離散最適化基礎論　第 12 回
文字列に関する問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 1 月 14 日

最終更新：2020 年 1 月 14 日　15:16

スケジュール 前半

- ⋆ 休み (大学院入学式) (10/1)
1. アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
2. 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ⋆ 休み (祝日) (10/22)
3. 充足可能性問題とその変種 (10/29)
4. グラフに関する問題 (1) : 部分集合の選択 (11/5)
5. グラフに関する問題 (2) : 経路の選択 (11/12)
6. 集合族に関する問題 (1) : グラフとの関連 (11/19)
7. 集合族に関する問題 (2) : 発展 (11/26)

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)
- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)
11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)
- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

文字列に関する問題の NP 困難性を扱う

- 最長共通部分列問題
- 文字列のクラスタリング問題

文字列はどこに現れるか？

どこにでも現れる．特に

- 分子生物学 (DNA の一次構造) $(\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{G}, \mathtt{C}, \mathtt{T}\})$
- 自然言語処理
- オートマトン理論と形式言語学 (形式文法)
- 符号理論，データ圧縮 $(\Sigma = \{0, 1\})$

文字列はとても基本的な対象なので，
数学的性質やアルゴリズムが活発に研究されている
$\rightsquigarrow$ 文字列学 (stringology)

目次

文字列 とは？

文字列：直感的な定義

- 文字列 (string) は文字を並べたもの　(語 (word) と呼ぶこともある)
- 文字 (character, letter) はある有限集合の要素
- アルファベット (alphabet) は使う文字全体の集合

アルファベットが $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ であるとき

- abcbacd は Σ 上の文字列 (長さは 7，$|\mathtt{abcbacd}| = 7$)
- ccddabc は Σ 上の文字列
- abcdeab は Σ 上の文字列ではない ($\because e \notin \Sigma$)

記法：文字列の集合

- $\Sigma^n = \Sigma$ 上の文字列で，長さ n のもの全体の集合
- $\Sigma^* = \Sigma$ 上の文字列全体の集合　(長さは問わない)

$\varepsilon =$ 長さ 0 の文字列 (空文字列)

文字列の連結と反復

文字列 $s, t \in \Sigma^*$

定義：文字列の連結 (結合，concatenation)

- st = 文字列 s と文字列 t をこの順に連結してできる文字列

例：$s = \mathtt{abba}, t = \mathtt{cdcd}$ のとき

- $st = \mathtt{abbacdcd}$
- $ts = \mathtt{cdcdabba}$

定義：文字列の反復 (repetition)

- s^n = 文字列 s を n 回反復してできる文字列

例：$s = \mathtt{abba}$ のとき

- $s^3 = \mathtt{abbaabbaabba}$
- $s^2 = \mathtt{abbaabba}$
- $s^1 = \mathtt{abba}$
- $s^0 = \varepsilon$

部分文字列と部分列

長さ n の文字列 s

- $s[i] = s$ の先頭から i 番目の文字 $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$

定義：s の部分文字列 (substring)

ある $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i \leq j)$ に対して，次のように書ける文字列

$$s[i]s[i+1] \cdots s[j]$$

定義：s の部分列 (subsequence)

ある $i_1, i_2, \ldots, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_j)$ に対して，
次のように書ける文字列

$$s[i_1]s[i_2] \cdots s[i_j]$$

例：$s =$ abbaabbaabba のとき

- bbaab は s の部分文字列であり，s の部分列である
- aaaab は s の部分文字列ではないが，s の部分列である

部分文字列と部分列

長さ n の文字列 s

- $s[i] = s$ の先頭から i 番目の文字 $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$

定義：s の部分文字列 (substring)

ある $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i \leq j)$ に対して，次のように書ける文字列

$$s[i]s[i+1] \cdots s[j]$$

定義：s の部分列 (subsequence)

ある $i_1, i_2, \ldots, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_j)$ に対して，
次のように書ける文字列

$$s[i_1]s[i_2] \cdots s[i_j]$$

例：$s =$ abbaabbaabba のとき

- bbaab は s の部分文字列であり，s の部分列である
- aaaab は s の部分文字列ではないが，s の部分列である

部分文字列と部分列

長さ n の文字列 s

- $s[i] = s$ の先頭から i 番目の文字 $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$

定義：s の部分文字列 (substring)

ある $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i \leq j)$ に対して，次のように書ける文字列

$$s[i]s[i+1] \cdots s[j]$$

定義：s の部分列 (subsequence)

ある $i_1, i_2, \ldots, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_j)$ に対して，
次のように書ける文字列

$$s[i_1]s[i_2] \cdots s[i_j]$$

例：$s =$ abbaabbaabba のとき

- bbaab は s の部分文字列であり，s の部分列である
- aaaab は s の部分文字列ではないが，s の部分列である

目次

最長共通部分列問題 (最適化問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，アルファベット Σ，文字列 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma^*$
- 出力：$s_1, s_2, \ldots, s_n$ の共通部分列 t
- 評価：t の長さの最大化

$s_1 = \mathtt{abcabcabcabc}$

$s_2 = \mathtt{aabaabbccabab}$

$s_3 = \mathtt{aaaabbbbcccc}$

最長共通部分列問題 (最適化問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，アルファベット Σ，文字列 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma^*$
- 出力：$s_1, s_2, \ldots, s_n$ の共通部分列 t
- 評価：t の長さの最大化

$s_1 =$ abcabcabcabc

$s_2 =$ aabaabbccabab

$s_3 =$ aaaabbbbcccc

$\rightsquigarrow t =$ aaabbc

最長共通部分列問題 (判定問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，アルファベット Σ，文字列 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma^*$
  整数 $d \geq 0$
- 出力：Yes または No
- 条件：$s_1, s_2, \ldots, s_n$ の共通部分列で長さ d のものがある $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

