

離散数理工学 第3回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020年10月20日

最終更新：2020年10月19日 11:57

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 1 / 44

スケジュール 後半 (予定)

- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/8)
- * 中間レポート出題 (12/15)
- 10 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/22)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/5)
- 12 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/12)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/19)
- 14 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/26)
- * 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 3 / 44

線形漸化式の厳密解法

目次

- 1 線形漸化式の厳密解法
- 2 漸化式より上界を導出する方法
- 3 母関数
- 4 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 5 / 44

線形漸化式の厳密解法

線形漸化式の解き方 (1)

- 1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち、

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の特性方程式と呼ぶ

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 7 / 44

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数 (10/6)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/13)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/20)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (10/27)
- * 休み (祝日) (11/3)
- 5 離散代数：行列式とパーマネント (11/10)
- 6 離散代数：非交差経路の数え上げ (11/17)
- * 休み (調布祭片付け) (11/24)
- 7 離散代数：全域木の数え上げ (12/1)

注意：予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 2 / 44

今日の目標

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 4 / 44

線形漸化式の厳密解法

例：2段の格子 — まとめ

a_n = グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 6 / 44

線形漸化式の厳密解法

線形漸化式の解き方 (1)

- 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(注： $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \lambda_2 = -1$)

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2020年10月20日 8 / 44

線形漸化式の解き方 (1)

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶ $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ を思い出すと, c_1, c_2 が定まる

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

$$\begin{aligned} \text{▶ } c_1 &= \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \\ \text{▶ } c_2 &= \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

したがって, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

となる

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

2 行列の累乗を計算する

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

- ▶ A の固有値と固有ベクトルを計算する
- ▶ A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

- ▶ これを解くと, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- ▶ これが A の固有値で, λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- ▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする
- ▶ $a_1 = 1, a_2 = 2$ なので,

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, \\ 2 &= c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 \end{aligned}$$

- ▶ c_1, c_2 を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2}$$

例: 2 段の格子 — まとめ

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

別の方法を用いて, これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (2): 一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列, x_1, x_2, x_3, \dots と c はベクトル

- ▶ このとき,
$$x_n = A^{n-1} x_1 = A^{n-1} c$$
- ▶ したがって, A^{n-1} が計算できればよい

線形漸化式の解き方 (2)

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_1 &= 0 \\ \therefore \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

したがって, $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル
同様に, $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化: $U = (v_1 \ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち, } A = U\Lambda U^{-1}$$

- ▶ $A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$
- ▶ $U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ なので, $U^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

線形漸化式の解き方 (2)

3 まとめる

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-1} + \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-2} + \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \frac{2 - \lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1^n + \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2} \lambda_2^n \\ \frac{2 - \lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1^{n-1} + \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^n - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-1} - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例: 3 段の格子 (第 2 回講義より)

- ▶ $b_n =$ グラフ B_n における完全マッチングの総数
- ▶ $c_n =$ グラフ C_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4, \text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3, \text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例: 3 段の格子 — 漸化式の書き換え (2)

- ▶ $\therefore k \geq 2$ のとき,

$$x_k = x_{k-1} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} x_i + 2$$

- ▶ $\therefore k \geq 3$ のとき,

$$x_{k-1} = x_{k-2} + 2 \sum_{i=1}^{k-2} x_i + 2$$

- ▶ 上の式 から 下の式 を引くと, $k \geq 3$ のとき, 次が得られる

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= x_{k-1} - x_{k-2} + 2x_{k-1} \\ \therefore x_k &= 4x_{k-1} - x_{k-2} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n+1} + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_2 \lambda_1^n + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる ($n = 1, 2$ のときも, この式は正しい) □

例: 3 段の格子 — 漸化式の書き換え (1)

- ▶ 自然数 $k \geq 1$ に対して, 次のように記号を定義

$$x_k = b_{2k}, \quad y_k = c_{2k-1}$$

- ▶ ここで, $k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} b_{2k} &= b_{2k-2} + 2c_{2k-1} \\ 2c_{2k-1} &= 2b_{2k-2} + 2c_{2k-3} \\ 2c_{2k-3} &= 2b_{2k-4} + 2c_{2k-5} \\ &\vdots \\ 2c_3 &= 2b_2 + 2c_1 \end{aligned}$$

- ▶ これらの式を足し合わせると, $k \geq 2$ のとき, 次が得られる

$$b_{2k} = b_{2k-2} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} b_{2i} + 2c_1$$

例: 3 段の格子 — 漸化式の書き換え (3)

$x_2 = b_4 = 11$ なので, x_k に関して次の漸化式が得られる

 x_k の満たす漸化式

$$x_k = \begin{cases} 3 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 11 & (k = 2 \text{ のとき}) \\ 4x_{k-1} - x_{k-2} & (k \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

先ほどと同様の方法で解くと, 次が得られる (演習問題)

$$k \geq 1 \text{ のとき, } x_k = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} (2 + \sqrt{3})^k + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} (2 - \sqrt{3})^k$$

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4, \text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3, \text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

解くと次が得られる

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \geq 1, \text{ 奇数}) \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^n & (n \geq 2, \text{ 偶数}) \end{cases}$$

c_n については演習問題

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる

(計算量の解析において、欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

線形漸化式から上界を導く

① 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶ ここで、 $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ

▶ 注意: ここから f'_n を厳密に求めて、 f_n を求めてもよいが、ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

② 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式: $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

▶ この方程式はただ 1 つ正の解を持ち、それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは、

例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

③ 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$

証明: $n = 1$ のとき

▶ $f'_1 = 2$

▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

$n = 2$ のとき

▶ $f'_2 = 2$

▶ $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$

▶ したがって、 $f'_2 < 2\lambda^2$ となる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き: 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

オーダー記法: 復習

O 記法の定義

非負の値を取る数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ と $\{b_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは、

ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して、任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の増加率以下である

漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

直感 : まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるので、それを探る

- ▶ 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換える
- ▶ $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき, $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注 : $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$g_n = O(\log n)$

証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ 漸化式より, $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺 \leq 右辺

目次

- 線形漸化式の厳密解法
- 漸化式より上界を導出する方法
- 母関数
- 今日のまとめ

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に, $a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\frac{1}{1-\alpha x}$

$g'_k = g_{2^k}$ と置き, 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換えると, 次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- ▶ これは等差数列
- ▶ 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して, $g'_k = 2k + 3$

つまり, g_n はだいたい $2 \log_2 n$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え, 任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\ &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\ &= 3 + 2 \log_2(k+1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

□

数列の母関数

母関数とは?

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

デジタル信号処理で「z変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は収束する

- ▶ 特に, ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- ▶ つまり, $|x| < r$ のとき, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $a_n = 3n + 1$ とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

- ① 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- ② 数列の母関数が導出できる