

1 レポート課題

次の4問にすべて答えよ。なお、WHILE プログラムと GOTO プログラムの定義は講義で紹介したものを採用し、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は自然数全体の集合を表すとする。

問 1

集合 A, B, C と 2 つの部分関数 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して、部分関数の合成 $g \circ f: A \rightarrow C$ を以下のように定義する。すなわち、任意の $a \in A$ に対して、

$$(g \circ f)(a) = \begin{cases} g(f(a)) & (f(a) \downarrow \text{かつ } g(f(a)) \downarrow \text{ のとき}) \\ \text{定義されない} & (f(a) \downarrow \text{かつ } g(f(a)) \uparrow \text{ のとき}) \\ \text{定義されない} & (f(a) \uparrow \text{ のとき}). \end{cases}$$

この定義の下で、任意の集合 A, B, C, D と任意の 3 つの部分関数 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ に対して、

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

は成り立つだろうか。成り立つ場合はそれを証明し、成り立たない場合は反例を挙げよ。

問 2

整数全体の集合を $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ で表す。

問 2-1 単射 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ を 1 つ与え、それが単射であることを証明せよ。(注: f が全単射である必要はない。)

問 2-2 前小問の f を用いて、整数 n のコードを $f(n)$ とする。このとき、次の部分関数 $\text{isInt}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、

$$\text{isInt}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ がある整数のコードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

とする。部分関数 isInt が WHILE 計算可能であることを証明せよ。(注: 小問 1 の解答によっては、 isInt が WHILE 計算不可能になることがありうる。その場合は、小問 1 の解答を修正して、 isInt が WHILE 計算可能になるようにせよ。)

問 2-3 次の部分関数 $\text{add_int}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、

$$\text{add_int}(x_1, x_2) = \begin{cases} f(n_1 + n_2) & (x_1, x_2 \text{ がある整数 } n_1, n_2 \text{ のコードであるとき}) \\ \text{定義されない} & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

とする。部分関数 add_int が WHILE 計算可能であることを証明せよ。

(注: プログラムを設計する際、自ら定義した糖衣構文を用いても構わない。しかし、その場合、用いた糖衣構文がどのようなプログラムへ置換されるか、必ず述べること。)

問 3

自然数全体の集合 \mathbb{N} の冪集合 (つまり, \mathbb{N} の部分集合全体の集合) を $2^{\mathbb{N}}$ で表す. このとき, 単射 $f: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ が存在しないことを証明せよ.

問 4

次の部分関数 $\text{add}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える.

$$\text{add}(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

そして, 部分関数 $\text{isAdd}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する.

$$\text{isAdd}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が } \text{add} \text{ を計算する GOTO プログラムのコードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

部分関数 isAdd が WHILE 計算不可能であることを証明せよ. (ヒント: s-m-n 定理を用いてもよい.)

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 12 月 16 日 (水) 23:59 JST.
- 提出は Google Classroom にて, 「課題」から「必須レポート課題 (前半)」を選択し, そのフォームにおいて PDF ファイル を添付する.
- レポートの最初のページに, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 日本語表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 100 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということを意味する. 「(2) 日本語表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか, ということを意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということを意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われるかもしれない.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.