計算理論　第 3 回
チャーチ・チューリングの定立

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 15 日

最終更新：2020 年 10 月 19 日　08:31

この講義の主題

計算理論 (Theory of Computation)

- 計算可能性理論 (Computability Theory)
- 計算複雑性理論 (計算量理論) (Complexity Theory)

講義の進め方

- 前半：計算可能性理論 (担当：岡本)
- 後半：計算複雑性理論 (担当：垂井先生)

スケジュール 前半 (予定)

1. 計算とは何か？ (10/1)
2. 計算モデル (10/8)
3. チャーチ・チューリングの定立 (10/15)
- ⋆ 休み (体育祭) (10/22)
4. コード化 (10/29)
5. 計算可能性 (11/5)
6. 停止性問題 (11/12)
7. 再帰定理 (11/19)
8. 前半のまとめ (11/26)

注意：予定の変更もありうる

計算モデルとは？ (直感的な定義)

「計算主体」を数学的に抽象化したもの

代表的な計算モデル

- チューリング機械
- ランダム・アクセス機械
- カウンタ機械
- ポインタ機械
- タグ・システム
- 帰納的関数 (μ 再帰関数)
- ラムダ計算
- マルコフ・アルゴリズム

この講義 (の前半) では

- ある「単純化したプログラミング言語」を計算モデルとして用いる
  - WHILE プログラム (前回紹介した)
  - LOOP プログラム (今回紹介する)
  - GOTO プログラム (今回紹介する)

目次

計算可能性の等価性 (1)

計算モデルとは？ (直感的な定義)

「計算主体」を数学的に抽象化したもの

代表的な計算モデル

- チューリング機械
- ランダム・アクセス機械
- カウンタ機械
- ポインタ機械
- タグ・システム
- 帰納的関数 (μ 再帰関数)
- ラムダ計算
- マルコフ・アルゴリズム

数学的事実

これらの計算モデルにおける計算可能性は等価

これらの計算モデルで計算できることは変わらない (と証明できる)

計算可能性の等価性 (2)

計算モデルとは？ (直感的な定義)

「計算主体」を数学的に抽象化したもの

代表的な計算モデル

- チューリング機械
- ランダム・アクセス機械
- カウンタ機械
- ポインタ機械
- タグ・システム
- 帰納的関数 (μ 再帰関数)
- ラムダ計算
- マルコフ・アルゴリズム

数学的事実 (2)

これらの計算モデルにおける計算可能性は WHILE 計算可能性と等価

つまり，WHILE プログラムはこれらの計算モデルと同等に強力

チャーチ・チューリングの定立 (提唱，テーゼ)

チャーチ・チューリングの定立

我々が直観的に考える「計算できる」ことを
前のページで挙げた計算モデルによって「計算可能である」ことと見なす

注

- これは「数学的事実」ではない (証明できない)
- チャーチ・チューリングの定立を認めれば
  我々が直観的に考える「計算できる」ことは
  「WHILE 計算可能である」ことと見なせる

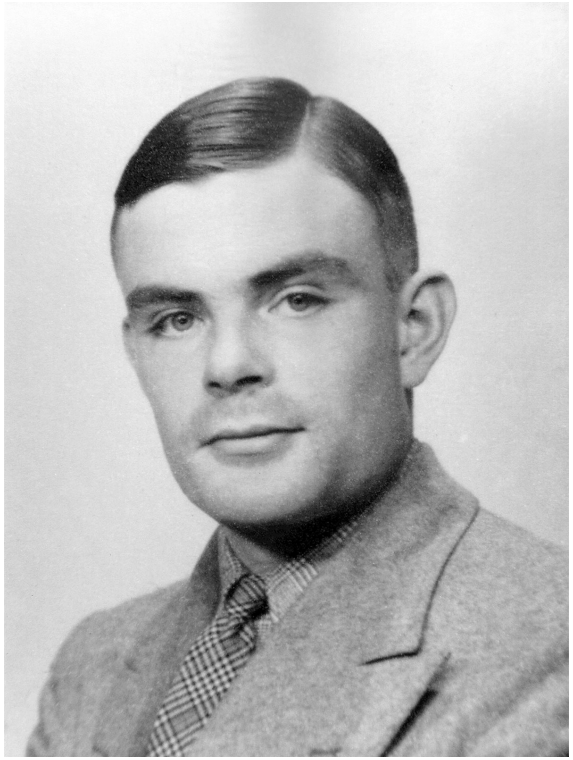
用語の定義：チューリング完全

計算モデル M がチューリング完全であるとは
チューリング機械で計算可能であることを M が計算可能であること

- つまり，前のページで挙げた計算モデルはすべてチューリング完全
- ほとんどのプログラミング言語はチューリング完全

チャーチとチューリング

Alonzo Church
(1903–1995)