$s_1 =$ abcabcabcabc

$s_2 =$ aabaabbccabab

$s_3 =$ aaaabbbbcccc

$\rightsquigarrow$ $t =$ aaabbc (長さ 6)

定理 (Maier '78)

最長共通部分列問題 (判定問題版) は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 最長共通部分列問題 (判定問題版) が NP に所属すること
- 最小共通部分列問題 (判定問題版) に
  独立集合問題が多項式時間多対一帰着可能であること

Yes 入力の証拠：長さ d の共通部分列 t

多項式時間検証アルゴリズム

1. t の長さが d であることを確認
2. t が $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の部分列であることの確認

(ただし，2 つの文字の比較は多項式時間でできるとする)

$s_1 = \mathtt{abcabcabcabc}$

$s_2 = \mathtt{aabaabbccabab}$

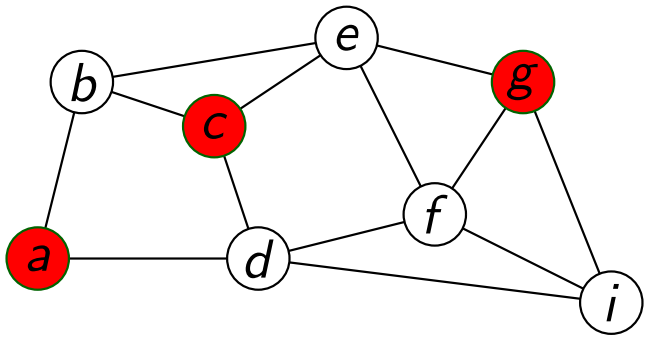
$s_3 = \mathtt{aaaabbbbcccc}$

$\rightsquigarrow\ t = \mathtt{aaabbc}$

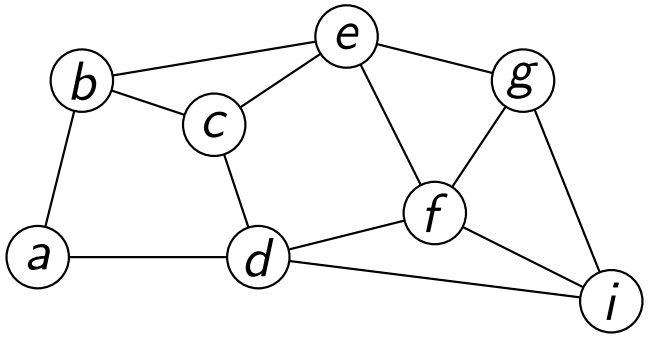
独立集合問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の独立集合とは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの



最長共通部分列問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



$\Sigma =$ 頂点集合 $\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$

s_0: a b c d e f g i

s_1: b c d e f g i a c d e f g i

s_2: b c d e f g i a b c e f g i

s_3: a c d e f g i a b d e f g i

s_4: a c d e f g i a b c d f g i

s_5: a b d e f g i a b c e f g i

s_6: a b d e f g i a b c d f g i

s_7: a b c e f g i a b c d e g i

s_8: a b c e f g i a b c d e f g

s_9: a b c d f g i a b c d e g i

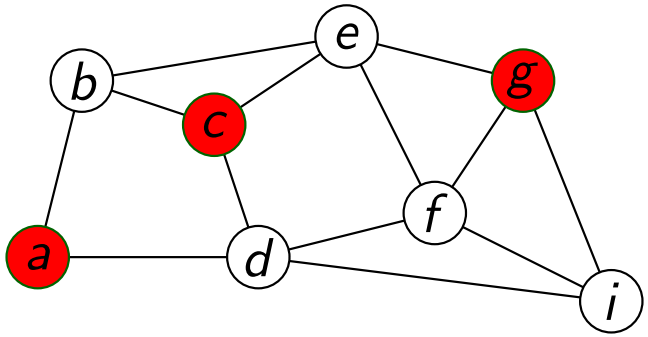
s_{10}: a b c d f g i a b c d e f i

s_{11}: a b c d e g i a b c d e f i

s_{12}: a b c d e g i a b c d e f g

s_{13}: a b c d e f i a b c d e f g

最長共通部分列問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



$\Sigma =$ 頂点集合 $\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$

s_0: [a] b [c] d e f [g] i

s_1: b c d e f g i [a] [c] d e f [g] i

s_2: b c d e f g i [a] b [c] e f [g] i

s_3: [a] [c] d e f [g] i a b d e f g i

s_4: [a] [c] d e f [g] i a b c d f g i

s_5: a b d e f g i [a] b [c] e f [g] i

s_6: a b d e f g i [a] b [c] d f [g] i

s_7: [a] b [c] e f [g] i a b c d e g i

s_8: [a] b [c] e f [g] i a b c d e f g

s_9: [a] b [c] d f [g] i a b c d e g i

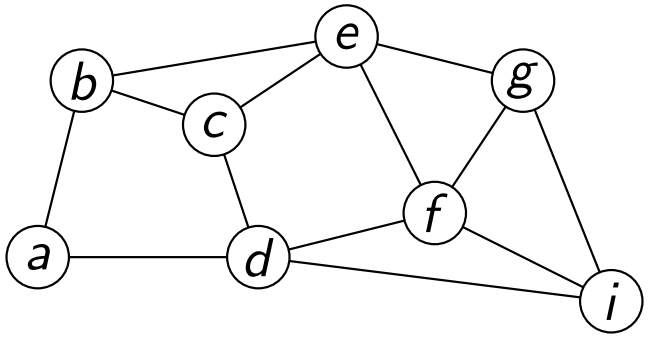
s_{10}: [a] b [c] d f [g] i a b c d e f i

s_{11}: [a] b [c] d e [g] i a b c d e f i

s_{12}: [a] b [c] d e [g] i a b c d e f g

s_{13}: a b c d e f i [a] b [c] d e f [g]

