計算理論　第 6 回
停止性問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 12 日

最終更新：2020 年 11 月 16 日　00:09

概要

この講義の主題

計算理論 (Theory of Computation)

- 計算可能性理論　(Computability Theory)
- 計算複雑性理論 (計算量理論)　(Complexity Theory)

講義の進め方

- 前半：計算可能性理論 (担当：岡本)
- 後半：計算複雑性理論 (担当：垂井先生)

スケジュール 前半 (予定)

1. 計算とは何か？　(10/1)
2. 計算モデル　(10/8)
3. チャーチ・チューリングの定立　(10/15)
- ⋆ 休み (体育祭)　(10/22)
4. コード化　(10/29)
5. 計算可能性　(11/5)
6. 停止性問題　(11/12)
7. 再帰定理　(11/19)
8. 前半のまとめ　(11/26)

注意：予定の変更もありうる

前回の話し と 今日の話

前回の話：この講義のハイライト (1)

- WHILE 計算不可能な部分関数が存在することの証明 (対角線論法)
- 万能プログラム (インタプリタ) の設計

今日の話：この講義のハイライト (2)

- WHILE 計算不可能な「意義深い」関数の具体例　(停止性)
- プログラムの性質を問う関数の WHILE 計算不可能性
  - s-m-n 定理の利用

目次

(復習) 万能関数

前回，万能関数を考察した

万能関数とは $\mathtt{univ}\colon \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ で，

$$\mathtt{univ}(x_1, x_2) = \begin{cases} P(a_1, a_2, \ldots, a_k) & (x_1, x_2 \text{ が } \boxed{\text{条件 } *} \text{ を満たすとき}) \\ \text{定義されない} & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{条件 } *}$

- ある自然数 k に対して
  x_1 が k 入力 GOTO プログラム P のコードであり，
  x_2 が長さ k のリスト $a = (a_1, \ldots, a_k)$ のコードであり，
  P に a を入力したときに，P が停止する

前回，証明したこと

万能関数 univ は WHILE 計算可能

停止性関数

定義：停止性関数

停止性関数 (停止関数) とは $\mathtt{isHalting}\colon \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ で，

$$\mathtt{isHalting}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1, x_2 \text{ が } \boxed{\text{条件 } *} \text{ を満たすとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{条件 } *}$

- ある自然数 k に対して
  x_1 が k 入力 GOTO プログラム P のコードであり，
  x_2 が長さ k のリスト $a = (a_1, \ldots, a_k)$ のコードであり，
  P に a を入力したときに，P が停止する

定義：停止性問題

プログラム P が停止性関数を計算するとき，
P は停止性問題 (停止問題) を解くという

停止性関数の計算不可能性

定理

停止性関数 isHalting は WHILE 計算不可能である

証明：isHalting が WHILE 計算可能であると仮定する

- isHalting を用いて，次の 1 入力 WHILE プログラム Q を作れる

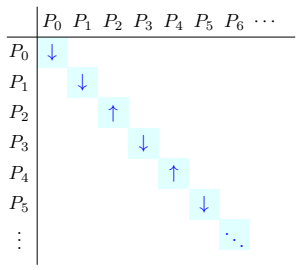
```
x_2 := isHalting(x_1, x_1);
IF x_2 = 0
  THEN x_0 := 0
  ELSE infloop(x_1)
END
```

- Q は次の部分関数 $g\colon \mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$ を計算する

$$g(x_1) = \begin{cases} 0 & (\mathtt{isHalting}(x_1, x_1) = 0 \text{ のとき}) \\ \text{定義されない} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

停止性関数の計算不可能性：イメージ

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	$\cdots$
P_0	0	1	0	0	1	1	0	$\cdots$
P_1	0	0	1	0	0	1	0	$\cdots$
P_2	1	0	1	1	0	0	1	$\cdots$
P_3	0	0	0	0	1	0	1	$\cdots$
P_4	1	0	0	0	1	1	0	$\cdots$
P_5	0	0	1	0	1	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$



↑ $\mathtt{isHalting}(\mathsf{enc}(P_i), \mathsf{enc}(P_j))$　　$g(\mathsf{enc}(P_i))$ ↑

停止性関数の計算不可能性 (続き)