Alan Turing
(1912–1954)

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Church/

https://www.britannica.com/biography/Alan-Turing

今日の目標

今日の目標

「計算可能性が等価である」ことの証明ができるようになる

- 簡単なプログラミング言語をあらたに 2 つ紹介する
  - LOOP プログラム
  - GOTO プログラム
- この 2 つと WHILE プログラムの計算可能性を比較する

重要な概念

- チューリング完全
- 構造的帰納法
- 計算の模倣

復習：WHILE プログラム (1)

機能をそぎ落として，本質的な部分だけを残したプログラミング言語

データ型

- 自然数 $0, 1, 2, \ldots$ ($\mathbb{N}$ の要素)

構成要素

変数

- $x_0, x_1, x_2, \ldots$

記号

- $:=$, ;, WHILE, DO, END
- $\neq 0$, $+1$, -1

WHILE プログラムの例

WHILE $x_1 \neq 0$ DO
  $x_0 := x_0 + 1$;
  $x_1 := x_1 - 1$
END;
WHILE $x_2 \neq 0$ DO
  $x_0 := x_0 + 1$;
  $x_2 := x_2 - 1$
END

復習：WHILE プログラム (2)：文法 (構文論)

WHILE プログラムの文法 (構文論)

WHILE プログラムは再帰的に定義される

1. 変数 x に対して，
   「$x := x + 1$」は WHILE プログラム
2. 変数 x に対して，
   「$x := x - 1$」は WHILE プログラム
3. WHILE プログラム P_1, P_2 に対して，
   「$P_1; P_2$」は WHILE プログラム
4. 変数 x と WHILE プログラム P に対して，
   「WHILE $x \neq 0$ DO P END」は
   WHILE プログラム

WHILE $x_1 \neq 0$ DO
  $x_0 := x_0 + 1;$
  $x_1 := x_1 - 1$
END;
WHILE $x_2 \neq 0$ DO
  $x_0 := x_0 + 1;$
  $x_2 := x_2 - 1$
END

復習：WHILE プログラム (3)：意味論

$\boxed{x := x + 1}$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ増やす

$\boxed{x := x - 1}$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ減らす

x の値が 0 であるとき，x の値を 0 のままにする

$\boxed{P_1; P_2}$

$\rightsquigarrow$ P_1 を実行してから，P_2 を実行する

$\boxed{\texttt{WHILE } x \neq 0 \texttt{ DO } P \texttt{ END}}$

$\rightsquigarrow$ x が 0 でない限り，P の実行を続ける

注

- 変数 $x_1, \ldots, x_k$ は入力の値で初期化される
- その他の変数は 0 で初期化される
- 変数 x_0 が出力を表す

目次

LOOP プログラム (1)

データ型

- 自然数 $0, 1, 2, \ldots$ ($\mathbb{N}$ の要素)

構成要素

変数

- $x_0, x_1, x_2, \ldots$

記号

- $:=$, ;, LOOP, DO, END
- $+1$, -1

LOOP プログラムの例

LOOP x_1 DO
  $x_0 := x_0 + 1$
END;
LOOP x_2 DO
  $x_0 := x_0 + 1$
END

LOOP プログラム (2) : 文法 (構文論)

LOOP プログラムの文法 (構文論)

LOOP プログラムは再帰的に定義される

1. 変数 x に対して,
   「$x := x + 1$」は LOOP プログラム
2. 変数 x に対して,
   「$x := x - 1$」は LOOP プログラム
3. LOOP プログラム P_1, P_2 に対して,
   「$P_1; P_2$」は LOOP プログラム
4. 変数 x と LOOP プログラム P に対して
   (ただし, P の中に x は現れない),
   「LOOP x DO P END」は LOOP プログラム

```
LOOP x_1 DO
   x_0 := x_0 + 1
END;
LOOP x_2 DO
   x_0 := x_0 + 1
END
```

LOOP プログラム (3)：意味論

$\boxed{x := x + 1}$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ増やす

$\boxed{x := x - 1}$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ減らす

x の値が 0 であるとき，x の値を 0 のままにする

$\boxed{P_1; P_2}$

$\rightsquigarrow$ P_1 を実行してから，P_2 を実行する

$\boxed{\texttt{LOOP } x \texttt{ DO } P \texttt{ END}}$

$\rightsquigarrow$ P を x の値の回数だけ実行する

注

- 変数の扱いは WHILE プログラムと同じ

LOOP 計算可能性

部分関数 $f\colon \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$

定義：LOOP 計算可能性

f が LOOP 計算可能であるとは，
次を満たす k 入力 LOOP プログラム P が存在すること

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_k)\downarrow &\quad\Rightarrow\quad P \text{ の出力は } f(x_1,\ldots,x_k) \\ f(x_1,\ldots,x_k)\uparrow &\quad\Rightarrow\quad P \text{ は停止しない} \end{aligned}$$

