離散数理工学 (1) **2020 年 10 月 6 日**
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2020 年 10 月 13 日 午前 9:00

復習問題 1.1 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$n! \leq \mathrm{e}\, n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 1.2 任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 1.3 任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

が成り立つことを証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.4 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

が成り立つことを証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.5 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

が成り立つことを証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.6 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.7 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．

復習問題 1.8 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

補足問題 1.9 任意の実数 x に対して，$1 + x \leq \mathrm{e}^x$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.10 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$

が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.11 自然数 a と b が $a \geq 1$，$b \geq 1$，$a \geq b$ を満たすとする．

1. 不等式 $\displaystyle\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ．
2. 不等式 $\displaystyle\frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．
3. 上の 2 つの小問より，$\displaystyle\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.12 自然数 a, b, k が $a \geq b \geq k \geq 0$ を満たすとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.13 [**二項定理**] 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 1.14 次を証明せよ．演習問題 1.9 を用いてよい．

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1 + \frac{1}{n})^n \leq \mathrm{e}$．
2. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \geq \mathrm{e}$．（ヒント：$1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ．）
3. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$．（ヒント：上の 2 つの小問を用いよ．）

追加問題 1.15 任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\sum_{k=b}^{a} \binom{k}{b} = \binom{a+1}{b+1}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：b を固定して，a に関する帰納法を用いよ．) また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

追加問題 1.16 問題 1.7 にある等式は係数が -1 である項を移項させると，

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{偶数}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{奇数}}}^{n} \binom{n}{k}$$

となる．この等式の組合せ的解釈を与えよ．

追加問題 1.17

1. 任意の自然数 $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$

   が成り立つことを証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

2. 任意の自然数 $a \geq c \geq 0$ に対して，

$$\sum_{b=c}^{a} \binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c} 2^{a-c}$$

   が成り立つことを証明せよ．(今まで出てきた等式を用いてもよい．) また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

追加問題 1.18 任意の自然数 $a, b, c \geq 0$ に対して，$a \geq c$, $b \geq c$ であるとき，

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

が成り立つことを証明せよ．(今まで出てきた等式を用いてもよい．) また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．