アンダースタンディング・コンピュテーション　第 7 章
万能性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 8 日

最終更新：2019 年 11 月 8 日　11:29

スケジュール

2. プログラム意味論 (5月)
3. 有限オートマトン (6月)
4. プッシュダウン・オートマトン (7月)
5. チューリングマシン (7月)
6. ラムダ計算 (10月)
7. 万能性 (11月)
8. 決定可能性
9. 抽象解釈／静的意味論

「機械」によって，いろいろな計算を行う

- 有限オートマトン
- プッシュダウン・オートマトン
- チューリングマシン

「できること」で強さを比較すると

有限オートマトン ＜ プッシュダウン・オートマトン ＜ チューリングマシン

「関数だけ」を用いて，いろいろな計算を行う

- ラムダ計算

疑問

ラムダ計算で「できること」は どれくらい 強い のか？

チャーチ＝チューリングのテーゼ (Church-Turing thesis)

チャーチ＝チューリングのテーゼ (定立，提唱)

$\boxed{\text{計算可能}} = \boxed{\text{チューリングマシンで実現可能}}$

- チューリング：「チューリングマシン」を通して「計算」を研究
- チャーチ：「ラムダ計算」を通して「計算」を研究

第 7.1 節の内容

$\boxed{\text{チューリングマシンで実現可能}} = \boxed{\text{ラムダ計算で実現可能}}$

これを指して「ラムダ計算は万能 (universal) である」，あるいは，
「ラムダ計算はチューリング完全 (Turing complete) である」という

この章の内容

「チューリングマシンで実現可能」なことをすべて実現できるようなものはたくさんある

- ラムダ計算
- 帰納的関数
- SKI コンビネータ計算
- Iota
- タグシステム
- 循環タグシステム
- コンウェイのライフゲーム
- ルール 110
- ウルフラムの 2, 3 チューリングマシン
- ……

驚くほど単純な方法で，万能性を持たせられる

このスクーリングでは,「SKI コンビネータ計算」と「タグシステム」だけ紹介

目次

SKI コンビネータ計算とは？

記号 S, K, I (と変数記号) のみを用いる

- $\mathsf{I}x = x$
- $\mathsf{K}xy = x$
- $\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) = xz(yz)$ (左結合的)

例：

$$\begin{aligned} \mathsf{ISKS(IK)} &= \mathsf{SKS(IK)} \\ &= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\ &= \mathsf{IK} \\ &= \mathsf{K} \end{aligned}$$

SKI コンビネータ計算とは？

記号 S, K, I (と変数記号) のみを用いる

- $\mathsf{I}x = x$
- $\mathsf{K}xy = x$
- $\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) = xz(yz)$ (左結合的)

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ISKS(IK)} &= \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\
&= \mathsf{IK} \\
&= \mathsf{K}
\end{aligned}
$$

SKI コンビネータ計算とは？

記号 S, K, I (と変数記号) のみを用いる

- $\mathsf{I}x = x$
- $\mathsf{K}xy = x$
- $\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) = xz(yz)$ (左結合的)

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ISKS(IK)} &= \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\
&= \mathsf{IK} \\
&= \mathsf{K}
\end{aligned}
$$

SKI コンビネータ計算とは？

記号 S, K, I (と変数記号) のみを用いる

- $\mathsf{I}x = x$
- $\mathsf{K}xy = x$
- $\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) = xz(yz)$ (左結合的)

例：

$$\begin{aligned} \mathsf{ISKS(IK)} &= \mathsf{SKS(IK)} \\ &= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\ &= \mathsf{IK} \\ &= \mathsf{K} \end{aligned}$$

SKI コンビネータ計算とは？

記号 S, K, I (と変数記号) のみを用いる

- $\mathsf{I}x = x$
- $\mathsf{K}xy = x$
- $\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) = xz(yz)$ (左結合的)