- ここで，$x_1 = \mathsf{enc}(Q)$ とすると
  - $\mathtt{isHalting}(\mathsf{enc}(Q), \mathsf{enc}(Q)) = 0$
    $\Leftrightarrow g(\mathsf{enc}(Q)) \downarrow$　　(g の定義)
    $\Leftrightarrow Q$ に $\mathsf{enc}(Q)$ を入力できて，停止する　　(Q と g の対応)
    $\Leftrightarrow \mathtt{isHalting}(\mathsf{enc}(Q), \mathsf{enc}(Q)) = 1$　　($\mathtt{isHalting}$ の定義)
- つまり，矛盾が導かれる　□

停止万能関数の計算不可能性

次の関数 $\mathtt{univ}' \colon \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ を考える

$$\mathtt{univ}'(x_1, x_2) = \begin{cases} P(a_1, \ldots, a_k) + 1 & (x_1, x_2 \text{ が } \boxed{\text{条件 } *} \text{ を満たすとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{条件 } *}$

- ある自然数 k に対して
  x_1 が k 入力 GOTO プログラム P のコードであり，
  x_2 が長さ k のリスト $a = (a_1, \ldots, a_k)$ のコードであり，
  P に a を入力したときに，P が停止する

定理

関数 $\mathtt{univ}'$ は WHILE 計算不可能である

証明のアイディア：$\mathtt{univ}'$ が計算できると，$\mathtt{isHalting}$ も計算できる
(つまり矛盾)

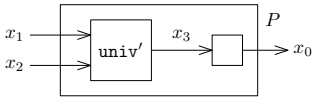
停止万能関数の計算不可能性：証明

証明：$\mathtt{univ}'$ が計算できると仮定する

- このとき，次の 2 入力 WHILE プログラム P を構成できる

  $x_3 := \mathtt{univ}'(x_1, x_2);$
  IF $x_3 = 0$ THEN $x_0 := 0$ ELSE $x_0 := 1$ END

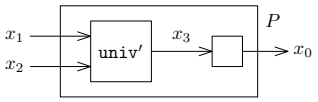
- P は $\mathtt{isHalting}$ を計算する
  - $P(x_1, x_2)$ の出力が 0
    $\Leftrightarrow \mathtt{univ}'(x_1, x_2) = 0$
    $\Leftrightarrow x_1, x_2$ が $\boxed{\text{条件 } *}$ を満たさない
    $\Leftrightarrow \mathtt{isHalting}(x_1, x_2) = 0$　□



使っている手法：帰着 (還元)

$\mathtt{univ}'$ の計算不可能性の証明では次の手法を使っている

- $\mathtt{univ}'$ の計算をすることで，$\mathtt{isHalting}$ の計算をする
- $\mathtt{isHalting}$ の計算をするために，$\mathtt{univ}'$ の計算を使う



これを次のように言うことがある

- $\mathtt{isHalting}$ を $\mathtt{univ}'$ に帰着 (還元) する

目次

s-m-n 定理

目標

いろいろな (部分) 関数が WHILE 計算不可能であることを証明する

そのための道具として「s-m-n 定理」を用いる

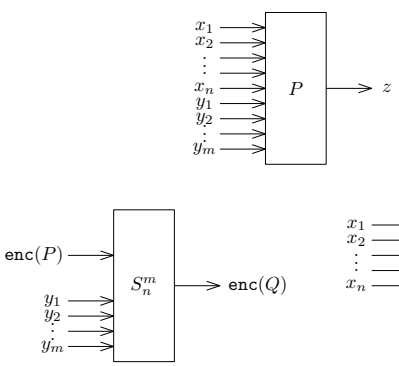
s-m-n 定理

任意の自然数 m, n に対して，
次の性質を持つ $(m+1)$ 変数 WHILE 計算可能関数 $S_n^m \colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ が存在

1. 任意の自然数 $e, y_1, \ldots, y_m$ に対して
   $S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ は n 入力 GOTO プログラムのコードである
2. 任意の自然数 $e, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ に対して
   $\mathtt{univ}(S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m), \mathsf{enc}((x_1, \ldots, x_n)))$
   $= \mathtt{univ}(e, \mathsf{enc}((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)))$

s-m-n 定理：イメージ

$e = \mathsf{enc}(P)$ とする



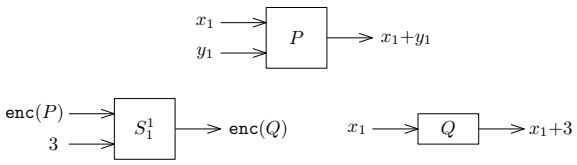
s-m-n 定理：イメージの例

- プログラム P が $\mathtt{add}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を計算するとする