最長共通部分列問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



$\Sigma =$ 頂点集合 $\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$

s_0: a b c d e f g i

s_1: b c d e f g i a c d e f g i

s_2: b c d e f g i a b c e f g i

s_3: a c d e f g i a b d e f g i

s_4: a c d e f g i a b c d f g i

s_5: a b d e f g i a b c e f g i

s_6: a b d e f g i a b c d f g i

s_7: a b c e f g i a b c d e g i

s_8: a b c e f g i a b c d e f g

s_9: a b c d f g i a b c d e g i

s_{10}: a b c d f g i a b c d e f i

s_{11}: a b c d e g i a b c d e f i

s_{12}: a b c d e g i a b c d e f g

s_{13}: a b c d e f i a b c d e f g

最長共通部分列問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (2)

無向グラフ $G = (V, E)$ から，次のように文字列を構成する

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- $\Sigma = V$
- $s_0 = v_1 v_2 v_3 \cdots v_n$ (長さ n)
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，$e_i = \{v_j, v_k\}$ $(j < k)$ であるとすると
  $s_i = v_1 v_2 v_3 \cdots v_{j-1} v_{j+1} \cdots v_n \; v_1 v_2 v_3 \cdots v_{k-1} v_{k+1} \cdots v_n$ (長さ $2n - 2$)

この構成は多項式時間で行なえて，

$$G \text{ が要素数 } d \text{ の独立集合を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad s_0, s_1, \ldots, s_m \text{ が長さ } d \text{ の共通部分列を持つ}$$

特に

$$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_d}\} \text{ が } G \text{ の独立集合である } (i_1 < i_2 < \cdots < i_d) \quad \Leftrightarrow \quad \text{文字列 } v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_d} \text{ が } s_0, s_1, \ldots, s_m \text{ の共通部分列である}$$

□

定理 (Maier '78)

最長共通部分列問題 (判定問題版) は NP 完全

実は，次のような制限があっても，最長共通部分列問題は NP 完全

- $|\Sigma| = 2$ であっても (Maier '78)
- $s_1, s_2, \ldots, s_n$ が同じ偶数であっても (de la Higuera, Casacuberta '00)
- $|\Sigma| = 2$ であり，かつ，$s_1, s_2, \ldots, s_n$ が同じ偶数であっても (Nicolas, Rivals '05)

文字列に対する直感 1

「Σ が可変である場合」が難しい問題は，
「Σ が固定である場合」も難しいことが多い

目次

文字列の間の距離

復習：距離とは？

V 上の距離 (metric) とは，次を満たす関数 $d\colon V^2 \to \mathbb{R}$ のこと

- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) \geq 0$
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = d(v, u)$
- 任意の $u, v, w \in V$ に対して，$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Q: どうして 文字列の間の距離 を考えたい？
A: 文字列の集合に対して，クラスタリングなどを行いたいから
$\rightsquigarrow$ データマイニング

文字列に対する距離はたくさん考えられている

代表的なもの

1. Hamming 距離
2. Levenshtein 距離 (編集距離)

2 つの文字列の間の距離 (1)：Hamming 距離

Hamming 距離は，同じ長さの文字列どうしの距離

定義：Hamming 距離

長さ n の 2 つの文字列 $s, t \in \Sigma^n$ の Hamming 距離とは

$$\mathrm{HD}(s,t) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid s[i] \neq t[i]\}|$$

つまり，s, t で異なる文字を持つ添え字の総数

例：$\mathrm{HD}(\mathtt{drunk}, \mathtt{blank}) = 3$

```
d r u n k
b l a n k
```

事実

$\mathrm{HD}(s,t)$ は $O(n)$ 時間で計算できる
(ただし，2 つの文字の比較は $O(1)$ でできるものとする)

2 つの文字列の間の距離 (2)：Levenshtein 距離 (編集距離)

Levenshtein 距離は，文字列の長さが異なっていても定義できる

定義：Levenshtein 距離 (編集距離)

2 つの文字列 $s, t \in \Sigma^*$ の Levenshtein 距離 $\mathrm{LD}(s, t)$ とは
s から t を得るために行う文字の置換，挿入，削除の回数の最小値

例：$\mathrm{LD}(\texttt{kitten}, \texttt{sitting}) = 3$

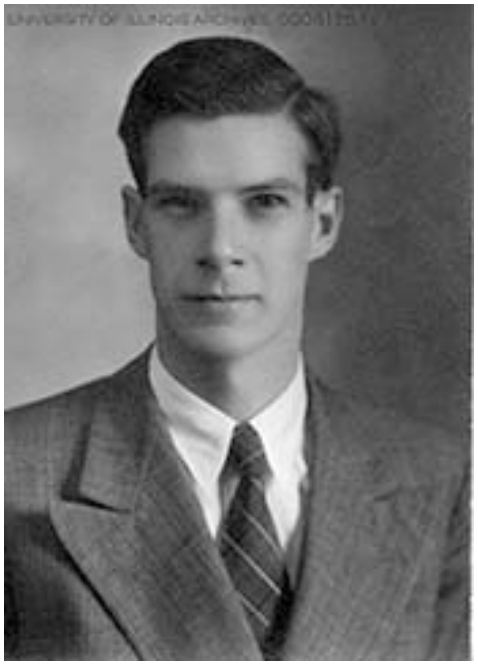
1. $\texttt{kitten} \to \texttt{sitten}$ (置換)
2. $\texttt{sitten} \to \texttt{sittin}$ (置換)
3. $\texttt{sittin} \to \texttt{sitting}$ (挿入)

