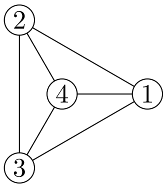
離散数理工学 (7) **2020 年 12 月 1 日**
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2020 年 12 月 8 日 午前 9:00

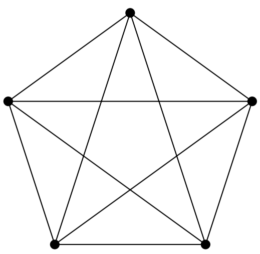
注意：行列式の計算には，数学ソフトウェアやプログラムを用いることを推奨する．

復習問題 7.1 無向グラフ G のラプラス行列を $L(G)$ とする．無向グラフ G の辺に向きをつけてできる有向グラフを D として，D の接続行列を $B(D)$ とする．このとき，$L(G) = B(D)B(D)^\top$ が成り立つことを証明せよ．

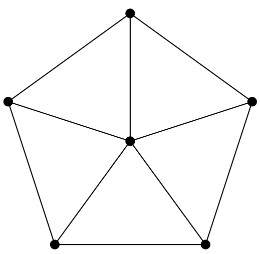
復習問題 7.2 頂点数 4 の完全グラフ (下図) の全域木の総数を求めよ．



復習問題 7.3 頂点数 5 の完全グラフ (下図) の全域木の総数を求めよ．



復習問題 7.4 頂点数 6 のホイール (下図) の全域木の総数を求めよ．



補足問題 7.5 無向グラフ G のラプラス行列を $L(G)$，その第 1 行第 1 列を取り除いてできる行列を $L_{11}(G)$ とする．無向グラフ G の全域木の総数が $\det(L_{11}(G))$ と等しいことを証明せよ．(ヒント：演習問題 7.1 を参考にして，ビネ・コーシーの公式を用いてみよ．)

追加問題 7.6 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，$\det(L(G)) = 0$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$L(G)$ は G のラプラス行列である．

追加問題 7.7 頂点数 $n \geq 2$ の完全グラフの全域木の総数が n^{n-2} であることを証明せよ．

追加問題 7.8 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して，次のように n 次正方行列 $M_n = ((m_n)_{ij})$ を定義する．

$$(m_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j \text{ のとき}), \\ 1 & (i+1 = j \text{ または } i-1 = j \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

例えば，$n = 2, 3, 4$ のときは以下のように構成される．

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

行列式 $\det(M_n)$ を，頂点数 $n+1$ のある無向グラフの全域木の総数であると解釈することで，計算せよ．