計算理論　第 1 回
計算とは何か？

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 1 日

最終更新：2020 年 9 月 30 日　16:44

概要

この講義の主題

計算理論 (Theory of Computation)

- 計算可能性理論 (Computability Theory)
- 計算複雑性理論 (計算量理論) (Complexity Theory)

講義の進め方

- 前半：計算可能性理論 (担当：岡本)
- 後半：計算複雑性理論 (担当：垂井先生)

スケジュール 前半 (予定)

1. 計算とは何か？ (10/1)
2. 計算モデル (10/8)
3. チャーチ・チューリングの定立 (10/15)
- ⋆ 休み (体育祭) (10/22)
4. コード化 (10/29)
5. 計算可能性 (11/5)
6. 停止性問題 (11/12)
7. 再帰定理 (11/19)
8. 前半のまとめ (11/26)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/comp/
- 注意：資料の入手等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夕方 18 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/comp/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集

授業の進め方

講義 (85 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

退室 (5 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を Google Forms で提出する
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー (アポイントメントによる)

- 質問など

演習問題

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)

評価

全体の評価

- 前半 (岡本) と後半 (垂井先生) の担当分に対して，別々に評価が行われる
- 別々の評価を合算して，全体の評価とする

前半の評価

1 回のレポート提出のみによる

- 出題形式
  - 4 問の出題が行なわれる
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 25 点満点，計 100 点満点

前半の教科書・参考書

前半の教科書

- 指定しない

前半に関する全般的な参考書

- 鹿島亮,『C 言語による計算の理論』, サイエンス社, 2008.
- 渡辺治,『計算可能性・計算の複雑さ入門』, 近代科学社, 1992.
- Uwe Schöning, Theoretische Informatik – kurz gefasst, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2008.
- Michael Sipser, Introduction to the Theory of Computation, 3rd Edition, Course Technology Ptr. 2012. (第 2 版の日本語訳あり)

など

今日の目標

- 「計算理論の考え方」を概観し，この講義の目標を明確にする
- 部分関数について復習する

ポイント

- 計算という「現象」がある
- 計算は現象なので，科学の対象となる

$\rightsquigarrow$ コンピュータ・サイエンス $=$ 計算という現象に対する科学

注意：計算科学 (computational science) $\neq$ コンピュータ・サイエンス

目次

計算理論 $\neq$ 計算機理論

重要ポイント

「計算理論」は「計算機の理論」ではない

注：「Computer Science」の訳語として「計算機科学」，
「Theoretical Computer Science」の訳語として「理論計算機科学」を充てることがあるけれども，それらが「計算機の科学」であると誤解されることがあるため，この訳語を嫌う専門家もいる

疑問

では,「計算理論」は何を扱うのか？

$\rightsquigarrow$ つまり,「計算機」ではない「計算」とは何なのか？

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad = (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad = (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad = (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad = (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&\quad = (-3)/((-1)\times 15)\\
&\quad = (-3)/(-15)\\
&\quad = 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times 15)\\
&\quad= (-3)/(-15)\\
&\quad= 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times 15)\\
&= (-3)/(-15)\\
&= 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times 15)\\
&= (-3)/(-15)\\
&= 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&= (-3)/((-1)\times 15)\\
&= (-3)/(-15)\\
&= 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8)) \\
&\quad = (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8)) \\
&\quad = (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8)) \\
&\quad = (-3)/((5-6)\times(7+8)) \\
&\quad = (-3)/((-1)\times(7+8)) \\
&\quad = (-3)/((-1)\times 15) \\
&\quad = (-3)/(-15) \\
&\quad = 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times 15)\\
&\quad= (-3)/(-15)\\
&\quad= 1/5
\end{aligned}
$$

いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

人間が行なう計算

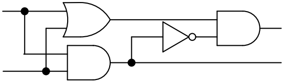
$$
\begin{aligned}
&((1+2)\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(3-4))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (3\times(-1))/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((5-6)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times(7+8))\\
&\quad= (-3)/((-1)\times 15)\\
&\quad= (-3)/(-15)\\
&\quad= 1/5
\end{aligned}
$$