例：

$$\begin{aligned} \mathsf{ISKS(IK)} &= \mathsf{SKS(IK)} \\ &= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\ &= \mathsf{IK} \\ &= \mathsf{K} \end{aligned}$$

SKI コンビネータ計算 を ラムダ計算 で実現する

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{I} & \rightarrow & \lambda x.x \\
\mathsf{K} & \rightarrow & \lambda x(\lambda y.x) \\
\mathsf{S} & \rightarrow & \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))
\end{array}
$$

例：ラムダ計算に置き換えてみる

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ISKS(IK)} &= \lambda x.x\ \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))\ \mathsf{KS(IK)} \\
&= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\
&= \lambda x(\lambda y.x)\ \mathsf{(IK)(S(IK))} \\
&= \mathsf{IK} \\
&= \lambda x.x\ \mathsf{K} \\
&= \mathsf{K}
\end{aligned}
$$

SKI コンビネータ計算 を ラムダ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I} &\quad\to\quad \lambda x.x \\
\mathsf{K} &\quad\to\quad \lambda x(\lambda y.x) \\
\mathsf{S} &\quad\to\quad \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))
\end{aligned}
$$

例：ラムダ計算に置き換えてみる

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ISKS(IK)} &= \lambda x.x\ \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))\ \mathsf{KS(IK)} \\
&= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\
&= \lambda x(\lambda y.x)\ \mathsf{(IK)(S(IK))} \\
&= \mathsf{IK} \\
&= \lambda x.x\ \mathsf{K} \\
&= \mathsf{K}
\end{aligned}
$$

SKI コンビネータ計算 を ラムダ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I} &\to \lambda x.x \\
\mathsf{K} &\to \lambda x(\lambda y.x) \\
\mathsf{S} &\to \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))
\end{aligned}
$$

例：ラムダ計算に置き換えてみる

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ISKS(IK)} &= \lambda x.x\ \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \mathsf{SKS(IK)} \\
&= \lambda x(\lambda y(\lambda z.(xz(yz))))\ \mathsf{KS(IK)} \\
&= \mathsf{K(IK)(S(IK))} \\
&= \lambda x(\lambda y.x)\ \mathsf{(IK)(S(IK))} \\
&= \mathsf{IK} \\
&= \lambda x.x\ \mathsf{K} \\
&= \mathsf{K}
\end{aligned}
$$

ラムダ計算から SKI コンビネータ計算へ (1)

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.x & = & \mathsf{I} \\
\lambda x.e & = & \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) & = & \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{array}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算から SKI コンビネータ計算へ (1)

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.x & = & \mathsf{I} \\
\lambda x.e & = & \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) & = & \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{array}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\lambda x.(p\ (p\ x))) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.(p\ x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ \lambda x.p\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \lambda x.x)) \\
&= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き)：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.x & = & \mathsf{I} \\
\lambda x.e & = & \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) & = & \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{array}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$\begin{aligned} \lambda x.x &= \mathsf{I} \\ \lambda x.e &= \mathsf{K}e \\ \lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2) \end{aligned}$$

例 (続き) :

$$\begin{aligned} \mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \end{aligned}$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$\begin{aligned}\lambda x.x &= \mathsf{I} \\ \lambda x.e &= \mathsf{K} e \\ \lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)\end{aligned}$$

例 (続き) :

$$\begin{aligned}\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\ &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))\end{aligned}$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き)：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}$$

例 (続き) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K}e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

例 (続き) :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TWO} &= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p)\ \mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ \lambda p.\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{S}\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \lambda p.(\mathsf{K}\ p))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ \lambda p.\mathsf{K}\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \lambda p.p)))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})) \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{S}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I})))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}))
\end{aligned}
$$

ラムダ計算 を SKI コンビネータ計算 で実現する

$$
\begin{aligned}
\lambda x.x &= \mathsf{I} \\
\lambda x.e &= \mathsf{K} e \\
\lambda x.(e_1\ e_2) &= \mathsf{S}\ (\lambda x.e_1)\ (\lambda x.e_2) = (\mathsf{S}\ (\lambda x.e_1))\ (\lambda x.e_2)
\end{aligned}
$$

