \ldots, s_k \in V$
- k 個の頂点 $t_1, t_2, \ldots, t_k \in V$

記法

- $w(P) = \prod_{a \in P} w(a)$ (経路 P に使われる弧の重みの積)

(P の弧数が 0 のとき，$w(P) = 1$ とする)



$$w(P) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -8$$

重み付き有向グラフに対する LGV 公式

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を，次のように定義する

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

定理：重み付き有向グラフに対する LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) \right)$$

- LGV 公式と同じように証明できる
- すべての弧 a に対して $w(a) = 1 \Rightarrow$ これは LGV 公式となる

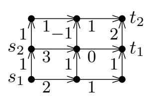
重み付き有向グラフに対する LGV 公式：例

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を，次のように定義する

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

定理：重み付き有向グラフに対する LGV 公式

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) \right)$$



$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2+0+0 & 4+0-2+0-3+1 \\ 0 & 0-3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

公式の右辺 $= 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -4$

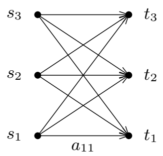
行列式の組合せ的解釈

復習：行列式の定義

正方行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} a_{i\sigma(i)}$$

A に対して，右のようなグラフを考え，
s_i と t_j を結ぶ弧の重み $= a_{ij}$ とすると



$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) = \prod_{i=1}^{k} a_{i\sigma(i)}$$

つまり，このグラフに LGV 公式を適用すると
$\det(A)$ が得られる

行列式の組合せ的解釈：応用

LGV 公式を使うと，行列式の性質を組合せ的に証明できるようになる

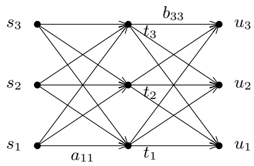
復習：行列式の性質

正方行列 $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

LGV 公式を用いた証明：次のようなグラフを考える

- s_i と t_j を結ぶ弧の重みを a_{ij}，t_i と u_j を結ぶ弧の重みを b_{ij} とする



- このとき，

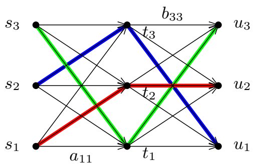
s_i から u_j へ至る経路の重みの和

$$= \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = \text{行列 } AB \text{ の第 } i, j \text{ 成分}$$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き)

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ を 1 つ固定

- $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$ を $\mathbf{t}$ において分割すると，
  ある唯一の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して，
  $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ が唯一に得られる
- 各置換 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ に対して，
  $\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))$ と $\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))$ をつなげると，
  唯一の $\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$ が得られる



つまり，次の 2 つの集合の間に
1 対 1 対応がある

- $\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))$
- $\bigcup_{\pi \in \mathfrak{S}_k} (\mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t})) \times \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u})))$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 2)

LGV 公式より

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) \right)$$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\pi) \left(\sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \right)$$

$$\det(B) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\tau) \left(\sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^{k} w(R_i) \right)$$

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 3)

したがって，

$$\begin{aligned}
&\det(AB) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \prod_{i=1}^{k} w(R_i) \right) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, (\sigma \circ \pi^{-1})(\mathbf{u}))} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \prod_{i=1}^{k} w(R_i)
\end{aligned}$$

ここで，$\tau = \sigma \circ \pi^{-1}$ とすると
$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ の選択と $\sigma \circ \pi^{-1} \in \mathfrak{S}_k$ の選択の間に 1 対 1 対応があるので，
(次のページに続く)

行列式の組合せ的解釈：応用 (証明の続き 4)

(前のページからの続き)

$$\begin{aligned}
&\det(AB) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \mathrm{sgn}(\tau \circ \pi) \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \prod_{i=1}^{k} w(R_i) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \prod_{i=1}^{k} w(R_i) \\
&= \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\pi) \sum_{\mathbf{Q} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \pi(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(Q_i) \right) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{N}(\mathbf{t}, \tau(\mathbf{u}))} \prod_{i=1}^{k} w(R_i) \right) \\
&= \det(A)\det(B)
\end{aligned}$$

つまり，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つ □

ビネ・コーシーの公式

同じようにして，行列式に対する重要な公式を証明できる

定理：ビネ・コーシーの公式

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, k\} \\ |S| = n}} \det(A[*, S]) \det(B[S, *])$$

ただし，

- $A[*, S] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする列に A を制限してできる行列
- $B[S, *] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする行に B を制限してできる行列

証明：演習問題

ビネ・コーシーの公式：例

例：$n = 2, m = 3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad \text{であり，}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

定理：ビネ・コーシーの公式 (再掲)

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, k\} \\ |S| = n}} \det(A[*, S]) \det(B[S, *])$$

目次

今日の目標

今日の目標

1. 行列式を用いて非交差経路の数え上げができるようになる
2. 非交差経路の数え上げを用いて，行列式に関する公式の組合せ的解釈ができるようになる

次回は，行列式を用いて「全域木の数え上げ」を行う