

提出締切：2020年11月19日13:00

注意：プログラムを設計する際、自ら定義した糖衣構文を用いても構わない。しかし、その場合、用いた糖衣構文がどのようなプログラムへ置換されるか、必ず述べること。

復習問題 6.1 部分関数 $\text{isHalting}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。

$$\text{isHalting}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1, x_2 \text{ が次の条件 } * \text{ を満たすとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

ただし、条件 * は次のように記述される。

ある自然数 k に対して、 x_1 が k 入力 GOTO プログラム P のコードであり、 x_2 が長さ k のリスト $a = (a_1, \dots, a_k)$ のコードであり、 P に a を入力したときに、 P が停止する。

部分関数 isHalting が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。

復習問題 6.2 次の部分関数 $\text{univ}': \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える

$$\text{univ}'(x_1, x_2) = \begin{cases} P(a_1, \dots, a_k) + 1 & (x_1, x_2 \text{ が } \boxed{\text{条件 } *} \text{ を満たすとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

ただし、条件 * は問 6.1 に書かれているものである。

部分関数 univ' が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。

復習問題 6.3 部分関数 $\text{isTotal}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。

$$\text{isTotal}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が全域関数を計算する GOTO プログラムのコードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

部分関数 isTotal が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。(ヒント：s-m-n 定理を用いてもよい。)

復習問題 6.4 次の部分関数 $\text{double}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。

$$\text{double}(x_1) = 2x_1.$$

そして、部分関数 $\text{isDouble}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。

$$\text{isDouble}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が } \text{double} \text{ を計算する GOTO プログラムのコードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

部分関数 isDouble が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。(ヒント：s-m-n 定理を用いてもよい。)

追加問題 6.5 次の部分関数 $\text{add}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。

$$\text{add}(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

そして、部分関数 $\text{isAdd}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。

$$\text{isAdd}(x_1) = \begin{cases} 1 & (x_1 \text{ が } \text{add} \text{ を計算する GOTO プログラムのコードであるとき}) \\ 0 & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

部分関数 isAdd が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。(ヒント：s-m-n 定理を用いてもよい。)

追加問題 6.6 部分関数 $\text{isEqual}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。

$$\text{isEqual}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1, x_2 \text{ が同じ部分関数を計算する GOTO プログラムのコードである}) \\ 0 & (\text{そうではない}). \end{cases}$$

部分関数 $\text{isEqual}(x_1, x_2)$ が WHILE 計算不可能であることを証明せよ。(ヒント：s-m-n 定理を用いてもよいが、用いなくてもよい。)