

アンダースタンディング・コンピューション 第 8 章
決定可能性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 29 日

最終更新 : 2019 年 11 月 29 日 11:48

- | | | |
|---|----------------|--------|
| 2 | プログラム意味論 | (5月) |
| 3 | 有限オートマトン | (6月) |
| 4 | プッシュダウン・オートマトン | (7月) |
| 5 | チューリングマシン | (7月) |
| 6 | ラムダ計算 | (10月) |
| 7 | 万能性 | (11月) |
| 8 | 決定可能性 | (11月末) |
| 9 | 抽象解釈／静的意味論 | |

「機械」によって、いろいろな計算を行う

- ▶ 有限オートマトン
- ▶ プッシュダウン・オートマトン
- ▶ チューリングマシン

「できること」で強さを比較すると

有限オートマトン < プッシュダウン・オートマトン < チューリングマシン

「関数だけ」を用いて、いろいろな計算を行う

- ▶ ラムダ計算

チャーチ=チューリングのテーゼ (定立, 提唱)

計算可能

=

チューリングマシンで実現可能

第 8 章の内容

「チューリングマシンで実現可能」なことをすべて実現できるようなものはたくさんある

- ▶ ラムダ計算
- ▶ 帰納的関数
- ▶ SKI コンビネータ計算
- ▶ Iota
- ▶ タグシステム
- ▶ 循環タグシステム
- ▶ コンウェイのライフゲーム
- ▶ ルール 110
- ▶ ウルフラムの
2, 3 チューリングマシン
- ▶

疑問

- ▶ チューリングマシンで何でもできるのか？
- ▶ つまり、何でも「計算可能」なのか？

この章の回答

- ▶ チューリングマシンが「停止しない」場合がある
- ▶ 「プログラムが停止するか」を判定するプログラムは存在しない (つまり、「停止性問題」は解けない)
- ▶ プログラムに関する非自明な性質を判定するプログラムは存在しない (Rice の定理)

- ① 停止しないプログラム
- ② 解けない問題 — 停止性問題
- ③ 解けない問題はたくさんある — Rice の定理
- ④ 個人プロジェクト案の例

次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ

TM 1

TM 2

TM 3

チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

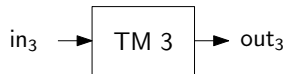
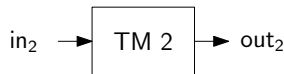
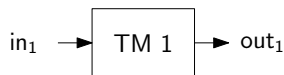
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

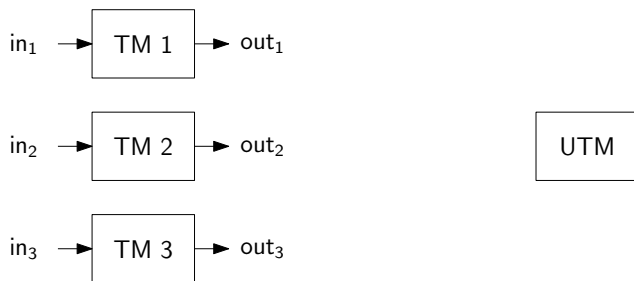
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

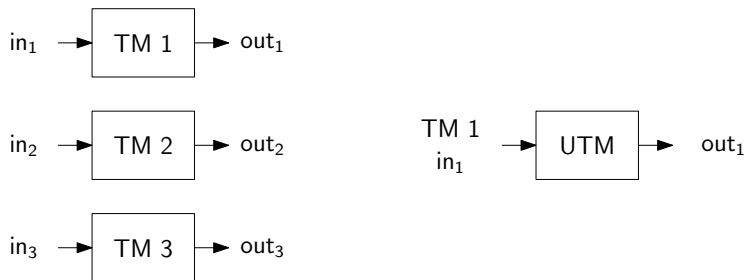
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

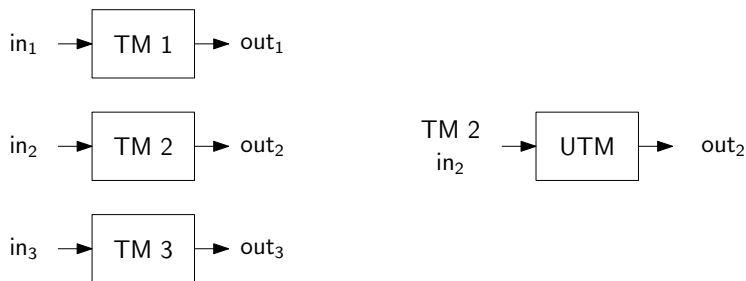
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