このとき，P は f を計算するという

先の例より，次の (部分) 関数 $f\colon \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ は LOOP 計算可能

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

目次

GOTO プログラム (1)

データ型

- 自然数 $0, 1, 2, \ldots$ ($\mathbb{N}$ の要素)

構成要素

変数

- $x_0, x_1, x_2, \ldots$

ラベル

- $L_1, L_2, L_3, \ldots,$

記号

- $:=,\ \ = 0,\ ;,\ :,\ \ + 1,\ \ - 1$
- IF, THEN, GOTO, HALT

GOTO プログラムの例

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

GOTO プログラム (2) : 文法 (構文論)

GOTO プログラムの文法 (構文論)

GOTO プログラムは次の形をしている

$$
\begin{array}{l}
L_1\colon\ S_1; \\
L_2\colon\ S_2; \\
\quad\vdots \\
L_n\colon\ S_n
\end{array}
$$

- $L_1, L_2, \ldots, L_n$ はラベル
- $S_1, S_2, \ldots, S_n$ は文 (次のページで定義される)

GOTO プログラム (2) : 文法 (構文論) 続き

GOTO プログラムの文法 (構文論) 続き

GOTO プログラムの文は次のいずれか

1. 変数 x に対して,
   「$x := x + 1$」
2. 変数 x に対して,
   「$x := x - 1$」
3. ラベル L に対して,
   「GOTO L」
4. 変数 x とラベル L に対して,
   「IF $x = 0$ THEN GOTO L」
5. 「HALT」

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

GOTO プログラム (4)：意味論

基本

$\rightsquigarrow$ ラベル $L_1, L_2, \ldots$ の順に文を実行する

$x := x + 1$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ増やす

$x := x - 1$

$\rightsquigarrow$ x の値を 1 だけ減らす

x の値が 0 であるとき，x の値を 0 のままにする

GOTO L

$\rightsquigarrow$ ラベル L に次の実行を移す

IF $x = 0$ THEN GOTO L

$\rightsquigarrow$ x が 0 であるとき，ラベル L に次の実行を移す

HALT

$\rightsquigarrow$ 実行を終了する

注

- 変数の扱いは WHILE プログラム，LOOP プログラムと同じ

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5; ←
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 0$
- $x_1 = 2$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$; ←
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 2$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$; ←
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1; ←
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5; ←
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$; ←
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$; ←
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1; ←
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5; ←
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9; ←
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$; ←
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 1$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$; ←
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5; ←
L_9: HALT

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9; ←
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT ←

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

GOTO プログラム (6)：例の実行

入力 $x_1 = 2, x_2 = 1$ として，実行してみる

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

- $x_0 = 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

$\therefore$ 出力は 3

GOTO 計算可能性

部分関数 $f\colon \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$

定義：GOTO 計算可能性

f が GOTO 計算可能であるとは，
次を満たす k 入力 GOTO プログラム P が存在すること

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_k)\downarrow &\quad\Rightarrow\quad P \text{ の出力は } f(x_1,\ldots,x_k) \\ f(x_1,\ldots,x_k)\uparrow &\quad\Rightarrow\quad P \text{ は停止しない} \end{aligned}$$

このとき，P は f を計算するという

先の例より，次の (部分) 関数 $f\colon \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ は GOTO 計算可能