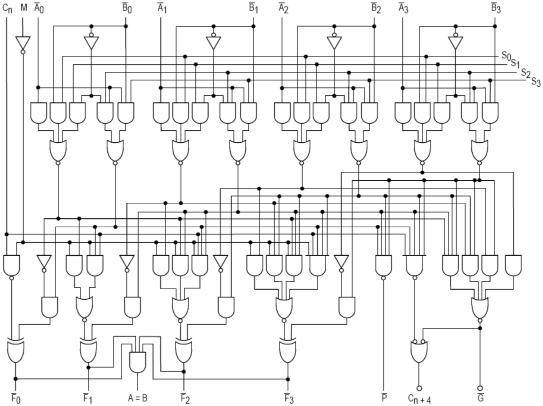
いま，この計算を人間が行なった

事実

人間も計算を行なう

論理回路が行なう計算

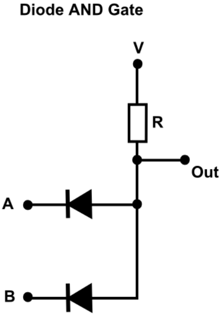


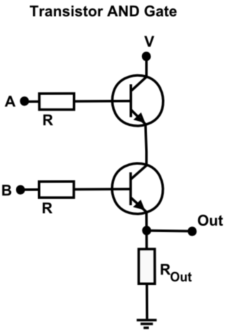


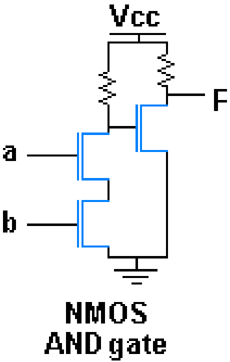
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:74181aluschematic.png

論理素子を電気的な方法で実現する

AND 素子の実現







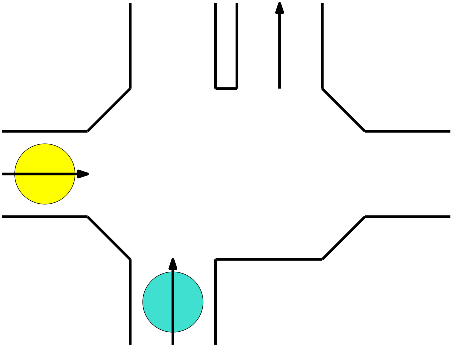
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DiodeANDgate.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TransistorANDgate.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NMOS_AND_gate.png

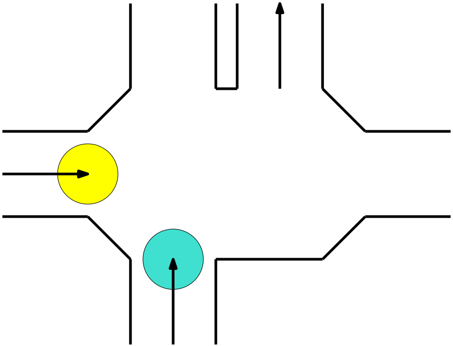
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



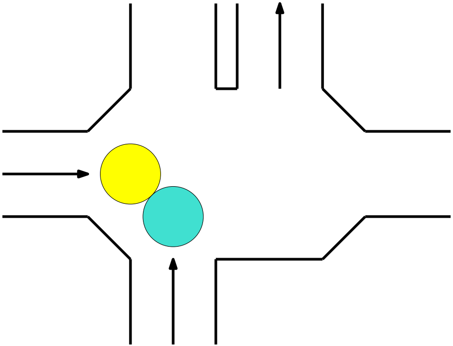
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



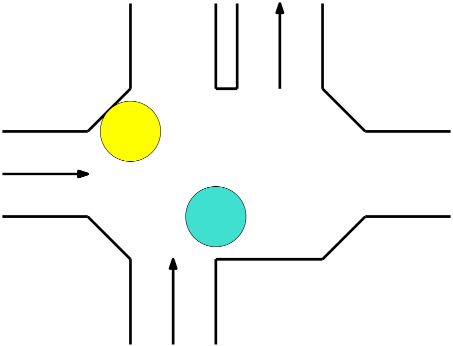
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



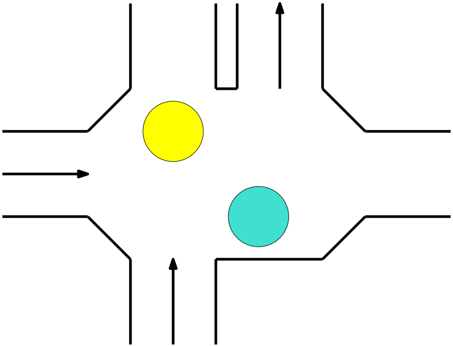
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



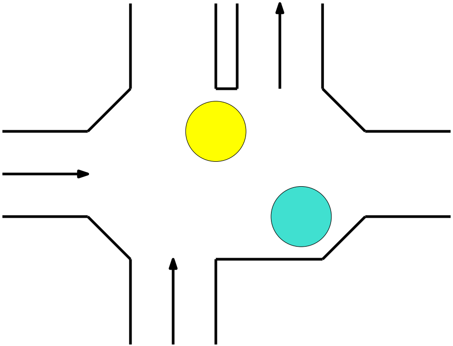
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