事実 (Wagner, Fisher '74)

$\mathrm{LD}(s, t)$ は $O(|s||t|)$ 時間で計算できる
(ただし，2 つの文字の比較は $O(1)$ でできるものとする)

補足：Hamming 距離は「置換」のみを行う場合と考えることができる

Richard Hamming と Vladimir Levenshtein



リチャード・ハミング
(1915–1998)

ウラジミール・レーベンシュタイン
(1935–2007)

https://archon.library.illinois.edu/?p=digitallibrary/digitalcontent&id=11804

https://www.keldysh.ru/departments/dpt_10/lev.html

「Hamming 距離におけるクラスタ中心を求める」という問題を考える
(Hamming 距離に関する 1-センター問題)

最近接文字列問題 (判定問題版)

- 入力：整数 $n, \ell \geq 1$，アルファベット Σ，文字列 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma^\ell$
  整数 $d \geq 0$
- 出力：Yes または No
- 条件：すべての i で $\mathrm{HD}(s_i, t) \leq d$ となる文字列 $t \in \Sigma^\ell$ がある $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

$$
\begin{aligned}
& s_1 = \texttt{akasaka} && \mathrm{HD}(s_1, t) = 2 \\
& s_2 = \texttt{asakusa} && \mathrm{HD}(s_2, t) = 2 \\
& s_3 = \texttt{isasaka} && \mathrm{HD}(s_3, t) = 2 \\
\rightsquigarrow\ & t = \texttt{asasuka}
\end{aligned}
$$

中心文字列問題 (center string problem)

「Levenshtein 距離におけるクラスタ中心を求める」という問題を考える
(Levenshtein 距離に関する 1-センター問題)

中心文字列問題 (判定問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，アルファベット Σ，文字列 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma^*$
  整数 $d \geq 0$
- 出力：Yes または No
- 条件：すべての i で $\mathrm{LD}(s_i, t) \leq d$ となる文字列 $t \in \Sigma^*$ がある $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \texttt{niger} & \mathrm{LD}(s_1, t) &= 2 \\
s_2 &= \texttt{nigeria} & \mathrm{LD}(s_2, t) &= 2 \\
s_3 &= \texttt{algeria} & \mathrm{LD}(s_3, t) &= 2 \\
\rightsquigarrow\ t &= \texttt{aigeri}
\end{aligned}
$$

定理 (Frances, Litman '97)

最近接文字列問題 (判定問題版) は NP 完全

- $|\Sigma| = 2$ であっても NP 完全 (Frances, Litman '97)

3-SAT を帰着して，証明する

定理 (de la Higuera, Casacuberta '00)

中心文字列問題 (判定問題版) は NP 完全

- $|\Sigma| = 2$ であっても NP 完全 (Nicolas, Rivals '05)

最長共通部分列問題 (入力文字列の長さが同じ偶数の場合) を帰着して，証明する

中心文字列問題の NP 完全性：帰着

$s_1, \ldots, s_n$ の長さは 2ℓ であるとする

s_1: 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1

s_2: 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0

s_3: 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

s_4: 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1

s_5: 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1

$s_1, \ldots, s_n$ が長さ ℓ の共通部分列を持つ $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\mathrm{LD}(s_i, t) \leq \ell$ となる文字列 t が存在する

中心文字列問題の NP 完全性：帰着

$s_1, \ldots, s_n$ の長さは 2ℓ であるとする

s_0: ε

s_1: 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1

s_2: 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0

s_3: 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

s_4: 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1

s_5: 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1

$s_1, \ldots, s_n$ が長さ ℓ の共通部分列を持つ $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\mathrm{LD}(s_i, t) \leq \ell$ となる文字列 t が存在する

中心文字列問題の NP 完全性：帰着

$s_1, \ldots, s_n$ の長さは 2ℓ であるとする

s_0: ε $\qquad$ t: 0 0 1 1 0

s_1: 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1

s_2: 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0

s_3: 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

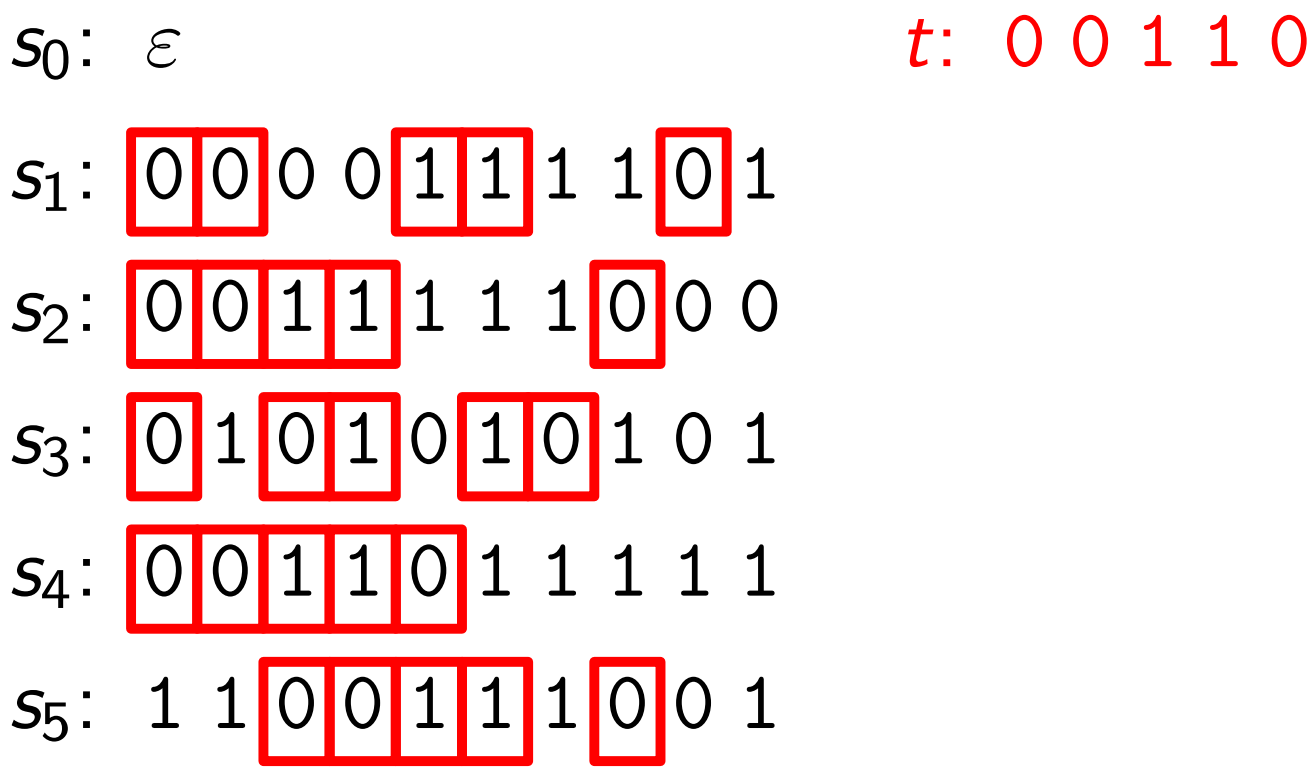
s_4: 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1