  $\mathtt{add}(x_1, y_1) = x_1 + y_1$

- $S_1^1(\mathsf{enc}(P), 3)$ は次の関数 $\mathtt{add}_3$ を計算するプログラム Q のコード

  $\mathtt{add}_3(x_1) = x_1 + 3$



s-m-n 定理：証明のイメージ

add を計算するプログラム

L_1: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_0 := x_0 + 1$;
L_3: $x_1 := x_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_2 := x_2 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: HALT

$S_1^1(\mathsf{enc}(\mathtt{add}), y_1)$ をコードとするプログラム

L_1: IF $y_1 = 0$ THEN GOTO L_5;
L_2: $x_2 := x_2 + 1$;
L_3: $y_1 := y_1 - 1$;
L_4: GOTO L_1;
L_5: IF $x_1 = 0$ THEN GOTO L_9;
L_6: $x_0 := x_0 + 1$;
L_7: $x_1 := x_1 - 1$;
L_8: GOTO L_5;
L_9: IF $x_2 = 0$ THEN GOTO L_{13};
L_{10}: $x_0 := x_0 + 1$;
L_{11}: $x_2 := x_2 - 1$;
L_{12}: GOTO L_9;
L_{13}: HALT

目次

全域性問題の計算不可能性

定義：全域性関数

全域性関数とは $\mathtt{isTotal}\colon \mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$ で，

$$\mathtt{isTotal}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が全域関数を計算する GOTO プログラムの} \\ & \quad \text{コードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

証明すること

関数 isTotal は WHILE 計算可能ではない

証明：WHILE 計算可能であると仮定して矛盾を導く

全域性関数の計算不可能性：s-m-n 定理の利用

- 次の 2 入力プログラム P を考える

  $\mathtt{univ}(x_1, x_2)$

- 次の 2 入力プログラム Q を考える

  $x_3 := S_0^2(\mathsf{enc}(P), x_1, x_2)$;
  $x_4 := \mathtt{isTotal}(x_3)$;
  IF $x_4 = 0$ THEN $x_0 := 0$ ELSE $x_0 := 1$ END

- このとき，Q は isHalting を計算する
  - $\because$ Q の出力が 1
    - $\Leftrightarrow \mathtt{isTotal}(x_3) = 1$
    - $\Leftrightarrow$ $S_0^2(\mathsf{enc}(P), x_1, x_2)$ をコードとするプログラムは全域関数を計算する
    - $\Leftrightarrow$ $\mathtt{univ}(x_1, x_2)$ の計算が停止する
    - $\Leftrightarrow \mathtt{isHalting}(x_1, x_2) = 1$ □

2 倍判定問題の計算不可能性

次の 1 変数関数 $\mathtt{double}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を考える

$\mathtt{double}(x_1) = 2x_1$

そして，次の 1 変数関数 $\mathtt{isDouble}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を考える

$$\mathtt{isDouble}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が double を計算するプログラムの} \\ & \quad \text{コードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}) \end{cases}$$

証明すること

関数 isDouble は WHILE 計算可能ではない

証明：WHILE 計算可能であると仮定して矛盾を導く

2 倍判定問題の計算不可能性：s-m-n 定理の利用

- 次の 3 入力プログラム P を考える

  $\mathtt{univ}(x_1, x_2)$; $x_0 := \mathtt{double}(x_3)$

- 次の 2 入力プログラム Q を考える

  $x_4 := S_1^2(\mathsf{enc}(P), x_1, x_2)$;
  $x_5 := \mathtt{isDouble}(x_3)$;
  IF $x_5 = 0$ THEN $x_0 := 0$ ELSE $x_0 := 1$ END

- このとき，Q は isHalting を計算する
  - $\because$ Q の出力が 1
    - $\Leftrightarrow \mathtt{isDouble}(x_4) = 1$
    - $\Leftrightarrow$ $S_1^2(\mathsf{enc}(P), x_1, x_2)$ をコードとするプログラムは double を計算する
    - $\Leftrightarrow$ $\mathtt{univ}(x_1, x_2)$ の計算が停止する
    - $\Leftrightarrow \mathtt{isHalting}(x_1, x_2) = 1$ □

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の話：この講義のハイライト (2)

- WHILE 計算不可能な「意義深い」関数の具体例 (停止性)
- プログラムの性質を問う関数の WHILE 計算不可能性
  - s-m-n 定理の利用

次回の予告

- 再帰定理：WHILE プログラムで再帰を実現する方法
- 再帰定理の応用