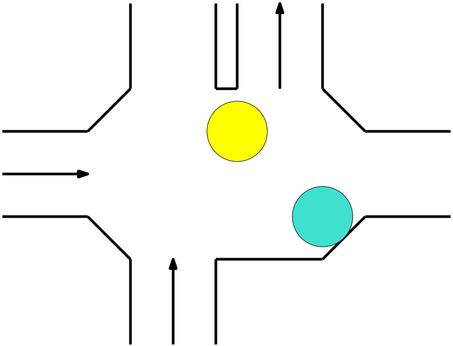
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



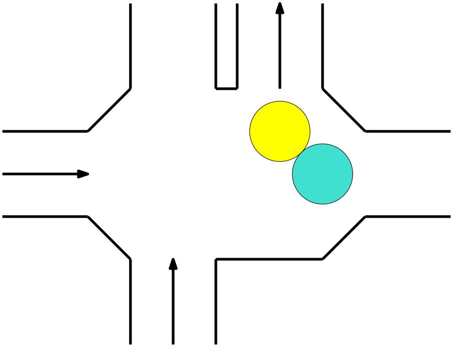
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



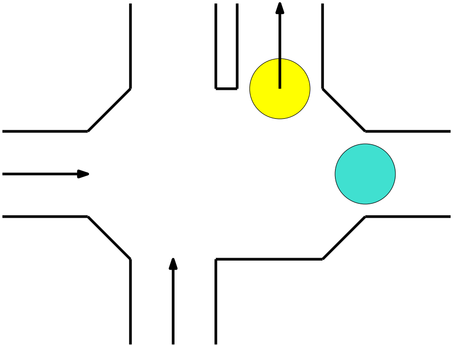
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



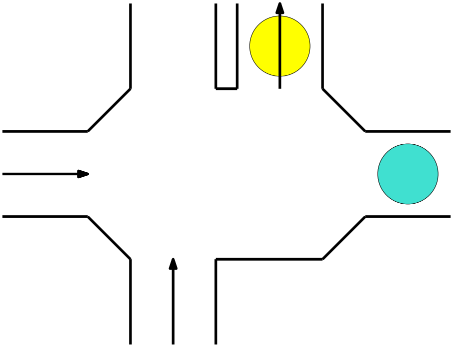
論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現



論理素子を力学的な方法で実現する

AND 素子の実現

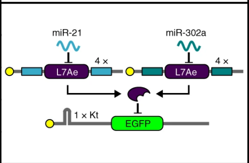


論理素子を物質的 (生命的) な方法で実現する

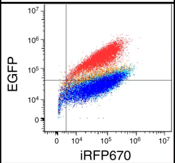
AND 素子の実現

Gate	Truth table		
	miR-21	miR-302a	Output
AND	0	0	0
	1	0	0
	0	1	0
	1	1	1

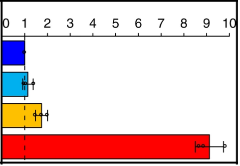
Circuit design



Scatter plot



EGFP/iRFP670 [a.u]



S. Matsuura, H. Ono, S. Kawasaki, Y. Kuang, Y. Fujita, H. Saito, Synthetic RNA-based logic computation in mammalian cells. Nature Communications 9 Article No. 4847 (2018)

論理素子をゲームで実現する

https://www.youtube.com/watch?v=VEcmaXwjwuY

https://www.youtube.com/watch?v=jx59oHXdXBU

計算を理解するために必要な理論

ここまでのまとめ

- 計算機だけが計算を行なうわけではない
- 様々な対象が計算を行なえる

求められるのは？

- 結局「計算」とは何なのか？ はっきりさせること
- 「計算」について抽象的に語るための理論体系を作ること

$\rightsquigarrow$ 計算理論

計算が行なっていること

計算が行なっていること (直感的な説明)

- 何か入力 (初期状態) が与えられる
- 入力 (初期状態) が時間とともに処理される (変化する)
- 最終的に，出力 (終了状態) が得られる

時間とともに処理される (変化する) = 計算する

入力 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{処理}}$ $\longrightarrow$ 出力

アルゴリズムとは？ (直感的な定義)

処理の手順のこと

「どのような手順が許されるのか」ということは重要

「計算」と「計算機」の理解 — カリキュラムにおける位置づけ

抽象度	講義名
高	プログラミング言語論，計算理論
	アルゴリズム論第一，アルゴリズム論第二
	形式言語理論，プログラミング通論
	オペレーティング・システム論，言語処理系論
	計算機通論，コンピュータ設計論
	論理設計学
低	電気・電子回路

