離散数理工学　第 5 回
離散代数：行列式とパーマネント

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 10 日

最終更新：2020 年 11 月 9 日　13:23

スケジュール 前半 (予定)

1	数え上げの基礎：二項係数	(10/6)
2	数え上げの基礎：漸化式の立て方	(10/13)
3	数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)	(10/20)
4	数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)	(10/27)
⋆	休み (祝日)	(11/3)
5	離散代数：行列式とパーマネント	(11/10)
6	離散代数：非交差経路の数え上げ	(11/17)
⋆	休み (調布祭片付け)	(11/24)
7	離散代数：全域木の数え上げ	(12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9	離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎)	(12/8)
⋆	中間レポート出題	(12/15)
10	離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)	(12/22)
11	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎)	(1/5)
12	離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)	(1/12)
13	離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)	(1/19)
14	離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)	(1/26)
⋆	予備	(2/2)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

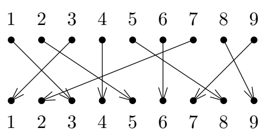
今日の目標
1. 正方行列の行列式とパーマネントの定義を理解する
   - 置換とその符号
2. 行列式を用いてパーマネントを計算する手法を使えるようになる

目次

置換

有限集合 X

定義：置換とは？
X 上の置換とは，全単射 $\sigma\colon X \to X$ のこと

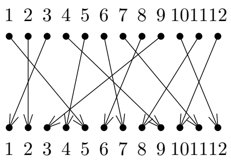


記法
- $\mathfrak{S}_X$ ＝ X 上の置換全体の集合
- $\mathfrak{S}_n$ ＝ $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換全体の集合

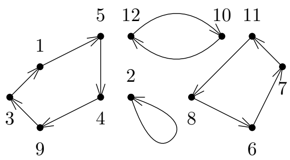
- $\mathfrak{S}$ はフラクトゥール体の S
- $|X| = n$ のとき，$|\mathfrak{S}_X| = n!$　($|X|$ は X の要素数)

置換の図示

写像としての図示



閉路の集まりとしての図示



1 行記法

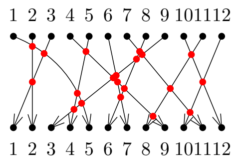
(5 2 1 9 4 7 11 6 3 12 8 10)

巡回記法

(1 5 4 9 3)(10 12)(2)(6 7 11 8)

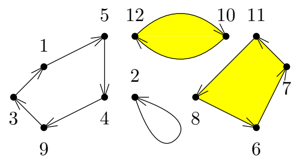
置換の符号：定義

写像としての図示



符号 ＝ 交点の数の偶奇

閉路の集まりとしての図示



符号 ＝ 偶数長閉路の総数の偶奇

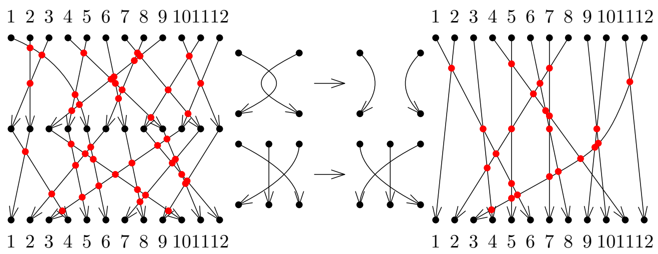
注：本来はもっと「代数的」に定義するが，ここでは直感的に定義した

記法
$\mathrm{sgn}(\sigma)$ ＝ 置換 σ の符号

置換の符号：合成に関する性質

置換 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_X$ に対して，置換の合成を $\sigma_1 \circ \sigma_2$ で書くと，
次が成り立つ

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\,\mathrm{sgn}(\sigma_2)$$



目次

正方行列の行列式とパーマネント

n 次正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

定義：行列式

A の行列式 $\det(A)$ とは

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

定義：パーマネント

A のパーマネント $\mathrm{per}(A)$ とは

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

パーマネント：例

定義：パーマネント (再掲)

A のパーマネント $\mathrm{per}(A)$ とは

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{per}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= 1\cdot5\cdot9 + 1\cdot6\cdot8 + 2\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + \\ &\quad 3\cdot5\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 \\ &= 45 + 48 + 72 + 84 + 105 + 96 = 450\end{aligned}$$

行列式：例

定義：行列式 (再掲)