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

目次

ここからの目標

目標

3 つの「計算可能性」を比較する

- WHILE 計算可能性
- LOOP 計算可能性
- GOTO 計算可能性

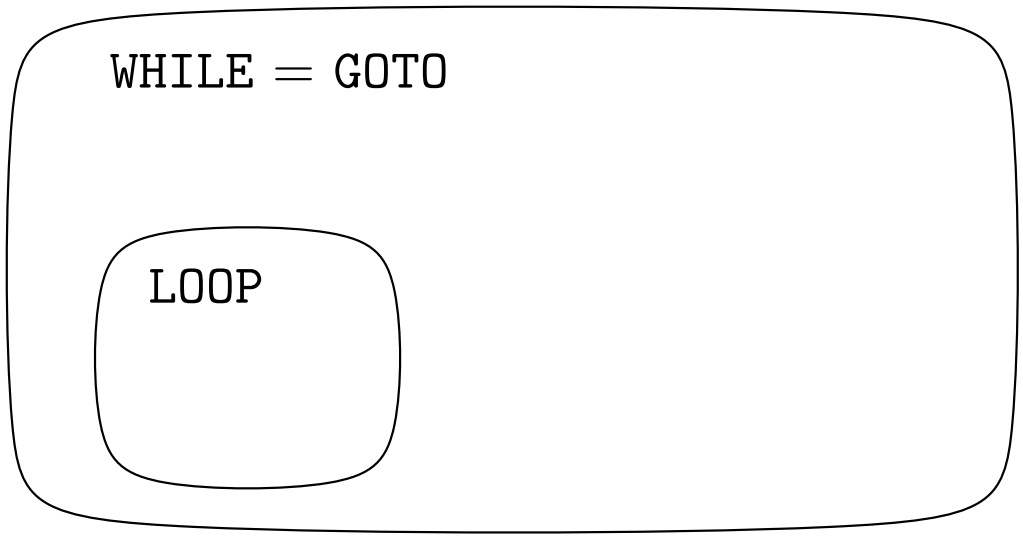
ここからの目標

目標

3 つの「計算可能性」を比較する

- WHILE 計算可能性
- LOOP 計算可能性
- GOTO 計算可能性

先に結論



LOOP 計算可能 $\Rightarrow$ WHILE 計算可能

自然数 k，部分関数 $f\colon \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$

定理 3.1

f が LOOP 計算可能 $\Rightarrow$ f は WHILE 計算可能

証明のアイディア：

- LOOP プログラムを WHILE プログラムに書き換える
- そのためには「LOOP x DO P END」を書き換えれば十分

用語：計算の模倣

LOOP プログラム P を WHILE プログラム P' に書き換えることを
P' で P を模倣するという

模倣 $=$ simulation (シミュレーション)

LOOP 計算可能 $\Rightarrow$ WHILE 計算可能

証明：「LOOP x DO P END」を次のように書き換えればよい □

```
y := x;
WHILE y ≠ 0 DO
    P;
    y := y − 1
END
```

ただし，y はどこにも使われていない変数とする．

注：

- 代入 $y := x$ は糖衣構文なので，
  本来は WHILE プログラムに書き換える必要がある

WHILE 計算可能 $\not\Rightarrow$ LOOP 計算可能

逆は成り立たない

定理 3.2

LOOP 計算可能ではない WHILE 計算可能部分関数が存在する

証明のアイディア：

- 停止しない WHILE プログラムが存在する (前回の例：infloop)
- LOOP プログラムは必ず停止する (今から証明すること)
- ∴ 停止しない WHILE プログラムは LOOP 計算可能ではない

つまり，

- LOOP プログラムでは，全域関数しか計算できない

LOOP プログラムは必ず停止する (1)

補題

LOOP プログラムは必ず停止する
(つまり，LOOP 計算可能な部分関数は 必ず 全域関数である)