位置づけに異論はあるかもしれない

目次

講義『計算理論』の概要

よく議論される計算モデル

- 「万能」な計算モデル　(← 普通の「計算理論」の対象)
- 「具体的」な計算モデル

- 「万能」の定義は，後の講義で紹介
- 「万能 $\neq$ なんでもできる」なので，注意

「万能」な計算モデルに対する 2 つの主な理論

計算可能性理論

- 「万能」な計算モデルで原理的にできることは何か？
- 「万能」な計算モデルで原理的にできないことは何か？

計算複雑性理論 (計算量理論)

- 「万能」な計算モデルで実用的にできることは何か？
- 「万能」な計算モデルで実用的にできないことは何か？

計算可能性理論 (Computability Theory)

計算可能性理論

- 「万能」な計算モデルで原理的にできることは何か？
- 「万能」な計算モデルで原理的にできないことは何か？

ここで「原理的にできる」とは？

- アルゴリズムが存在する

重要な事実

原理的にできないことが存在する

前半の目標

- 何が原理的にできないのか，理解する
- なぜ原理的にできないのか，理解する

計算複雑性理論 (計算量理論，computational complexity theory) (1)

計算複雑性理論 (計算量理論)

- 「万能」な計算モデルで実用的にできることは何か？
- 「万能」な計算モデルで実用的にできないことは何か？

ここで「実用的にできる」とは？

- 文脈に依存する ($\rightsquigarrow$ 計算における資源の概念)
- 多くの場合,「多項式時間で」できる

後半の目標 (1)

- 計算における「資源」の概念を理解する

計算複雑性理論 (計算量理論，computational complexity theory) (2)

計算複雑性理論 (計算量理論)

- 「万能」な計算モデルで実用的にできることは何か？
- 「万能」な計算モデルで実用的にできないことは何か？

重要な事実

- 原理的にできるが，実用的にできないことが存在する
- よく現れる問題が，実用的に解けるかどうか分かっていない
  $\rightsquigarrow$ P vs NP 問題 (P $\neq$ NP 問題，P $=?$ NP 問題)

後半の目標 (2)

- 「P vs NP 問題」とは何なのか，理解する

目次

計算モデル

計算モデルとは？ (直感的な定義)

「計算主体」を数学的に抽象化したもの

大きく分けて 2 つの種類のモデルがある

- 「機械」によるモデル
- 「関数」によるモデル

注意 (重要)

- 計算モデルによって，異なる計算理論が生まれる
  - しかし，計算可能性理論 (の本質) はあまり変わらない
  - しかし，計算複雑性理論 (の本質) は大きく変わりうる

(変わる部分と変わらない部分がある)

「機械」による計算モデル

代表的なもの

- チューリング機械
- ランダム・アクセス機械
- カウンタ機械
- ポインタ機械
- タグ・システム

計算を機械における操作であると見なして，抽象化する

「関数」による計算モデル

代表的なもの

- 帰納的関数 (μ 再帰関数)
- ラムダ計算
- マルコフ・アルゴリズム

計算を関数の適用であると見なして，抽象化する

この講義の前半で扱う計算モデル

この講義 (の前半) では

- ある「単純化したプログラミング言語」を計算モデルとして用いる
  $\rightsquigarrow$ 次回
- 計算というときは,
  自然数の組を自然数にうつす部分関数の計算を考察対象とする
  $\rightsquigarrow$ 今日の残り時間

プログラミング言語も計算モデルであると言えるが
それが「機械」か「関数」か，という分類は難しい

目次

自然数

自然数 (直感的な定義)

0 以上の整数を**自然数**と呼ぶ

注

- 自然数を「厳密」に定義することは重要であり，
情報科学や数学の基礎でもあるが，ここではやらない
- 数学 (特に数論) では，1 以上の整数を自然数と定義することが多い
(分野によって用語の定義は異なる可能性がある)

記法：自然数全体の集合

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す

「〇〇全体の集合」とは「〇〇をすべて集めてできる集合」という意味

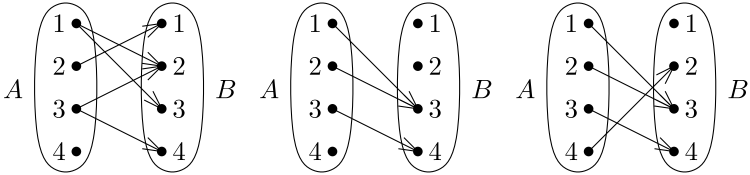
関数 (1)

