

1 レポート課題

次の3問にすべて答えよ。

問 1

次の「集合遊離問題」を考える。

集合遊離問題
入力： 集合族 (V, \mathcal{F})
出力： Yes または No
条件： 集合 $S \subseteq V$ で、任意の $X \in \mathcal{F}$ に対して、 $X \cap S \neq \emptyset$ かつ $X \cap (V - S) \neq \emptyset$ を満たすものが存在するならば、Yes、 そうでないならば、No.

(問 1-1). 集合遊離問題に対する次の入力は Yes 入力である。なぜか説明せよ。

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 7, 8\}\}.$$

(問 1-2). 集合遊離問題に対する次の入力は No 入力である。なぜか説明せよ。

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

(問 1-3). 集合遊離問題が NP に所属することを証明せよ。(Yes 入力の証拠を示し、具体的にアルゴリズムを構成せよ。)

(問 1-4). 集合遊離問題が NP 完全であることを、3-SAT が集合遊離問題に多項式時間多対一帰着可能であることを示すことで証明する。3-SAT の入力として、3-CNF 論理式 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ を考える。つまり、 f に現れる変数の数は n である。それらの変数を x_1, x_2, \dots, x_n とする。また、 f に含まれる節の数を m とし、それらの節を C_1, C_2, \dots, C_m とする。このとき、次のように V と \mathcal{F} を定義して、それらを集合遊離問題の入力であると見なす。

$$V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \cup \{z\},$$
$$\mathcal{F} = \{\{x_i, \bar{x}_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{\{u_j, v_j\} \mid j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$
$$\cup \{\{\ell_{j,1}, \ell_{j,2}, u_j\}, \{\ell_{j,3}, v_j, z\} \mid \ell_{j,1}, \ell_{j,2}, \ell_{j,3} \text{ は節 } C_j \text{ の異なるリテラル, } j \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

(問 1-4a). 3-CNF 論理式 f から、上のように定義した V と \mathcal{F} が多項式時間で構成できることを証明せよ。

(問 1-4b). 3-CNF 論理式 f が充足可能であるとき、上のように定義した集合族 (V, \mathcal{F}) が集合遊離問題の Yes 入力であることを証明せよ。

(問 1-4c). 上のように定義した集合族 (V, \mathcal{F}) が集合遊離問題の Yes 入力であるとき、元となった 3-CNF 論理式 f は充足可能であることを証明せよ。

問 2

第 5 回講義で取り上げた「巡回セールスマン問題」、および、第 7 回講義で取り上げた「 p センター問題」と「 p メディアン問題」は数値を入力の一部とする問題である。講義では、これら 3 つの問題が NP 完全であることを証明したが、その証明は、これら 3 つの問題のそれぞれが、弱 NP 完全であるのか、強 NP 完全であるのか、どちらであることを証明しているのだろうか？ それぞれの問題がどちらであると証明しているのか、理由も付けて説明せよ。

問 3

次のようなスケジューリング問題を考える。ジョブは n 個あり、各ジョブ J_i に対して、処理時間 $p_i \in \mathbb{N}$ と納期 $d_i \in \mathbb{N}$ が与えられている。機械は m 台あり、その性能は同一であるとする。各ジョブを 1 つの機械で処理する必要があり、1 回処理すれば十分である。また、ジョブの処理を一旦開始したら、中断はできないものとする。考えたいことは、 n 個のジョブを m 台の機械で処理するスケジューリングで、各ジョブに対して、その納期を越えて処理を行うことがない (ジョブ J_i の完了時刻 c_i に対して、 $c_i \leq d_i$ が成り立っていないなければならない) ものの存在を問う判定問題である。つまり、そのようなスケジューリングがあれば、Yes を出力し、そのようなスケジューリングがなければ、No を出力する判定問題を考える。

(問 3-1) $m \geq 2$ があらかじめ決められた定数であるとき、この問題が弱 NP 完全であることを証明せよ。

(問 3-2) $m \geq 2$ が入力の一部であるとき、この問題が強 NP 完全であることを証明せよ。

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 12 月 25 日 (水) 23:59 JST.
- 提出法は電子メールにて PDF ファイル を送付する。表題 (Subject) に「Report-1」という文字列を含めること。受け取った場合には、2 営業日以内に返信する。(返信が無い場合に、同じメールアドレスから送信を繰り返すことは得策ではないと思う。UEC メールから送信することを推奨する。)
- 提出先は 岡本 (okamotoy@uec.ac.jp)。提出メール中に、学籍番号と氏名を必ず記載すること。
- 採点基準は、(1) 記述の正確さと厳密さ、(2) 日本語表現の適切さ、(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である。期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない。50 点満点。
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は、証明や説明が過不足なく記述されているか、そして、それが数学的・論理的に正しいか、ということの意味する。「(2) 日本語表現の適切さ」は、証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか、ということの意味する。「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は、証明や説明が分かりやすい構造を成しているか、ということの意味し、これには文書作成ソフトウェア、図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる。
- 不正行為については、学修要覧を参照すること。一方で、他の履修登録生 (受講生) と相談したり、文献を調べることは大いに推奨する。その際は、レポート内で (例えば、末尾や冒頭で)、相談者や参考文献を必ず記載すること。その記述が無い場合は、不正行為が疑われるかもしれない。