

提出締切：2020年11月5日13:00

注意：プログラムを設計する際、自ら定義した糖衣構文を用いても構わない。しかし、その場合、用いた糖衣構文がどのようなプログラムへ置換されるか、必ず述べること。

復習問題 4.1 次の関数 $\pi: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。

$$\pi(a, b) = \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) + b.$$

この関数が WHILE 計算可能であることを証明せよ。

復習問題 4.2 問 4.1 で定義された関数 π に対して、 $\pi(a, b)$ の値から a を与える関数 $\text{fst}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、 $\pi(a, b) = p$ であるとき、 $\text{fst}(p) = a$ と定義する。(そのような fst が存在することは、 π が全単射であることから導けるが、それをここでは問わない。) この関数 fst が WHILE 計算可能であることを証明せよ。

復習問題 4.3 問 4.1 で定義された関数 π に対して、 $\pi(a, b)$ の値から b を与える関数 $\text{snd}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、 $\pi(a, b) = p$ であるとき、 $\text{snd}(p) = b$ と定義する。(そのような snd が存在することは、 π が全単射であることから導けるが、それをここでは問わない。) この関数 snd が WHILE 計算可能であることを証明せよ。

復習問題 4.4 自然数のリスト全体の集合を \mathbb{N}^* とする。関数 $\text{enc}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ を再帰的に定義する。

$$\text{enc}((a_1, \dots, a_n)) = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \pi(a_1 + 1, \text{enc}((a_2, \dots, a_{n-1}))) & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし、 π は問 4.1 で定義された関数である。この関数 enc が単射であることを証明せよ。

復習問題 4.5 関数 $\text{enc}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ は問 4.4 で定義されるとする。このとき、関数 $\text{isList}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。すなわち、あるリスト $a \in \mathbb{N}^*$ に対して $\text{enc}(a) = x_1$ であれば、 $\text{isList}(x_1) = 1$ とし、そうでなければ $\text{isList}(x_1) = 0$ とする。このとき、 isList は WHILE 計算可能であることを証明せよ。

復習問題 4.6 関数 $\text{enc}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ は問 4.4 で定義されるとする。このとき、部分関数 $\text{len}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。すなわち、あるリスト $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ に対して $\text{enc}(a) = x_1$ であれば、 $\text{len}(x_1) = n$ とし、そうでなければ $\text{len}(x_1) \uparrow$ とする。このとき、 len は WHILE 計算可能であることを証明せよ。

復習問題 4.7 関数 $\text{enc}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ は問 4.4 で定義されるとする。このとき、部分関数 $\text{elem}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。すなわち、あるリスト $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ に対して $\text{enc}(a) = x_1$ であり、 $1 \leq x_2 \leq n$ であるとき、 $\text{elem}(x_1, x_2) = a_{x_2}$ とし、そうでなければ $\text{elem}(x_1, x_2) \uparrow$ とする。このとき、 elem は WHILE 計算可能であることを証明せよ。

補足問題 4.8 問 4.1 で定義された関数 π が単射であることを証明せよ。(ヒント： $\pi(a_1, b_1) = \pi(a_2, b_2)$ であると仮定するとき、まず、 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ が成り立つことを証明せよ。)

補足問題 4.9 関数 $\text{enc}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ は問 4.4 で定義されるとする。このとき、部分関数 $\text{replace}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する。すなわち、あるリスト $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ に対して $\text{enc}(a) = x_1$ であり、 $1 \leq x_2 \leq n$ であるとき、 $\text{elem}(x_1, x_2, x_3) = \text{enc}((a_1, \dots, a_{i-1}, x_3, a_{i+1}, \dots, a_n))$ とし、そうでなければ $\text{elem}(x_1, x_2) \uparrow$ とする。このとき、 elem は WHILE 計算可能であることを証明せよ。

補足問題 4.10 次の関数 $\text{isProg}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。すなわち、 x_1 が GOTO プログラムのコードであるとき、 $\text{isProg}(x_1) = 1$ であり、そうでないとき、 $\text{isProg}(x_1) = 0$ である(ただし、GOTO プログラムのコード化は講義で紹介したものを採用する)。この isProg が WHILE 計算可能であることを証明せよ。