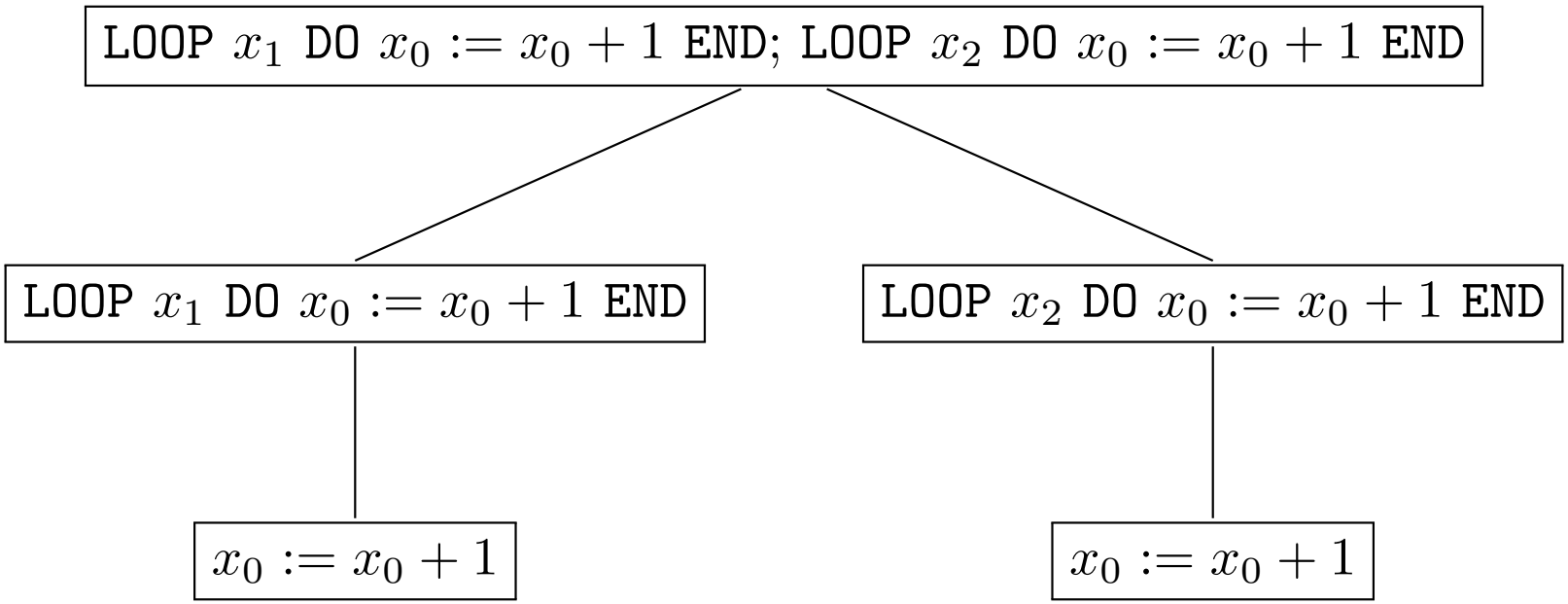
証明のアイディア：構造的帰納法で証明する

LOOP プログラムは必ず停止する (1)

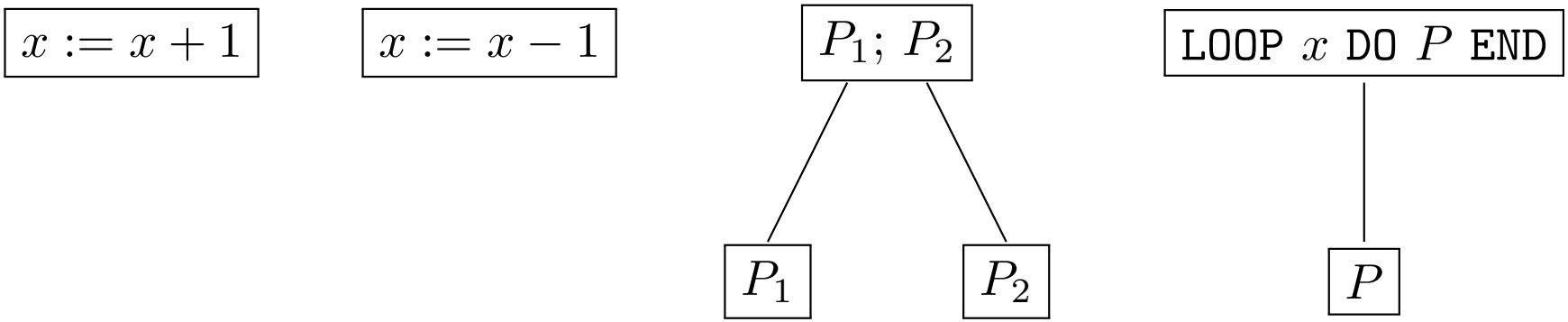
補題

LOOP プログラムは必ず停止する
(つまり，LOOP 計算可能な部分関数は 必ず 全域関数である)

証明のアイディア：構造的帰納法で証明する



LOOP プログラムの構造



LOOP プログラムは必ず停止する (2)

補題の証明：LOOP プログラム P を考える

- P がある変数 x に対して「$x := x + 1$」であるとき，
  x の値を 1 だけ増加して，P は停止する
- P がある変数 x に対して「$x := x - 1$」であるとき，
  x の値を 1 だけ減少して (x の値が 0 のときはそのままにして)，
  P は停止する
- P はある LOOP プログラム P_1, P_2 に対して「$P_1; P_2$」であるとき，
  P_1, P_2 が停止するならば，
  P は P_1 と P_2 を順に実行して停止する
- P がある変数 x と LOOP プログラム P' に対して
  「LOOP x DO P' END 」であるとき，
  P' が停止するならば，
  P は x の値の回数だけ P' を繰り返し実行して停止する

つまり，どの場合でも P は停止する □

目次

GOTO 計算可能 $\Rightarrow$ WHILE 計算可能

自然数 k，部分関数 $f\colon \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$

定理 3.3

f が GOTO 計算可能 $\Rightarrow$ f は WHILE 計算可能

つまり，

- GOTO プログラムを WHILE プログラムに書き換えられる
  (WHILE プログラムで GOTO プログラムを模倣できる)

そのために，糖衣構文を導入する

WHILE プログラムの糖衣構文：条件分岐 (3)