s_5: 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1

$s_1, \ldots, s_n$ が長さ ℓ の共通部分列を持つ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\mathrm{LD}(s_i, t) \leq \ell$ となる文字列 t が存在する

中心文字列問題の NP 完全性：帰着

$s_1, \ldots, s_n$ の長さは 2ℓ であるとする



$s_1, \ldots, s_n$ が長さ ℓ の共通部分列を持つ $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\mathrm{LD}(s_i, t) \leq \ell$ となる文字列 t が存在する

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 1 0 1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0	0 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 1	1 0 1 0 0 1 1 0 1 0	
0 1 0 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	
0 1 0 1 0 1 0 1 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 0 1	

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

		x_1 x_2 x_3 x_4
0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 1 0 1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0	0 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 1	1 0 1 0 0 1 1 0 1 0	
0 1 0 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	
0 1 0 1 0 1 0 1 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 0 1	

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 1 0 1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0	0 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 1	1 0 1 0 0 1 1 0 1 0	
0 1 0 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	
0 1 0 1 0 1 0 1 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 0 1	

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

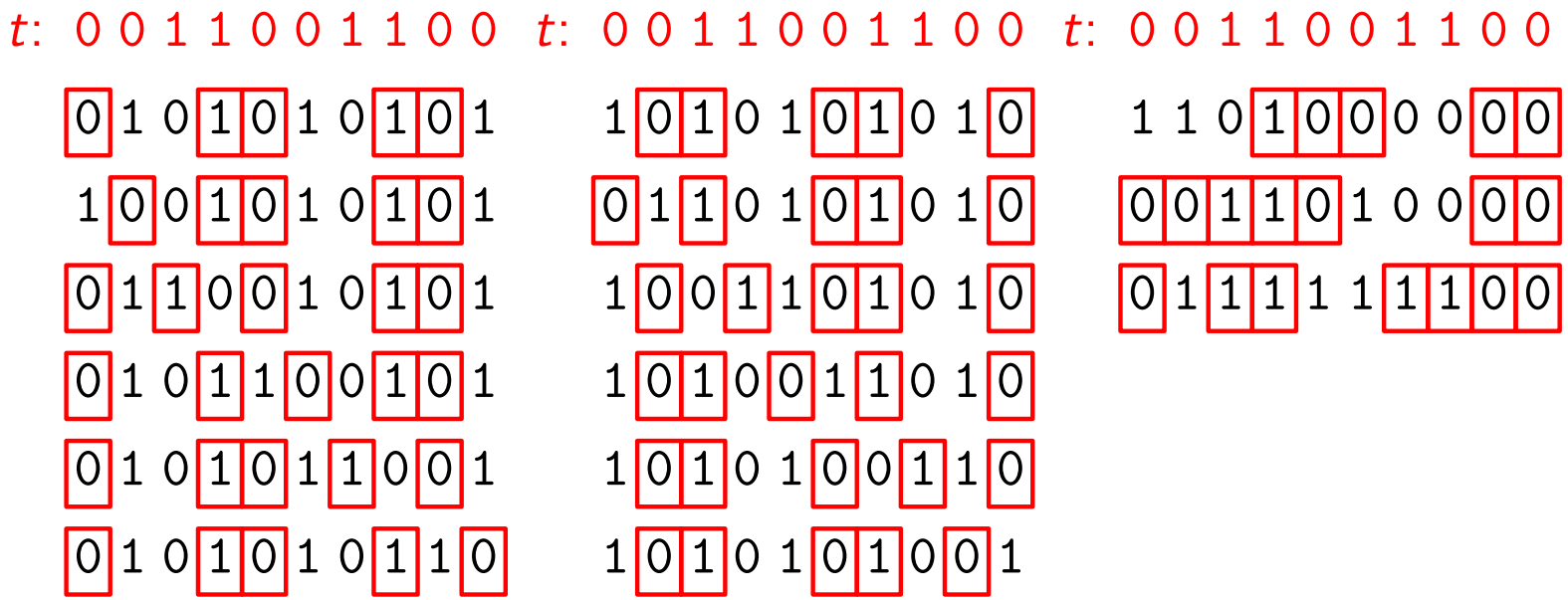
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

t: 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0	t: 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0	t: 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 1 0 1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0	0 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 1	1 0 1 0 0 1 1 0 1 0	
0 1 0 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	
0 1 0 1 0 1 0 1 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 0 1	

