離散数理工学 (6) **2020 年 11 月 17 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2020 年 12 月 1 日 午前 9:00

注意：行列式の計算には，数学ソフトウェアやプログラムを用いることを推奨する．

復習問題 6.1 有向閉路を持たない有向グラフ $G=(V,A)$ と，その $2k$ 個の頂点 $s_1, s_2, \ldots, s_k, t_1, t_2, \ldots, t_k \in V$ を考える (ただし，k は 1 以上の整数であるとする)．また，$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k), \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ と表記する．

任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，G において頂点 s_i から頂点 t_j へ至る有向経路全体の集合を $\mathcal{P}(s_i, t_j)$ で表す．そして，$\mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ で直積

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}(s_i, t_i)$$

を表す．この集合の要素 $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ を $\mathbf{P}$ で表す．

さらに，$\mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ で集合

$$\{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mid P_i, P_j \text{ は非交差，} 1 \leq \forall\, i < \forall\, j \leq k\}$$

を表す．ここで，P_i と P_j が非交差であるとは，P_i と P_j が頂点を共有しないことを意味する．

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して，$\sigma(\mathbf{t}) = (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(k)})$ として，$\mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))$ を直積

$$\prod_{i=1}^{t} \mathcal{P}(s_i, t_{\sigma(i)})$$

とする．また，$\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))$ は

$$\{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t})) \mid P_i, P_j \text{ は非交差，} 1 \leq \forall\, i < \forall\, j \leq k\}$$

と定義する．

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を，任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

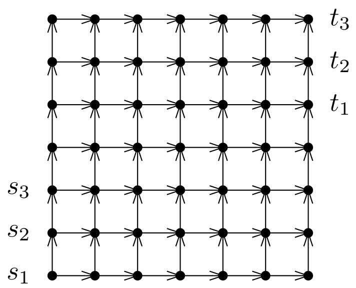
$$m_{ij} = |\mathcal{P}(s_i, t_j)|$$

となるように定義する．このとき，

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) |\mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))|$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 6.2 演習問題 6.1 の記法を用いる．次の有向グラフを G としたとき，$|\mathcal{N}((s_1, s_2, s_3), (t_1, t_2, t_3))|$ を計算せよ．



復習問題 6.3 1 以上の自然数 k を考える．2 つの正方行列 $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つことを，演習問題 6.4 の結果を用いて証明せよ．

補足問題 6.4 演習問題 6.1 の記法を用いる．有向グラフ $G=(V,A)$ の弧に対する重み $w\colon A \to \mathbb{R}$ も与えられるとする．そして，任意の経路 P に対して，$w(P)$ を P に使われる弧の重みの積とする．すなわち，

$$w(P) = \prod_{a \in P} w(a)$$

である (ここで，P は弧の集合であると見なしている)．

行列 $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ を，任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}(s_i, t_j)} w(P)$$

となるように定義する．このとき，

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{t}))} \prod_{i=1}^{k} w(P_i) \right)$$

が成り立つことを証明せよ．

補足問題 6.5 1 以上の自然数 n, m を考える．任意の行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, k\} \\ |S| = n}} \det(A[*, S]) \det(B[S, *])$$

が成り立つ．ただし，$A[*, S] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする列に A を制限してできる行列であり，$B[S, *] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は S を添え字とする行に B を制限してできる行列であるとする．この事実を，演習問題 6.4 の結果を用いて証明せよ．

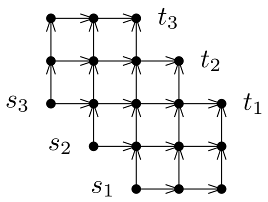
追加問題 6.6 1 以上の自然数 k を考える．正方行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ に対して，

$$\det(A) = \det(A^\top)$$

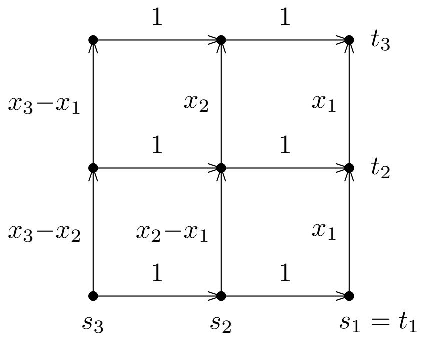
が成り立つことを，演習問題 6.4 の結果を用いて証明せよ．ただし，$A^\top$ は A の転置行列である．

次のページに進む

追加問題 6.7 演習問題 6.1 の記法を用いる．次の有向グラフを G としたとき，$|\mathcal{N}((s_1,s_2,s_3),(t_1,t_2,t_3))|$ を計算せよ．



追加問題 6.8 演習問題 6.4 の記法を用いる．次の有向グラフを G とし，図で示したとおり各弧の重みが与えられているとする．ただし，x_1, x_2, x_3 は実数である．



問題 6.4 の結果を G に適用することで，

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

が成り立つことを証明せよ．