条件分岐の機能

WHILE プログラム P，変数 x に対して，

$$\texttt{IF } x = 0 \texttt{ THEN } P \texttt{ END}$$

と書いて，x の値が 0 であるならば P を実行する機能を実現したい

注：前回の条件分岐では，条件が「$x \neq 0$」だった

```
IF x = 0 THEN
   P
END
```

$\rightsquigarrow$

```
IF x ≠ 0 THEN
   y := y + 1
ELSE
   P
END
```

ただし，y はプログラムに出てこない変数

WHILE プログラムの糖衣構文：条件分岐 (4)

条件分岐の機能

WHILE プログラム P，変数 x に対して，

$$\texttt{IF } x = 2 \texttt{ THEN } P \texttt{ END}$$

と書いて，x の値が 2 であるならば P を実行する機能を実現したい

$$\boxed{\begin{array}{l}\texttt{IF } x = 2 \texttt{ THEN} \\ \quad P \\ \texttt{END}\end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} y := x;\ y' := 1; \\ \texttt{IF } y = 0 \texttt{ THEN } y' := 0 \texttt{ END}; \\ y := y - 1; \\ \texttt{IF } y = 0 \texttt{ THEN } y' := 0 \texttt{ END}; \\ y := y - 1; \\ \texttt{IF } y = 0 \texttt{ THEN} \\ \quad \texttt{IF } y' \neq 0 \texttt{ THEN } P \texttt{ END} \\ \texttt{END}\end{array}}$$

ただし，y, y' はプログラムに出てこない変数

WHILE プログラムの糖衣構文：条件分岐 (5)

条件分岐の機能

WHILE プログラム P_1, P_2，変数 x に対して，

$$\texttt{IF } x = 2 \texttt{ THEN } P_1 \texttt{ ELSE } P_2 \texttt{ END}$$

と書いて，x の値が 2 であるならば P_1 を実行し，
そうでなければ，P_2 を実行する機能を実現したい

IF $x = 2$ THEN
　P_1
ELSE
　P_2 END

$\rightsquigarrow$

$y := 1;$
IF $x = 2$ THEN
　$P_1; y := 0$
END;
IF $y \neq 0$ THEN
　P_2
END

ただし，y はプログラムに出てこない変数

GOTO プログラムを WHILE プログラムに書き換える (1)

GOTO プログラム

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1\colon\ S_1; \\ L_2\colon\ S_2; \\ \quad\vdots \\ L_n\colon\ S_n \end{array}}$$

$\rightsquigarrow$

WHILE プログラム

$$\boxed{\begin{array}{l} y := 1; \\ \texttt{WHILE } y \neq 0 \texttt{ DO} \\ \quad \texttt{IF } y = 1 \texttt{ THEN } P_1 \texttt{ END}; \\ \quad \texttt{IF } y = 2 \texttt{ THEN } P_2 \texttt{ END}; \\ \qquad\vdots \\ \quad \texttt{IF } y = n \texttt{ THEN } P_n \texttt{ END} \\ \texttt{END} \end{array}}$$

y はプログラムに出てこない変数

P_i は，次に説明する通り，S_i から作られる

GOTO プログラムを WHILE プログラムに書き換える (2)

S_i が 「$x := x \pm 1$」 のとき

$\rightsquigarrow$ P_i は「$x := x \pm 1;\ y := y + 1$」

S_i が 「GOTO L_j」 のとき

$\rightsquigarrow$ P_i は「$y := j$」

S_i が「IF $x = 0$ THEN GOTO L_j」 のとき

$\rightsquigarrow$ P_i は「IF $x = 0$ THEN $y := j$ ELSE $y := y + 1$ END」

S_i が「HALT」 のとき

$\rightsquigarrow$ P_i は「$y := 0$」

これで，GOTO プログラムを WHILE プログラムに書き換えられる □

GOTO プログラムを WHILE プログラムに書き換える：例

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

$\rightsquigarrow$

$x_3 := 1$;
WHILE $x_3 \neq 0$ DO
  IF $x_3 = 1$ THEN
    IF $x_1 = 0$ THEN $x_3 := 5$
    ELSE $x_3 := x_3 + 1$ END
  END;
  IF $x_3 = 2$ THEN $x_0 := x_0 + 1$; $x_3 := x_3 + 1$ END;
  IF $x_3 = 3$ THEN $x_1 := x_1 - 1$; $x_3 := x_3 + 1$ END;
  IF $x_3 = 4$ THEN $x_3 := 1$ END;
  IF $x_3 = 5$ THEN
    IF $x_2 = 0$ THEN $x_3 := 9$
    ELSE $x_3 := x_3 + 1$ END
  END;
  IF $x_3 = 6$ THEN $x_0 := x_0 + 1$; $x_3 := x_3 + 1$ END;
  IF $x_3 = 7$ THEN $x_2 := x_2 - 1$; $x_3 := x_3 + 1$ END;
  IF $x_3 = 8$ THEN $x_3 := 5$ END;
  IF $x_3 = 9$ THEN $x_3 := 0$ END
END