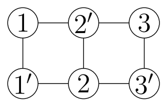
A の行列式 $\det(A)$ とは

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ のとき，

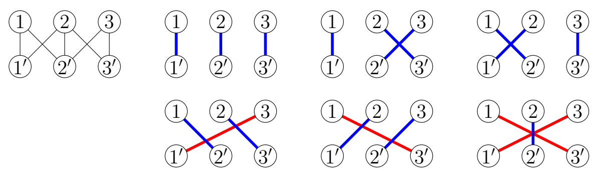
$$\begin{aligned}\mathrm{per}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= 1\cdot5\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 - \\ &\quad 3\cdot5\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 - 105 + 96 = 0\end{aligned}$$

パーマネントと二部グラフの完全マッチング

$G =$ 

$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$\mathrm{per}(A_G) = 3 = G$ の完全マッチングの総数



A_G を二部グラフ G の二部隣接行列と呼ぶことがある

行列式の計算とパーマネントの計算

事実

- 行列式の計算は 簡単 ⇝ 例えば，ガウスの消去法
- パーマネントの計算は 難しい ⇝ 『計算理論』を参照

- 例えば，「パーマネントが多項式時間で計算できる ⇒ P = NP」となる
- しかし，パーマネントを計算したい
  (完全マッチングの総数を計算したい から)

考えたいこと

行列式を計算することで，パーマネントの計算ができないか？

⇝ それができれば，パーマネントの計算が簡単になる

行列式の計算とパーマネントの計算：例

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を考える

- $\mathrm{per}(A) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 1 + 1 = 2$
- $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 - 1 = 0$

A から行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を作る

- $\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1 - (-1) = 2$

つまり，$\mathrm{per}(A) = \det(B)$ となる

疑問

1. どんな正方行列 A に対しても，ある B が存在して，$\mathrm{per}(A) = \det(B)$ となるのか？
2. どのようにして，A から B を作ればよいのか？

パーマネントは行列式として計算できるのか？

疑問

1. どんな正方行列 A に対しても，ある B が存在して，$\mathrm{per}(A) = \det(B)$ となるのか？

$\boxed{\text{解答}}$：なる！ しかし，B は巨大な行列になるかもしれない

$$\mathrm{per}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Grenet による構成法)

$\boxed{\text{未解決問題}}$：B の大きさをどれだけ小さくできるのか？

どのように行列を作ればよいのか？

疑問

2. どのようにして，A から B を作ればよいのか？

行列が大きくなると考えにくいので，次のような構成だけを考える

- 行列 A の各成分に $+1$ か -1 を掛けて，B を作る

$$\mathrm{per}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{注}}$：このように B を構成して，$\mathrm{per}(A) = \det(B)$ とできない場合もある

どのように行列を作ればよいのか？: 例

行列 A を次のものとする

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

このとき，B を次のように作る

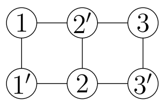
$$B = \begin{pmatrix} -a_{11} & +a_{12} & 0 \\ +a_{21} & +a_{22} & +a_{23} \\ 0 & +a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

このとき，

$$\mathrm{per}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} = \det(B)$$

目次

行列式とパーマネントと格子の完全マッチング

$G =$ 

$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

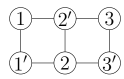
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 = \mathrm{per}(A_G)$$

今から行うこと

このような格子の完全マッチングの総数を行列式によって計算する

行いたいこと

格子 G ⇝ 行列 A_G ⇝ 符号付け B_G

$G =$ 

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

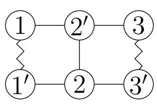
目標

$\mathrm{per}(A_G) = |\det(B_G)|$

つまり，$\det(B_G)$ のすべての項の符号を等しくする

行列の符号付け と グラフの符号付け

格子 G

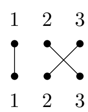
$G =$ 

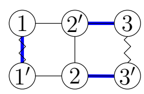
符号付け B_G

$$B_G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

完全マッチングに対応する項の符号

完全マッチング M を考える



$G =$ 

M に対応する $\det(B_G)$ の項 $= \underbrace{M\text{ に対応する置換の符号}}_{=\mathrm{sgn}(\sigma_M)} \times \underbrace{\prod_{e \in M} \underbrace{(e\text{ の符号})}_{=\varepsilon(e)}}_{=\varepsilon(M)}$

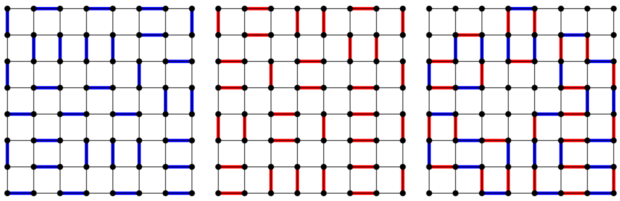
成り立ってほしいこと

任意の完全マッチング M, M' に対して

$$\mathrm{sgn}(\sigma_M)\varepsilon(M) = \mathrm{sgn}(\sigma_{M'})\varepsilon(M')$$