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

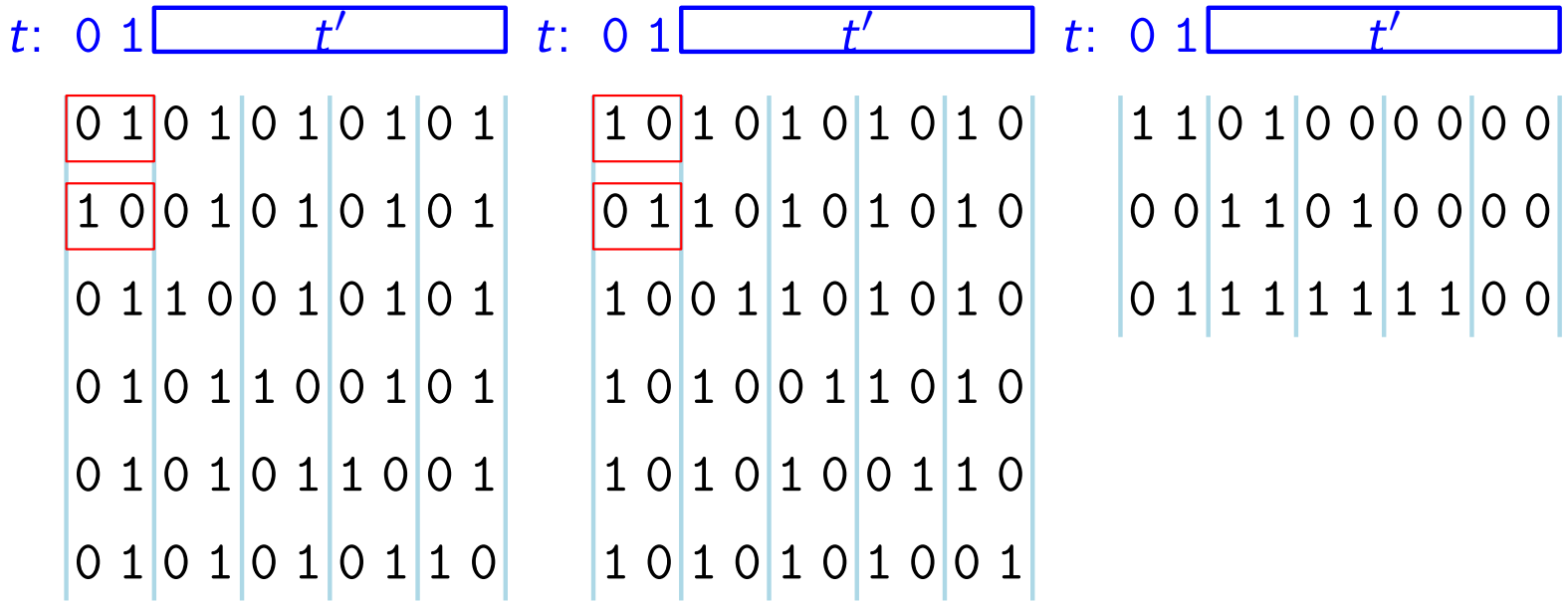
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

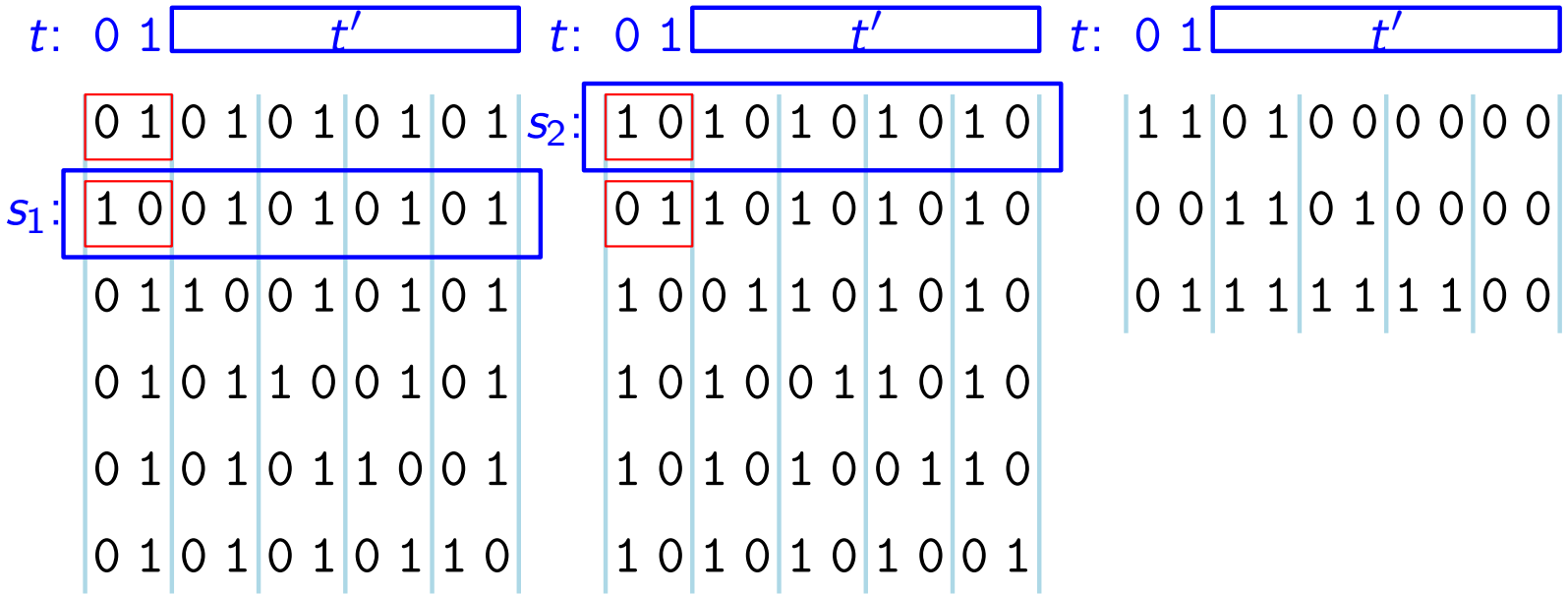
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