WHILE 計算可能 $\Rightarrow$ GOTO 計算可能

自然数 k，部分関数 $f\colon \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$

定理 3.4

f が WHILE 計算可能 $\Rightarrow$ f は GOTO 計算可能

つまり，

- WHILE プログラムを GOTO プログラムに書き換えられる
  (GOTO プログラムで WHILE プログラムを模倣できる)

基本的な考え方

- WHILE プログラムは「;」でつないだ順に実行される
  - 例外は「WHILE $x \neq 0$ DO P END」だけ
- GOTO プログラムは前から順に実行される
  - 例外は「GOTO L」と「IF $x = 0$ THEN GOTO L」だけ

WHILE プログラムを GOTO プログラムに書き換える (1)

WHILE プログラム

$P_1;$
$P_2;$
$\vdots$
P_n

$\rightsquigarrow$

GOTO プログラム

L_1: $S_1;$
L_2: $S_2;$
$\vdots$
$\vdots$
L_m: HALT

$S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ は，次に説明する通り，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ から作られる
(S_i が P_i から作られるわけではない)

WHILE プログラムを GOTO プログラムに書き換える (2)

状況

既に，$P_1, \ldots, P_{i-1}$ から $S_1, \ldots, S_{j-1}$ が作られ，
次に，P_i を処理するときを考える (次のラベルは L_j)

P_i が「$x := x \pm 1$」のとき

$\rightsquigarrow$ L_j: $x := x \pm 1$;

P_i が「WHILE $x \neq 0$ DO P END」のとき

$\rightsquigarrow$ L_j: IF $x = 0$ THEN GOTO L_ℓ;
L_{j+1}: (P を書き換える)
$\vdots$
$L_{\ell-1}$: GOTO L_j;

これで，WHILE プログラムを GOTO プログラムに書き換えられる □

注：WHILE プログラムのシンプルさの恩恵

WHILE プログラムを GOTO プログラムに書き換える：例

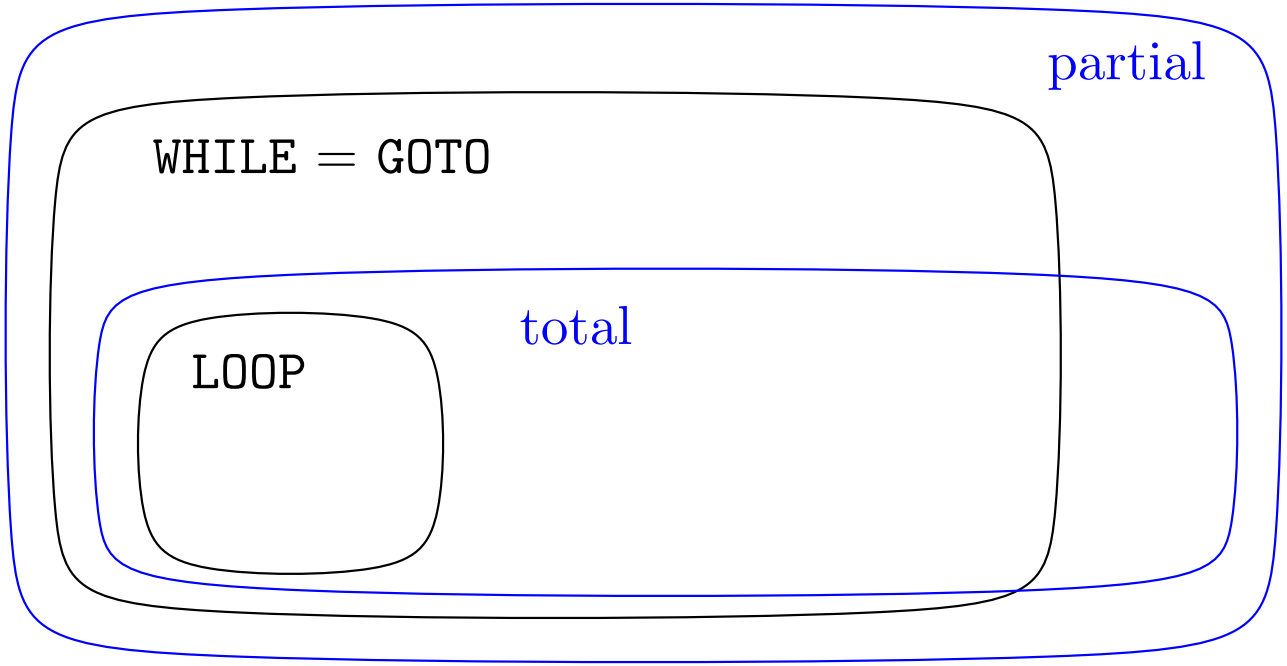
```
WHILE x1 ≠ 0 DO
    x0 := x0 + 1;
    x1 := x1 − 1
END;
WHILE x2 ≠ 0 DO
    x0 := x0 + 1;
    x2 := x2 − 1
END
```