これが成り立てば，$|\det(B_G)| = \mathrm{per}(A_G)$ となる

2 つの完全マッチングを比較する (1)

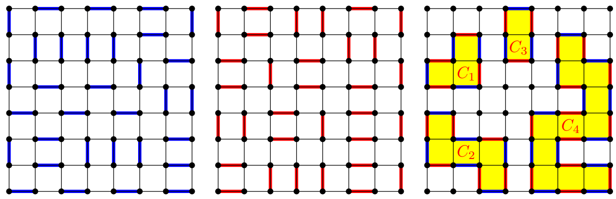


ここで，

$$\varepsilon(M)\varepsilon(M') = \prod_{e\in M\cap M'} \varepsilon(e)^2 \prod_{e\in M\triangle M'} \varepsilon(e) = \prod_{e\in M\triangle M'} \varepsilon(e)$$

ただし，$M \triangle M' = (M \cup M') - (M \cap M')$ は M と M' の対称差

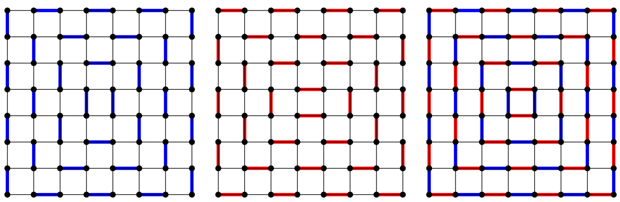
2 つの完全マッチングを比較する (2)



$M \triangle M'$ の辺は「バラバラ」の閉路を構成する

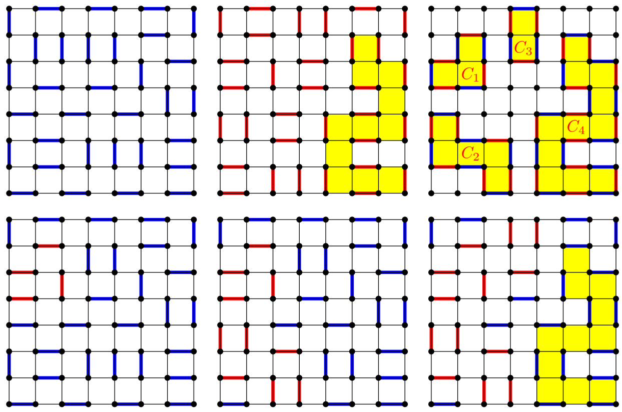
$$\prod_{e\in M\triangle M'} \varepsilon(e) = \prod_{e\in C_1} \varepsilon(e) \prod_{e\in C_2} \varepsilon(e) \prod_{e\in C_3} \varepsilon(e) \prod_{e\in C_4} \varepsilon(e)$$

2 つの完全マッチングを比較する (3)

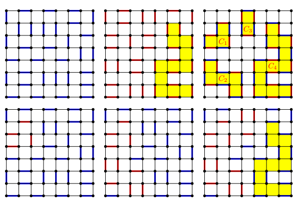


$\boxed{\text{注意}}$：$M \triangle M'$ の閉路は入れ子になるかもしれない

2 つの完全マッチングを比較する (4)



2 つの完全マッチングを比較する (5)



$$M \rightsquigarrow M_1 \rightsquigarrow M_2 \rightsquigarrow M_3 \rightsquigarrow M'$$

成り立ってほしいこと

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma_M)\varepsilon(M) &= \operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(M_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_{M_2})\varepsilon(M_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_{M_3})\varepsilon(M_3)\\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_{M'})\varepsilon(M')\end{aligned}$$

1 つの閉路だけ異なる完全マッチングを比較する (1)

$M_1 = M \triangle C_1$ なので

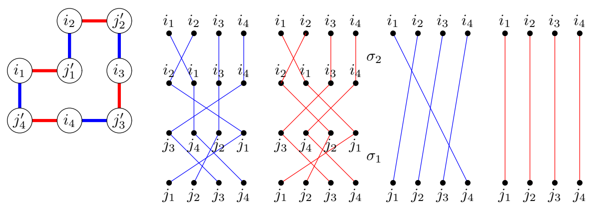
$$\begin{aligned}\varepsilon(M_1) = \varepsilon(M \triangle C_1) &= \prod_{e\in M\triangle C_1} \varepsilon(e)\\ &= \prod_{e\in M\triangle C_1} \varepsilon(e) \prod_{e\in M\cap C_1} \varepsilon(e)^2 = \prod_{e\in M} \varepsilon(e) \prod_{e\in C_1} \varepsilon(e)\\ &= \varepsilon(M)\varepsilon(C_1)\end{aligned}$$