集合 A, B

定義：関数

$f \subseteq A \times B$ が A から B への**関数**であるとは

任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に存在して，
$(a, b) \in f$ となること



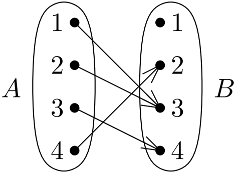
関数 (2)

集合 A, B，A から B への関数 f

定義：関数の値

$(a, b) \in f$ であるとき，b を a における f の値と呼び，b を $f(a)$ と書く

関数の記法：$f \colon A \to B$



- $f(1) = 3$
- $f(2) = 3$
- $f(3) = 4$
- $f(4) = 2$

A を f の始域，B を f の終域と呼ぶ

記法：関数全体の集合

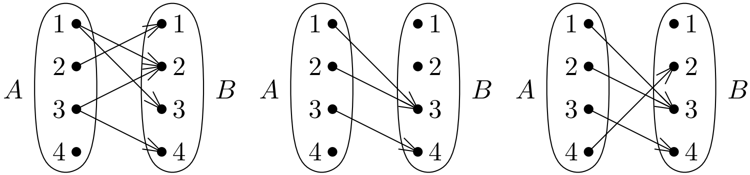
A から B への関数全体の集合を B^A と書く

部分関数 (1)

集合 A, B

定義：部分関数

$f \subseteq A \times B$ が A から B への**部分関数**であるとは
任意の $a \in A$ に対して，$(a, b) \in f$ となる $b \in B$ が
存在しないか，存在するとしてもただ 1 つであること



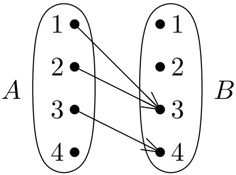
部分関数 (2)

集合 A, B，A から B への部分関数 f

定義：部分関数の値

$(a, b) \in f$ であるとき，b を a における f の値と呼び，b を $f(a)$ と書く

部分関数の記法：$f \colon A \nrightarrow B$　　(この講義ではこれを採用)



- $f(1) = 3$
- $f(2) = 3$
- $f(3) = 4$

部分関数の記法は他にもいろいろある (統一的な記法が見当たらない)

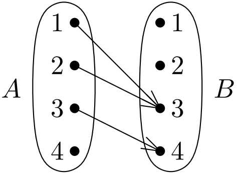
部分関数 (3)

集合 A, B，部分関数 $f\colon A \nrightarrow B$

記法：定義されているかされていないか

$a \in A$ に対して，

- $b = f(a)$ となる $b \in B$ が存在することを，　$f(a)\downarrow$ と書く
- $b = f(a)$ となる $b \in B$ が存在しないことを，$f(a)\uparrow$ と書く
  (このとき，$f(a)$ は定義されない，と言うことがある)



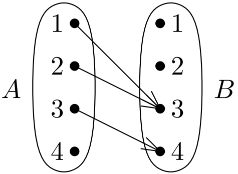
- $f(1)\downarrow$
- $f(2)\downarrow$
- $f(3)\downarrow$
- $f(4)\uparrow$

部分関数 (4)

集合 A, B，部分関数 $f\colon A \nrightarrow B$

定義：定義域

f の定義域とは，$\mathrm{dom}(f) = \{a \in A \mid f(a)\downarrow\}$



- $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2, 3\}$

性質 (演習問題)

部分関数 $f\colon A \nrightarrow B$ に対して

$$f \text{ が関数} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dom}(f) = A$$

部分関数と対比させて，関数のことを全域関数と呼ぶことがある

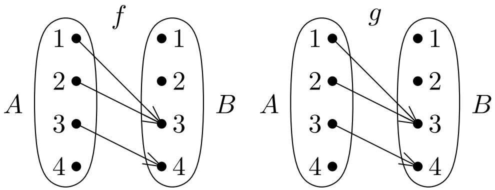
2 つの部分関数が等しいこと

集合 A, B，部分関数 $f, g\colon A \nrightarrow B$

定義：2 つの部分関数が等しいこと

任意の $a \in A$ に対して，次のどちらかが成り立つとき，
f と g は等しいといい，$f = g$ と書く

1. $f(a)\downarrow$，かつ，$g(a)\downarrow$，かつ，$f(a) = g(a)$
2. $f(a)\uparrow$，かつ，$g(a)\uparrow$



目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

- 「計算理論の考え方」を概観し，この講義の目標を明確にする
- 部分関数について復習する

次回の予告

- この講義で扱う計算モデルを導入する

目次