$\rightsquigarrow$

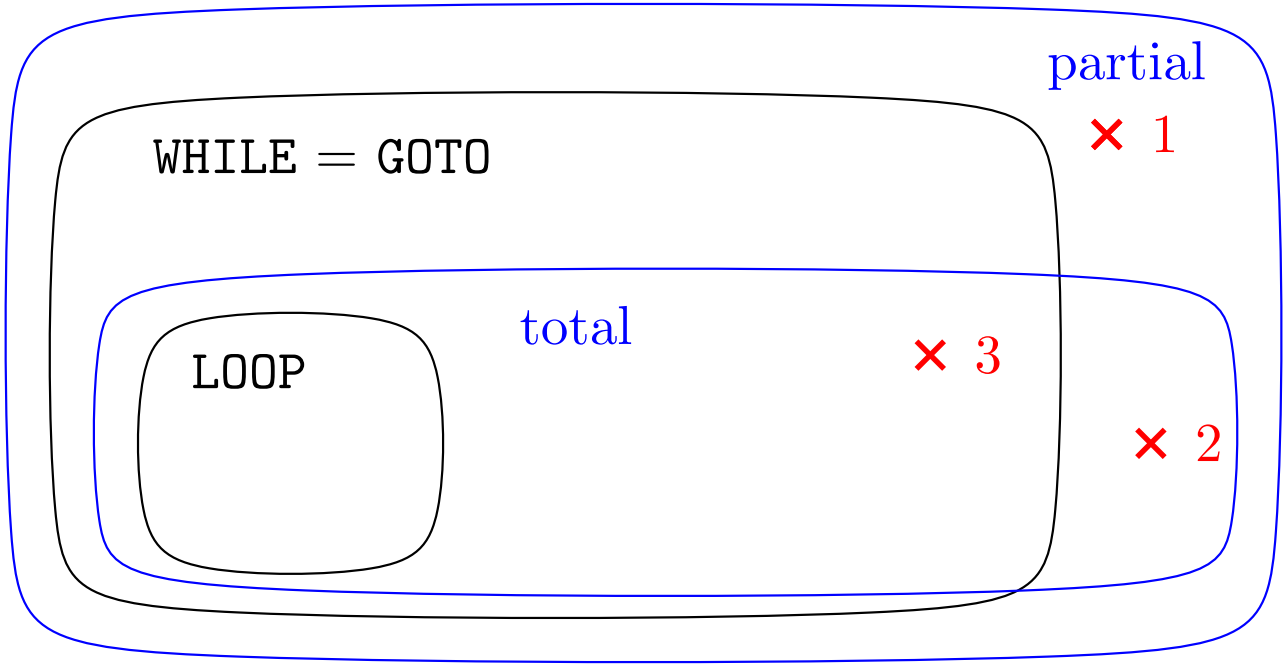
```
L1: IF x1 = 0 THEN GOTO L5;
L2: x0 := x0 + 1;
L3: x1 := x1 − 1;
L4: GOTO L1;
L5: IF x2 = 0 THEN GOTO L9;
L6: x0 := x0 + 1;
L7: x2 := x2 − 1;
L8: GOTO L5;
L9: HALT
```

目次

今日のまとめ：計算可能性の比較



今日のまとめ：計算可能性の比較



疑問

1. WHILE 計算可能でない部分関数はあるか？ 具体例はあるか？
2. WHILE 計算可能でない全域関数はあるか？ 具体例はあるか？
3. LOOP 計算可能でない全域関数はあるか？ 具体例はあるか？

$\rightsquigarrow$ 後の講義で議論

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

「計算可能性が等価である」ことの証明ができるようになる

- 簡単なプログラミング言語をあらたに 2 つ紹介する
  - LOOP プログラム
  - GOTO プログラム
- この 2 つと WHILE プログラムの計算可能性を比較する

重要な概念

- チューリング完全
- 構造的帰納法
- 計算の模倣

次回の予告

- 自然数以外のデータを扱う方法 $\rightsquigarrow$ コード化
- プログラム自体を入力とするプログラム

目次