つまり，$\operatorname{sgn}(\sigma_M)\varepsilon(M) = \operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(M_1)$ が成り立つためには，
次が成り立てばよい

$$\operatorname{sgn}(\sigma_M) = \operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(C_1)$$

1 つの閉路だけ異なる完全マッチングを比較する (2)

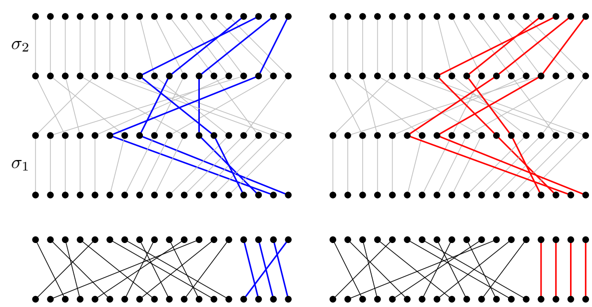
まず，$\operatorname{sgn}(\sigma_M)$ と $\operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})$ と考察する



$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_M \circ \sigma_2) = -\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_{M_1} \circ \sigma_2)\\ \therefore\ &\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_M)\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})\operatorname{sgn}(\sigma_2)\\ \therefore\ &\operatorname{sgn}(\sigma_M) = -\operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})\end{aligned}$$

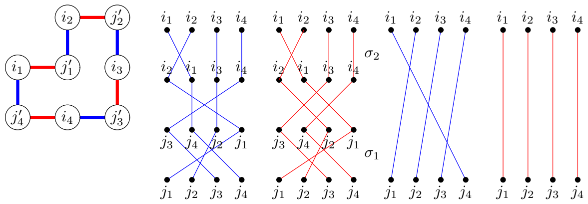
閉路の長さが 8 であるため，$\operatorname{sgn}(\sigma_M) = -\operatorname{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる

1 つの閉路だけ異なる完全マッチングを比較する (2)：注意



1 つの閉路だけ異なる完全マッチングを比較する (3)

$\mathrm{sgn}(\sigma_M)$ と $\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ と考察する



- 閉路の長さが 4 であるなら，$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = -\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる
- 閉路の長さが 6 であるなら，$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = +\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる
- 閉路の長さが 8 であるため，$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = -\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる
- 閉路の長さが 10 であるため，$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = +\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる
- 閉路の長さが 12 であるため，$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = -\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})$ となる
- $\cdots$

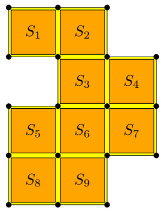
閉路の符号を定める (1)

$M_1 = M \triangle C_1$ で $\mathrm{sgn}(\sigma_M) = \mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(C_1)$ を成り立たせたい

ここまでのまとめ

$$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = \begin{cases} +\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1}) & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1}) & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

次に，符号 $\varepsilon(C_1)$ を考える



C_1 の内部が単位正方形 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ で構成されているとすると

$$\varepsilon(C_1) = \prod_{e \in C_1} \varepsilon(e) = \prod_{e \in S_1} \varepsilon(e) \prod_{e \in S_2} \varepsilon(e) \cdots \prod_{e \in S_k} \varepsilon(e)$$

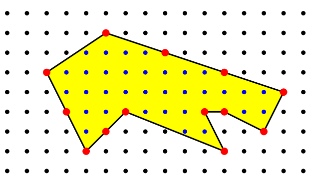
$\therefore$ 単位正方形の符号 $\varepsilon(S_i)$ で閉路の符号 $\varepsilon(C_1)$ が決まる

閉路の符号を定める (2)

ここで，ピックの公式を使う

ピックの公式 (演習問題)

頂点を格子点とする多角形の面積 s は，$i + \frac{1}{2}b - 1$ である．
ただし，
- i は多角形の内部にある格子点の総数
- b は多角形の周上にある格子点の総数



この例において
- $i = 33$
- $b = 13$

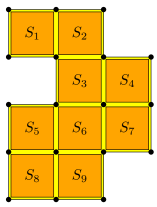
$\therefore s = i + b/2 - 1 = 77/2$

閉路の符号を定める (2) 続き

ここで，ピックの公式を使う

ピックの公式 (演習問題)

