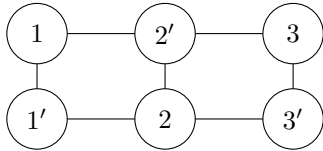


提出締切：2020年11月17日 午前9:00

注意：行列式の計算には、数学ソフトウェアやプログラムを用いることを推奨する。

復習問題 5.1 次の二部グラフ G を考える。



以下の問いに答えよ。

- このグラフ G の二部隣接行列 A_G を書き下せ。
- 行列 A_G の各成分に $+1$ か -1 を掛けた行列 B_G で、 $\text{per}(A_G) = \det(B_G)$ を満たすものを見つけてみよ。
- 小問2で見つけた B_G に対して $\det(B_G)$ を計算することで、 G の完全マッチングの総数を求めよ。

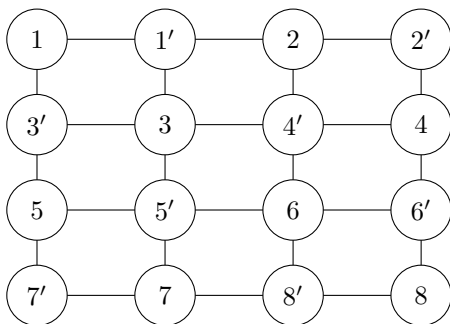
補足問題 5.2 ピックの公式は、頂点を格子点に持つ多角形 P の面積 s に対して

$$s = i + \frac{1}{2}b - 1$$

が成り立つというものである。ここで、 i は P の内部に含まれる格子点の総数、 b は P の周上にある格子点の総数である。この問題の目的はピックの公式を証明することである。

- 内部に格子点を含まない三角形の面積が $1/2$ であることを証明せよ。(つまり、ピックの公式において、 $i = 0$ 、 $b = 3$ の場合を証明せよ。)
- 多角形には必ず対角線が存在することを用いて、数学的帰納法により、ピックの公式を証明せよ。

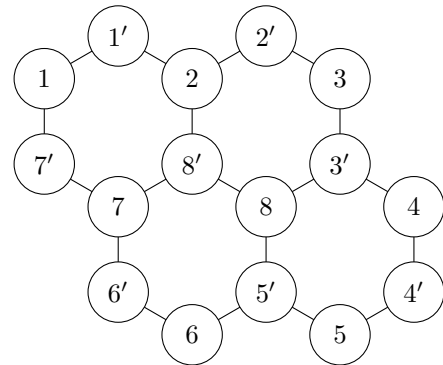
追加問題 5.3 次の二部グラフ G を考える。



以下の問いに答えよ。

- このグラフ G の二部隣接行列 A_G を書き下せ。
- 行列 A_G の各成分に $+1$ か -1 を掛けた行列 B_G で、 $\text{per}(A_G) = \det(B_G)$ を満たすものを見つけてみよ。
- 小問2で見つけた B_G に対して $\det(B_G)$ を計算することで、 G の完全マッチングの総数を求めよ。

追加問題 5.4 次の二部グラフ G を考える。



以下の問いに答えよ。

- このグラフ G の二部隣接行列 A_G を書き下せ。
- 行列 A_G の各成分に $+1$ か -1 を掛けた行列 B_G で、 $\text{per}(A_G) = \det(B_G)$ を満たすものを見つけてみよ。
- 小問2で見つけた B_G に対して $\det(B_G)$ を計算することで、 G の完全マッチングの総数を求めよ。

(ヒント：小問2の符号付けは闇雲に考えても見つからないと思う。解き方としてはよくないかもしれないが、まず、 G の完全マッチングをすべて見つけることで、その総数を求めてみよ。そして、 A_G の行列式と比べてみよ。グラフ G の完全マッチングをすべて見つけるときには、頂点8と頂点8'の周りの状況で場合分けを行うとよいかもしれない。)

追加問題 5.5 どの成分も0ではないような3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を考える。この行列の各成分に $+1$ か -1 を掛けた行列 B で、 $\text{per}(A) = \det(B)$ を満たすものは存在しない。存在しない理由を説明せよ。(つまり、存在しないことを証明せよ。)