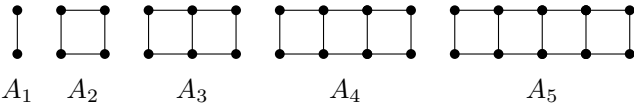


提出締切：2020年10月20日 午前9:00

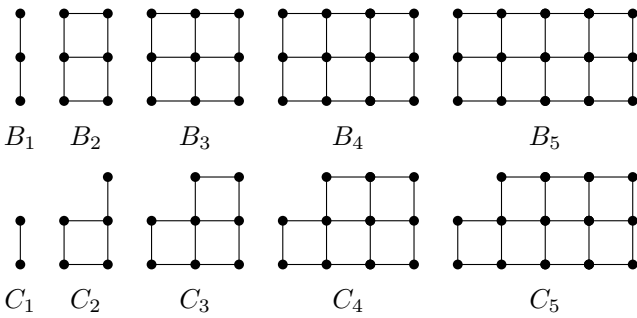
復習問題 2.1 自然数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ A_n を考える。証明せよ。



グラフ A_n における完全マッチングの総数を a_n としたとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.2 自然数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ B_n と C_n を考える。



グラフ B_n における完全マッチングの総数を b_n とし，グラフ C_n における完全マッチングの総数を c_n とする。次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4, \text{ 偶数のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.3 次のアルゴリズムを考える。

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

自然数 $n \geq 0$ に対して， $\text{fnct}(n)$ を実行したときに出力される「a」の数を f_n とする。次の漸化式が成り立つことを

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.4 自然数 $a, b \geq 1$ に対して， $a \geq b$ のとき，

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

が成り立つことを証明せよ。ただし， $a \bmod b$ は a を b で割った余りを表す。(注：問題 2.8 の結果を使ってもよい。)

復習問題 2.5 次のアルゴリズムを考える。

```
1: def gcd(a, b) # precondition: a >= b
2:   print "G"
3:   if b == 0
4:     return a
5:   else
6:     gcd(b, a % b)
7:   end
8: end
```

そして，任意の自然数 $n \geq 0$ に対して次の量を考える。

$$g_n = \max_{\substack{a \geq 1, \\ b \leq n}} \{ \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される G の数} \}$$

このとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

- 任意の $n \geq 0$ に対して， $g_n \leq g_{n+1}$.
- $g_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$
(注：問題 2.4 の結果を使ってもよい。)

補足問題 2.6 演習問題 2.2 におけるグラフ B_n, C_n と数 b_n, c_n を考える。次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3, \text{ 奇数のとき}). \end{cases}$$

次ページに続く

補足問題 2.7 自然数 $a, b \geq 1$ の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す. 任意の自然数 $a > b \geq 1$ に対して, $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ が成り立つことを証明せよ. (注意: この事実から, ユークリッドのアルゴリズムの正当性が導かれる.)

補足問題 2.8 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

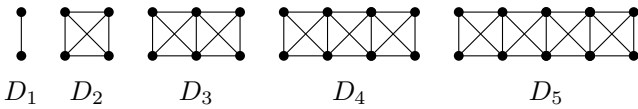
が成り立つことを証明せよ.

追加問題 2.9 問題 2.1 におけるグラフ A_n と数 a_n を考える. 自然数 n と i が $n \geq 5$ と $3 \leq i \leq n - 2$ を満たすとき, 次が成り立つことを証明せよ.

$$a_n = a_{i-1}a_{n-i} + a_{i-1}a_{n-i-1} + a_{i-2}a_{n-i}.$$

ヒント: 組合せ的解釈を考えてみよ.

追加問題 2.10 自然数 $n \geq 1$ に対して, 次の図で表されるグラフ D_n を考える.



グラフ D_n における完全マッチングの総数を d_n とするとき, 次の漸化式が成り立つことを証明せよ.

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ d_{n-1} + 2d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

追加問題 2.11 次のアルゴリズムを考える.

```

1: def fnct2(n)
2:   print "K"
3:   if n == 0
4:     return
5:   elsif n % 2 == 0
6:     fnct2(n/2)
7:   else
8:     fnct2(n-1)
9:   end
10: end

```

自然数 $n \geq 0$ に対して, $\text{fnct2}(n)$ が出力する K の総数を p_n で表す. 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$p_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + p_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$