

離散数理工学 第4回
 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
 okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020年10月27日

最終更新：2020年10月25日 22:58

スケジュール 後半 (予定)

- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)
- * 中間レポート出題 (12/15)
- 10 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)
- 12 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)
- 14 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)
- * 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 母関数が収束しない場合
- 5 今日のまとめ

母関数 (復習)

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
1, 1, 1, 1, ...	1	$\frac{1}{1-x}$
1, 2, 4, 8, ...	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
1, α , α^2 , α^3 , ...	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
0, 1, 2, 3, ...	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- * 休み (祝日) (11/3)
- 5 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
- 6 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- * 休み (調布祭片付け) (11/24)
- 7 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- ▶ 特に、ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- ▶ つまり、 $|x| < r$ のとき、 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

線形漸化式の厳密解法

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 母関数が収束しない場合
- 5 今日のまとめ

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\ \therefore A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

$\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2 + x - 1} &= \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2} \\ \therefore -1 &= a(x - \alpha_2) + b(x - \alpha_1) \end{aligned}$$

この式は、任意の x で成り立つから、

- ▶ $x = \alpha_1$ とすると, $-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- ▶ $x = \alpha_2$ とすると, $-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

したがって, $a = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- ▶ このとき, $a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$
- ▶ つまり, 上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= x(A(x) - 1) + x^2 A(x) = xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

このとき, $\frac{-1}{x^2 + x - 1}$ の部分分数分解が必要

- ▶ 「分母 = 0」を x について解くと, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- ▶ したがって, ある定数 a, b が存在して

$$\frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{a}{x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この a, b を定める (次のページ)

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって, 任意の $n \geq 0$ に対して、

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \square$$

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ 今日のまとめ

例題 1 : 直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_1 = 3$
- ▶ $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- ▶ $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ▶ $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- ▶ ...

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

① 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

③ 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} = \frac{1-4x}{1-3x} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

① a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

▶ このとき、 $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$ したがって、考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1 : 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

② 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

④ 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって、

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n \quad \square$$

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_0 = 1$
- ▶ $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- ▶ $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- ▶ $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- ▶ ...

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる、つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので、それを定める (次のページ)

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- ▶ $x=0$ とすると, $0 = a + c$
- ▶ $x=1$ とすると, $2 = -2b$
- ▶ $x = \frac{1}{3}$ とすると, $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって, $a = -\frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して、 $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない

実際、 $n \geq 1$ のとき、 $a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$ であるので、

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow$$

例題 3 : 書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{na_{n-1}}{n!} + \frac{3n}{n!} - \frac{2}{n!} = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right) \\ &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \end{aligned}$$

復習 : テイラー展開

$$\text{任意の実数 } x \text{ に対して } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ 今日のまとめ

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1 の前に

a_n の代わりに、次の b_n を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして、 b_n の母関数 $B(x)$ を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- ▶ $B(x)$ を、数列 a_0, a_1, a_2, \dots の **指数型母関数** と呼ぶことがある
- ▶ 一方で、 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を、数列 a_0, a_1, a_2, \dots の **通常型母関数** と呼ぶことがある

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} \\ \therefore b_n x^n &= b_{n-1} x^n + \frac{3}{(n-1)!} x^n - \frac{2}{n!} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $B(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} B(x) - 4 &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \\ \therefore (1-x)B(x) &= 3xe^x - 2e^x + 6 \\ \therefore B(x) &= \frac{3x}{1-x} e^x - \frac{2}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \\ &= \frac{-3(1-x) + 3}{1-x} e^x - \frac{2}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \\ &= -3e^x + \frac{1}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \end{aligned}$$

$B(x)$ を x の関数として表現できた

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
 B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 6 \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して、 $b_n = 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 母関数が収束しない場合
- 5 今日のまとめ

 b_n の一般項

$$\begin{aligned}
 \text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } b_n &= 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!} \\
 &\quad \downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

 a_n の一般項

$$\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } a_n = 6n! + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} - 3$$

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
- ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは、『複素関数論』が重要な役割を果たす