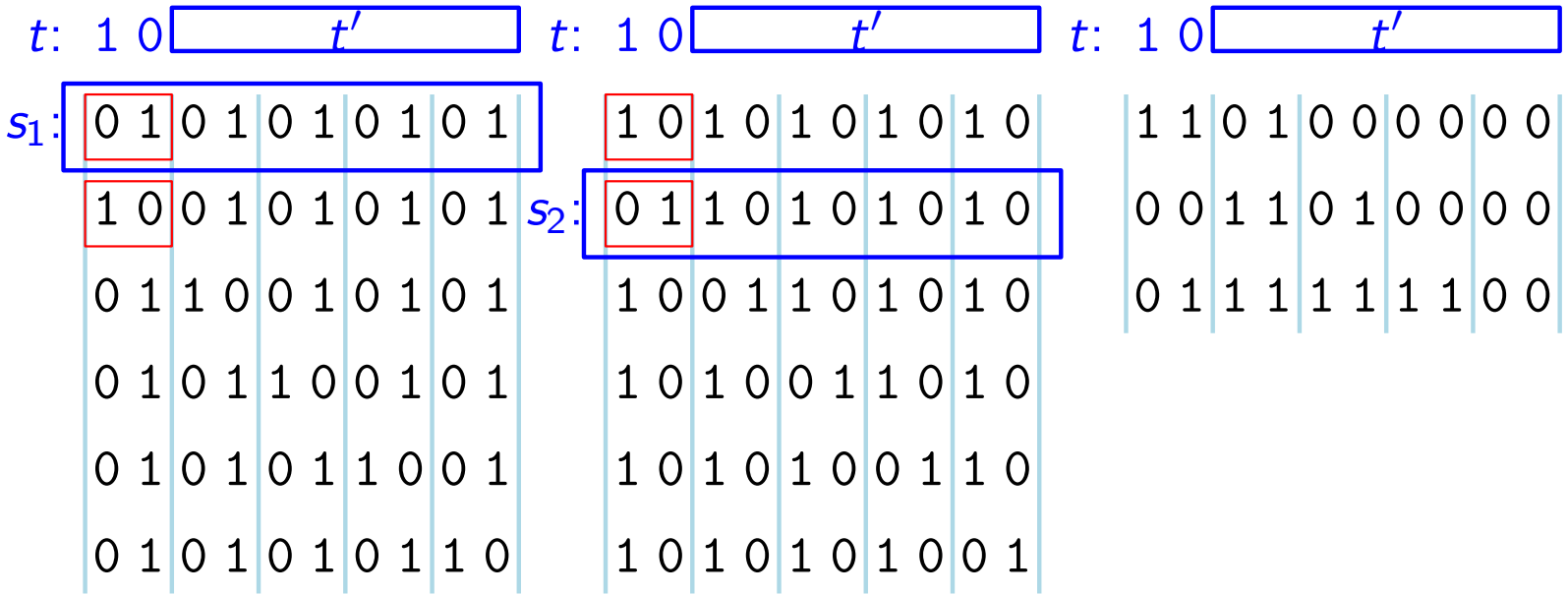
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

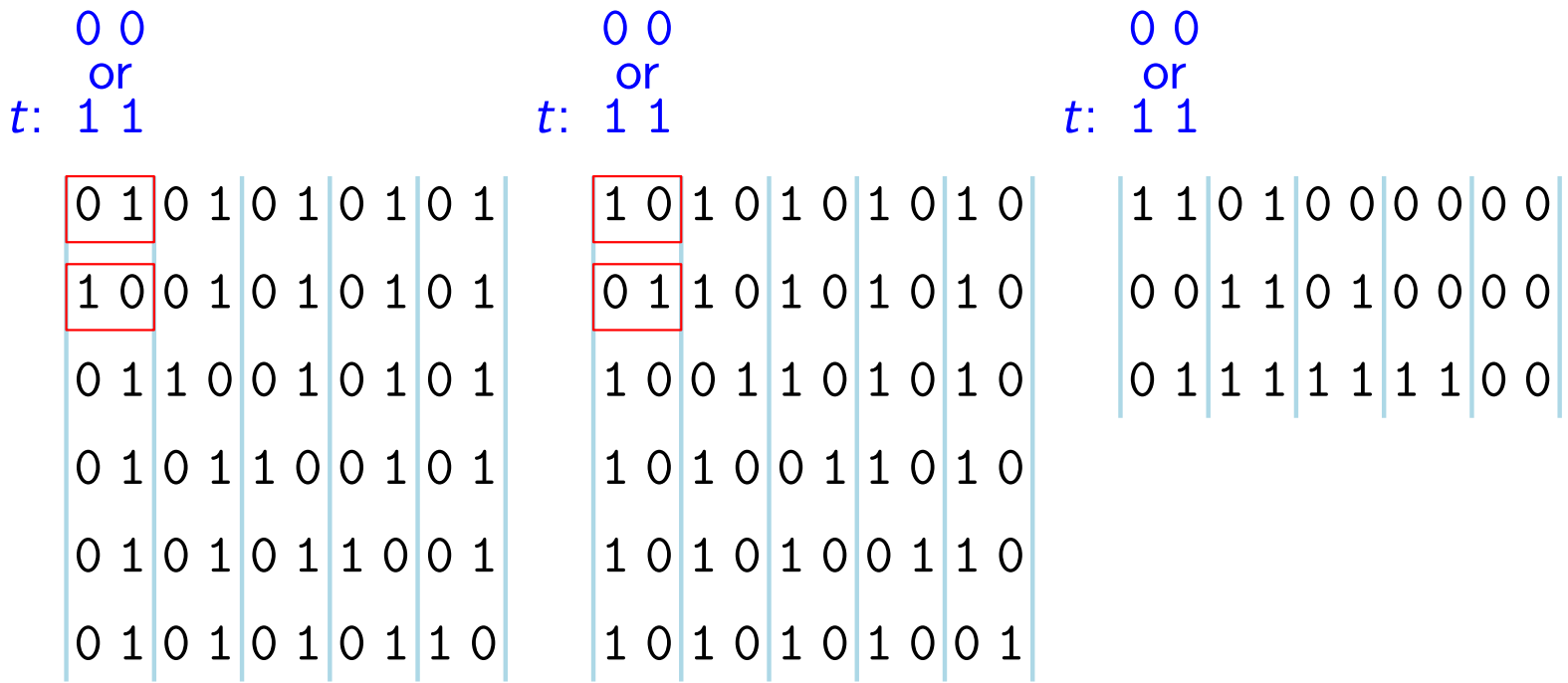
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