うまくいくか確認

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I}x = x : \qquad & \mathsf{I}\ x = (\lambda x.x)\ x \\
& \qquad = x, \\
\mathsf{K}xy = x : \qquad & \mathsf{K}\ e\ f = (\lambda x.e)\ f \\
& \qquad = e, \\
\mathsf{S}xyz = (xz)(yz) : \qquad & \mathsf{S}\ \lambda x.e_1\ \lambda x.e_2\ z = (\lambda x.(e_1\ e_2))\ z \\
& \qquad = ((\lambda x.e_1)\ z)\ ((\lambda x.e_2)\ z)
\end{aligned}
$$

SKI コンビネータ計算の万能性

ここまでの話 (の雰囲気) をまとめると

事実

$\boxed{\text{ラムダ計算で実現可能}} \quad = \quad \boxed{\text{SKI コンビネータ計算で実現可能}}$

つまり,

$$\boxed{\text{計算可能}} \quad = \quad \boxed{\text{SKI コンビネータ計算で実現可能}}$$

目次

タグシステムは次のように定義される計算モデル

タグシステムの構成要素

- m：削除数と呼ばれる正整数
- A：記号の集合
  - その中の 1 つを停止記号とする
- 生成規則

例：$m = 3$，$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$，停止記号は d

$$\text{生成規則} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{a} & \to & \mathrm{bc} \\ \mathrm{b} & \to & \mathrm{caad} \\ \mathrm{c} & \to & \mathrm{ccd} \end{array}$$

タグシステム：動作例

生成規則は次のように適用

入力：文字列

1. 先頭の文字を，生成規則で置換して，末尾に付ける
2. 先頭から m 文字だけ削除する

これができないとき (先頭が停止記号 or 文字列の長さ $< m$)，停止

例：$m = 3$，$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$，停止記号は $\mathtt{d}$

$$\text{生成規則} \quad \begin{array}{lcl} \mathtt{a} & \to & \mathtt{bc} \\ \mathtt{b} & \to & \mathtt{caad} \\ \mathtt{c} & \to & \mathtt{ccd} \end{array}$$

```
aaaaaa
   aaabc
      bcbc
         ccaad
            adccd
```

タグシステム：動作例 (続)

例：$m = 3$，$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$，停止記号は d

$$\text{生成規則}\quad \begin{array}{ccc} \mathtt{a} & \rightarrow & \mathtt{bc} \\ \mathtt{b} & \rightarrow & \mathtt{caad} \\ \mathtt{c} & \rightarrow & \mathtt{ccd} \end{array}$$

```
aaaaaa
   aaabc
      bcbc
         ccaad
            adccd
               cdbc
                  cccd
                     dccd
```

計算としてみると，入力 aaaaaa に対して，出力 dccd

タグシステムの万能性

事実

チューリングマシンで実現可能 ＝ タグシステムで実現可能

タグシステムでチューリングマシンを実装する方法 (のアイディア) が
テキストでは簡単に述べられている

帰結

1. タグシステムを使えば，チューリングマシンでできることがすべてできる
2. ある計算モデルが，タグシステムを実装できれば
その計算モデルは万能

タグシステムはとてもシンプルなので， 2 の視点が重要

目次

個人プロジェクト案の例

- 次の計算モデルを調べてみて，Ruby で実装する
  - Jot
  - Zot
- ラムダ計算でチューリングマシンの動作を模倣する方法を Ruby で実装する
- タグシステムでチューリングマシンの動作を模倣する方法を Ruby で実装する
- 自然・社会に存在する計算モデルが万能であることを証明する
  - 参考：Super Mario Maker の万能性 `https://www.youtube.com/watch?v=hd0EtsTUbmg`