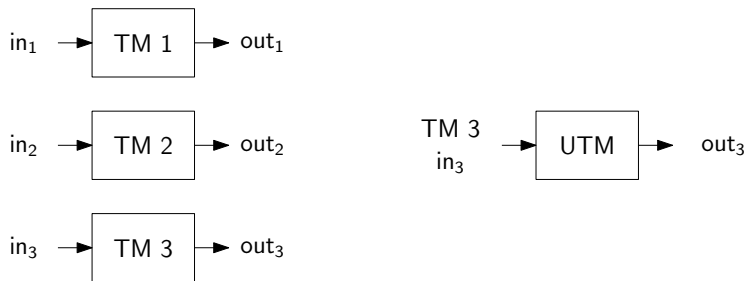
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

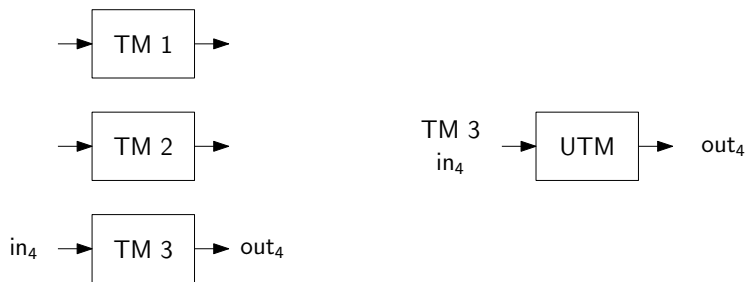
次の性質は、チューリングマシンを有用にするものとして、本質的

万能チューリングマシンの存在

任意のチューリングマシン M と任意のテープ σ を入力として与えて、 M に σ を入力としたときの出力を出力するチューリングマシンが存在

そのようなチューリングマシンを

万能チューリングマシン (universal Turing machine) と呼ぶ



チューリング完全な計算モデルも、同じような万能性を持つ

どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

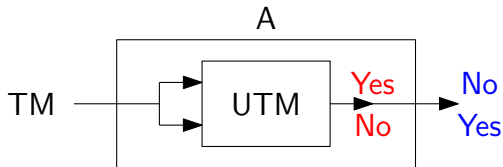
停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

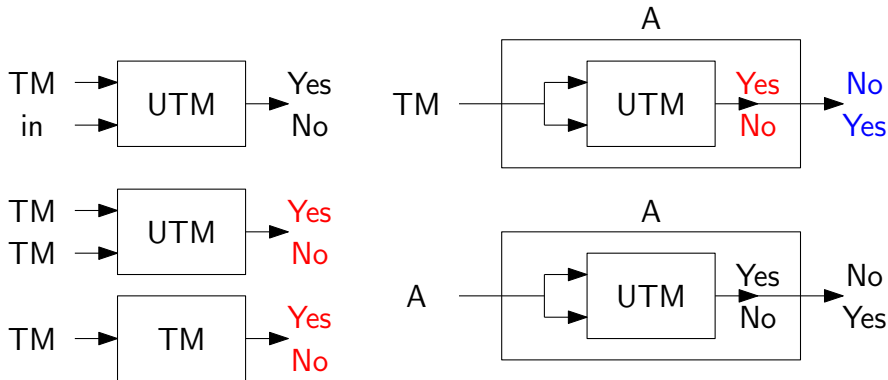
停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

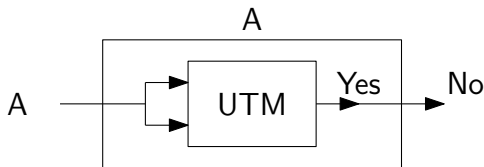
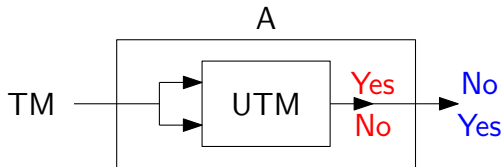
停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

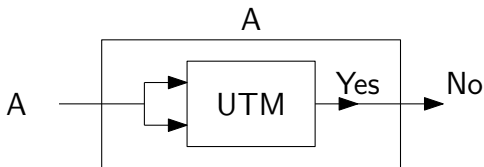
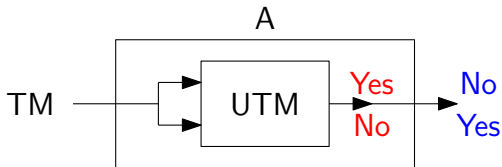
停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