	0	0	0	0					
	or		or						
t:	1	1	1	1					
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

	0	0	0	0					
	or		or						
t:	1	1	1	1					
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

	0	0	0	0					
	or		or						
t:	1	1	1	1					
	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

t: 00 or 11 | 00 or 11 | 00 or 11 | 00 or 11 | 00 or 11 (each of the three blocks)

0 1	0 1	0 1	0 1	0 1
1 0	0 1	0 1	0 1	0 1
0 1	1 0	0 1	0 1	0 1
0 1	0 1	1 0	0 1	0 1
0 1	0 1	0 1	1 0	0 1
0 1	0 1	0 1	0 1	1 0

1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
0 1	1 0	1 0	1 0	1 0
1 0	0 1	1 0	1 0	1 0
1 0	1 0	0 1	1 0	1 0
1 0	1 0	1 0	0 1	1 0
1 0	1 0	1 0	1 0	0 1

1 1	0 1	0 0	0 0	0 0
0 0	1 1	0 1	0 0	0 0
0 1	1 1	1 1	1 1	0 0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して $\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在 (n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題の NP 完全性：帰着

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	or	or	or	or					
t:	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 構成した各文字列 s に対して
$\mathrm{HD}(s,t) \leq n+1$ となる文字列 t が存在
(n は f の変数の数)

最近接文字列問題／中心文字列問題の NP 完全性 (再掲)

最近接文字列問題／中心文字列問題は文字列に対する 1-センター問題

定理 (Frances, Litman '97)

最近接文字列問題 (判定問題版) は NP 完全

- $|\Sigma| = 2$ であっても NP 完全 (Frances, Litman '97)

3-SAT を帰着して，証明する

定理 (de la Higuera, Casacuberta '00)

中心文字列問題 (判定問題版) は NP 完全

- $|\Sigma| = 2$ であっても NP 完全 (Nicolas, Rivals '05)

最長共通部分列問題 (入力文字列の長さが同じ偶数の場合) を帰着して，証明する

文字列に対する直感 2

「Hamming 距離に対する問題」は「Levenshtein 距離に対する問題」と同じ程度以上に難しい

難しさを不等号で表すと

$$\text{Levenshtein 距離に対する問題} \geq \text{Hamming 距離に対する問題}$$

例：

	Levenshtein 距離	Hamming 距離
1-センター問題	NP 完全	NP 完全
1-メディアン問題	NP 完全 (de la Higuera, Casacuberta '00)	多項式時間で解ける (簡単に分かる)

$$\begin{aligned} s_1 &= \texttt{akasaka} & \mathrm{HD}(s_1, t) &= 1 \\ s_2 &= \texttt{asakusa} & \mathrm{HD}(s_2, t) &= 3 \\ s_3 &= \texttt{isasaka} & \mathrm{HD}(s_3, t) &= 1 \\ \rightsquigarrow\ t &= \texttt{asasaka} & \text{和} &= 4 \end{aligned}$$

目次

今日のまとめ と 次回の内容

今日の目標

文字列に関する問題の NP 困難性を扱う

- 最長共通部分列問題
- 文字列のクラスタリング問題

次回の予告

全体のまとめ と 最近の話題

- 「NP 完全問題」であると分かったら，どうすればよいのか？
- 「多項式時間で解ける」と分かったら，それでよいのか？

文献案内

- C. de la Higuera, F. Casacuberta, Topology of strings: median string is NP-complete Theoretical Computer Science 230 (2000) pp. 39–48.
- M. Frances, A. Litman, On covering problems of codes. Theory of Computing Systems 30 (1997) pp. 113–119.
- D. Maier, The complexity of some problems on subsequences and supersequences. Journal of the Association for Computing Machinery 25 (1978) pp. 322–336.
- F. Nicolas, E. Rivals, Hardness results for the center and median string problems under the weighted and unweighted distances. Journal of Discrete Algorithms 3 (2005) pp. 390–415.
- R. Wagner, M. Fisher, The string-to-string correction problem. Journal of the Association for Computing Machinery 21 (1974) pp. 168–178.