頂点を格子点とする多角形の面積 s は，$i + \frac{1}{2}b - 1$ である．
ただし，
- i は多角形の内部にある格子点の総数
- b は多角形の周上にある格子点の総数

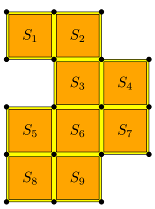


この例において
- $i = 2$
- $s = 9$

したがって，$b = 2(s - i + 1) = 16$
- つまり，閉路の長さは 16

閉路の符号を定める (3)

ピックの公式から，閉路長の情報を抽出したい



- C_1 は完全マッチングから作られるので i は必ず偶数
- したがって，

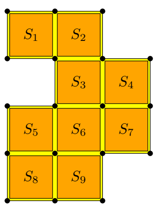
$$\begin{aligned} b &= 2(s - i + 1) \\ &\equiv 2s + 2 \pmod 4 \\ &\equiv \begin{cases} 2 & (s \text{ が偶数}) \\ 0 & (s \text{ が奇数}) \end{cases} \pmod 4 \end{aligned}$$

ピックの公式 (再掲)

頂点を格子点とする多角形の面積 s は，$i + \frac{1}{2}b - 1$ である．
ただし，i は内部の格子点数，b は周上の格子点数

閉路の符号を定める (4)

仮定：各単位正方形 S に対して $\varepsilon(S) = -1$ となるように符号付けができる



$$\begin{aligned} \varepsilon(C_1) &= \varepsilon(S_1) \cdots \varepsilon(S_k) \\ &= (-1)^k \\ &= \begin{cases} +1 & (k \text{ が偶数}) \\ -1 & (k \text{ が奇数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} +1 & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 2 \bmod 4) \\ -1 & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 0 \bmod 4) \end{cases} \end{aligned}$$

置換の符号と閉路の符号の統合 (1)

$M_1 = M \triangle C_1$ で $\mathrm{sgn}(\sigma_M) = \mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(C_1)$ を成り立たせたい

ここまでのまとめ

置換の符号

$$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = \begin{cases} +\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1}) & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma_{M_1}) & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

閉路の符号 (仮定：各単位正方形 S に対して $\varepsilon(S) = -1$ とできる)

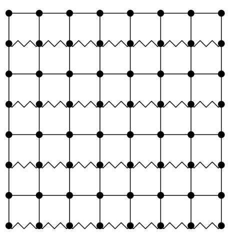
$$\varepsilon(C_1) = \begin{cases} +1 & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 2 \bmod 4) \\ -1 & (C_1 \text{ の長さ } \equiv 0 \bmod 4) \end{cases}$$

つまり，C_1 の長さが何であっても

$$\mathrm{sgn}(\sigma_M) = \mathrm{sgn}(\sigma_{M_1})\varepsilon(C_1)$$

置換の符号と閉路の符号の統合 (2)

各単位正方形 S に対して $\varepsilon(S) = -1$ となる符号付け (の例)



パーマネントと行列式：実際に計算してみる (1)

$$A_G = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

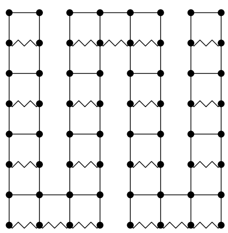
パーマネントと行列式：実際に計算してみる (2)

$$B_G = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \det(B_G) = 12988816$

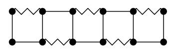
パーマネントと行列式：実際に計算してみる (3)

他の例



$\rightsquigarrow \det(B_G) = 2012674$ (計算を間違えていなければ)

パーマネントと行列式：実際に計算してみる (4)



$$B_6 = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

パーマネントと行列式：実際に計算してみる (4) 続き

$$\det(B_6) = \begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

$$= \det(B_5) + \det(B_4)$$

見覚えのある漸化式が得られる…

パーマネントと行列式：まとめ

今日の議論のまとめ

正方格子 (の部分グラフ) の完全マッチングの総数を計算するには

1. 各単位正方形 S に対して，$\varepsilon(S) = -1$ となるように符号付けを行い
2. 得られた行列の行列式を計算すればよい

六角格子 (の部分グラフ) でもうまく符号付けを行うことで
完全マッチングの総数を計算できる

目次

今日の目標

今日の目標

1. 正方行列の行列式とパーマネントの定義を理解する
   - 置換とその符号
2. 行列式を用いてパーマネントを計算する手法を使えるようになる

次回と次々回は，行列式を用いて数え上げを行う別の問題を扱う