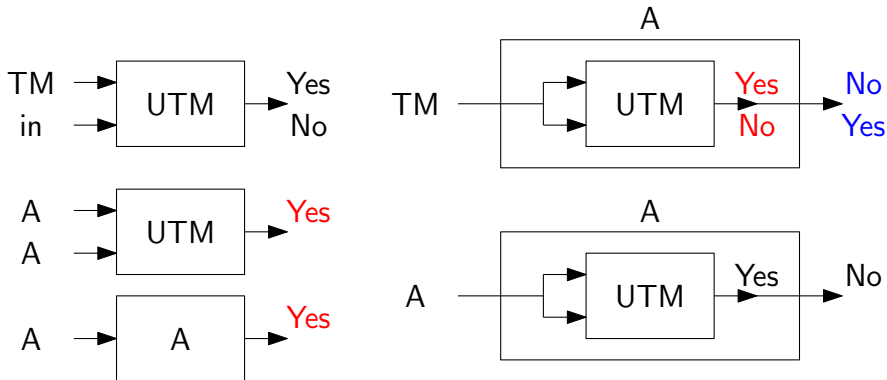
停止しないチューリングマシンを作ることができる



どんなチューリングマシンも必ず停止するのか？

答えは「No」!

停止しないチューリングマシンを作ることができる



- ① 停止しないプログラム
- ② 解けない問題 — 停止性問題
- ③ 解けない問題はたくさんある — Rice の定理
- ④ 個人プロジェクト案の例

答えは「No」!

チューリングマシンで解けない問題が存在する

チャーチ・チューリングの提唱にもとづくと

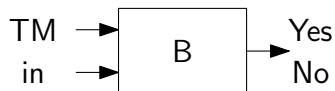
どんな計算でも、解けない問題が存在する

- ▶ 「ある特定のチューリングマシンが停止しない」という事実とこれは違う
- ▶ 「ある特定の問題を解く **どんなチューリングマシンも停止しない**」と言っている

停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

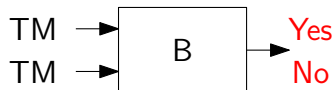
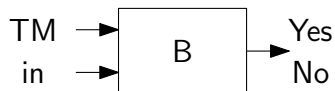
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

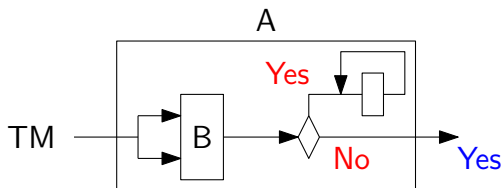
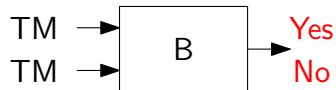
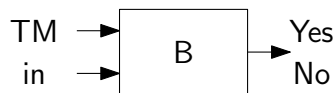
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

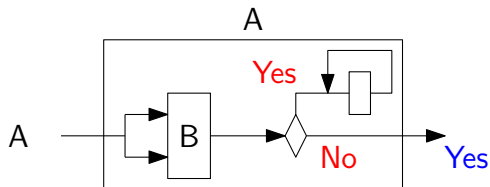
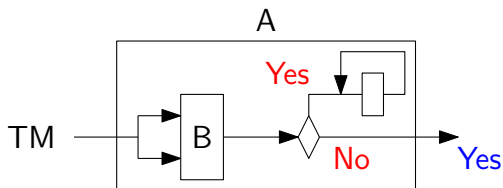
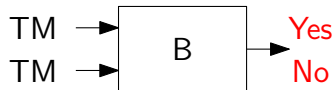
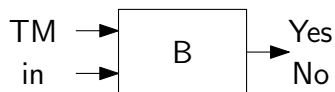
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

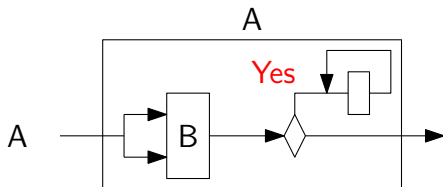
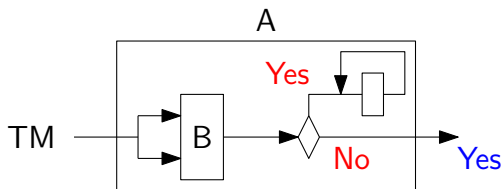
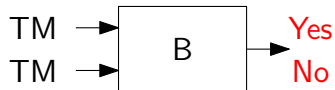
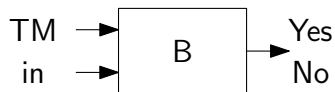
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

