

提出締切：2020年11月12日13:00

注意：プログラムを設計する際、自ら定義した糖衣構文を用いても構わない。しかし、その場合、用いた糖衣構文がどのようなプログラムへ置換されるか、必ず述べること。

復習問題 5.1 WHILE 計算可能ではない部分関数が存在することを証明せよ。

復習問題 (発展) 5.2 次の部分関数 $\text{univ}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、

$$\text{univ}(x_1, x_2) = \begin{cases} P(a_1, a_2, \dots, a_k) & (\text{下の条件 } * \text{ を満たすとき}) \\ \text{定義されない} & (\text{そうではないとき}). \end{cases}$$

ここで、条件 * とは、「ある自然数 k に対して、 x_1 が k 入力 GOTO プログラム P のコードであり、 x_2 が長さ k のリスト $a = (a_1, \dots, a_k)$ のコードであり、 P に a を入力したときに、 P が停止する」というものである。

部分関数 univ が WHILE 計算可能であることを証明せよ。

追加問題 5.3 WHILE 計算可能ではない全域関数が存在することを証明せよ。

追加問題 5.4 自然数全体の集合 \mathbb{N} の冪集合 (つまり、 \mathbb{N} の部分集合全体の集合) を $2^{\mathbb{N}}$ で表す。このとき、単射 $f: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ が存在しないことを証明せよ。