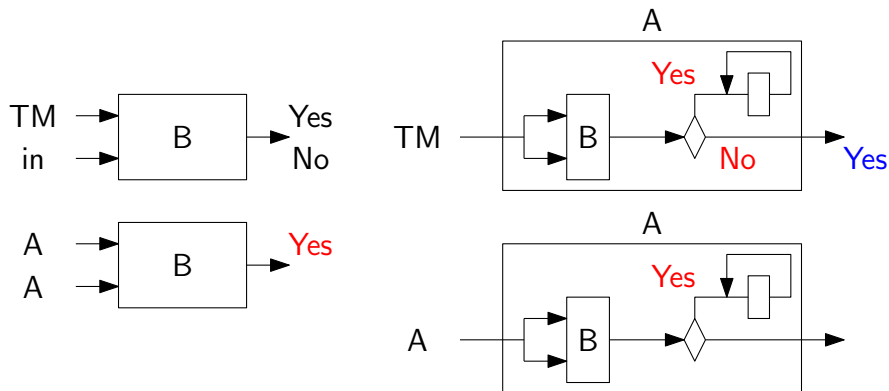
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

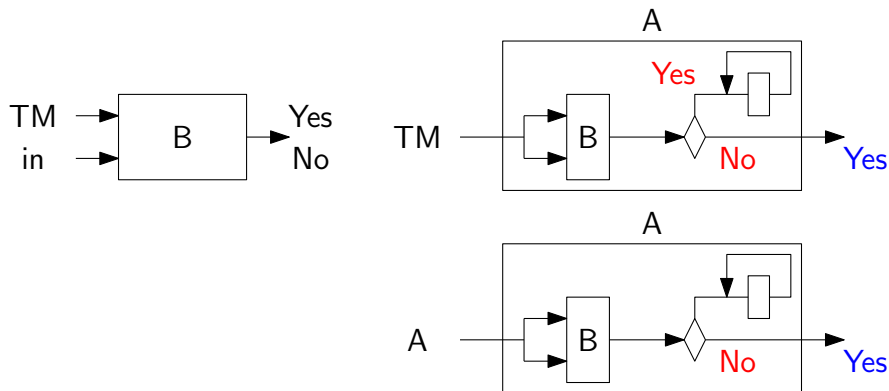
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

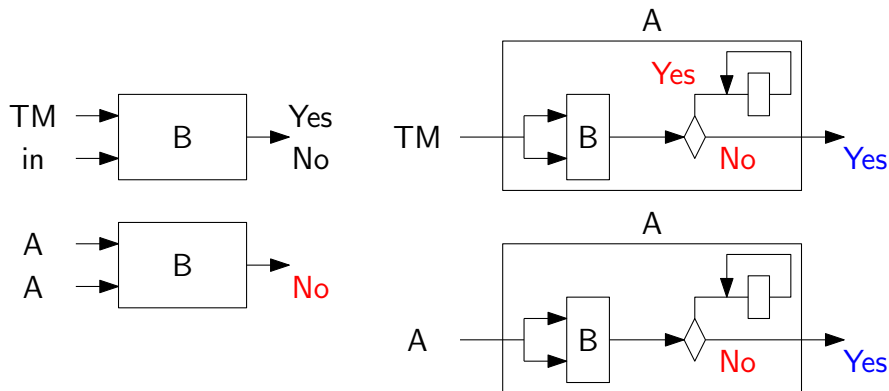
この問題を解くチューリングマシン B があるとする



停止性問題 (Halting Problem)

- ▶ 入力：チューリングマシン TM と それへの入力 in
- ▶ 質問：TM に in を入力したとき，TM は停止するか？

この問題を解くチューリングマシン B があるとする



- ① 停止しないプログラム
- ② 解けない問題 — 停止性問題
- ③ 解けない問題はたくさんある — Rice の定理
- ④ 個人プロジェクト案の例

- ▶ 停止しないチューリングマシンがある
- ▶ 停止性問題を解くチューリングマシンは存在しない

疑問

- ▶ 停止性問題 以外に解けない問題はあるのか？
- ▶ 解けない問題 はどれくらいあるのか？

答え

解けない問題はたくさんある

- ▶ プログラムの意味を問う問題は解けない (Rice の定理)

Rice の定理 (ライス の定理)

プログラムの (非自明な) 意味論的性質を問う問題を解くチューリングマシンは存在しない

Henry G. Rice (1920–2003)

プログラムの (非自明な) 意味論的性質の例

- ▶ プログラムは停止するか？
- ▶ プログラムは “Hello World” と印字するか？
- ▶ ...

- ① 停止しないプログラム
- ② 解けない問題 — 停止性問題
- ③ 解けない問題はたくさんある — Rice の定理
- ④ 個人プロジェクト案の例

- ▶ いろいろなプログラミング言語で「クワイン」を書いてみる
 - ▶ クワイン：自分自身をプリントするプログラム (269 ページ参照)