離散最適化基礎論　第 11 回
計算幾何学に関する問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 1 月 7 日

最終更新：2020 年 1 月 13 日　11:48

スケジュール 前半

⋆	休み (大学院入学式)	(10/1)
1	アルゴリズム的問題解決と計算複雑性	(10/8)
2	速習 P vs NP 問題	(10/15)
⋆	休み (祝日)	(10/22)
3	充足可能性問題とその変種	(10/29)
4	グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択	(11/5)
5	グラフに関する問題 (2)：経路の選択	(11/12)
6	集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連	(11/19)
7	集合族に関する問題 (2)：発展	(11/26)

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)

- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)

11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)

- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

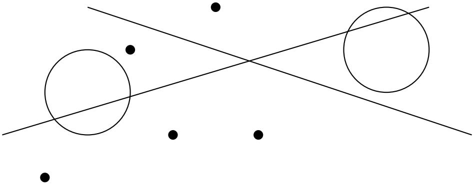
今日の目標

計算幾何学に関する問題の NP 困難性を扱う

- 幾何的被覆問題
- 幾何的巡回セールスマン問題

計算幾何学

「点」,「直線」,「平面」などといった幾何学的対象に対する
情報処理を探究する研究分野



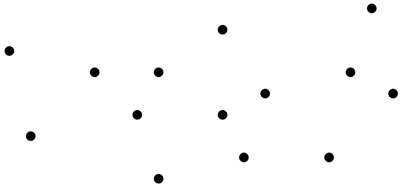
目次

単位円被覆問題

単位円被覆問題：単位円を用いて点を覆う

単位円被覆問題 (最適化問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- 出力：単位円の集合 $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ で，
  $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \exists\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}\colon P_i \in D_j$
- 評価：単位円の総数 m の最小化

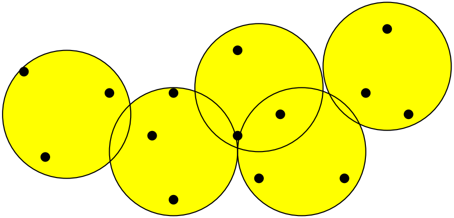


ここで「円」は「円板」を表すこととする

単位円被覆問題：単位円を用いて点を覆う

単位円被覆問題 (最適化問題版)

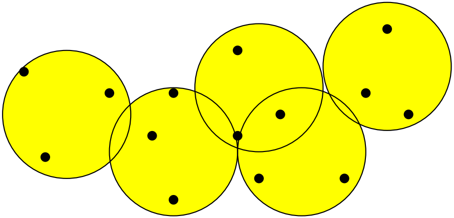
- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- 出力：単位円の集合 $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ で，
  $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \exists\, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \colon P_i \in D_j$
- 評価：単位円の総数 m の最小化



ここで「円」は「円板」を表すこととする

単位円被覆問題 (判定問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$， $m \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes または No
- 条件：m 個の単位円で $P_1, \ldots, P_n$ を覆える $\Rightarrow$ Yes
  m 個の単位円で $P_1, \ldots, P_n$ を覆えない $\Rightarrow$ No



ここで「円」は「円板」を表すこととする

定理 (Fowler, Paterson, Tanimoto '81)

単位円被覆問題 (判定問題版) は強 NP 完全

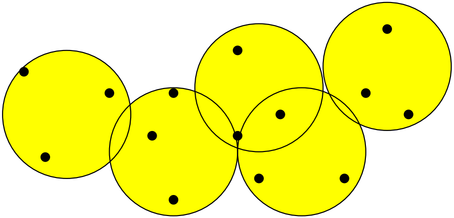
定理を証明するためには，次を証明すればよい

- 入力数値が 1 進符号化されるとき
  単位円被覆問題 (判定問題版) が NP に所属すること
- 入力数値が 1 進符号化された単位円被覆問題 (判定問題版) に
  平面的 3-SAT が多項式時間多対一帰着可能であること

$\boxed{\text{Yes 入力の証拠}}$：n 個の点を覆う単位円 $D_1, D_2, \ldots, D_m$

多項式時間検証アルゴリズム

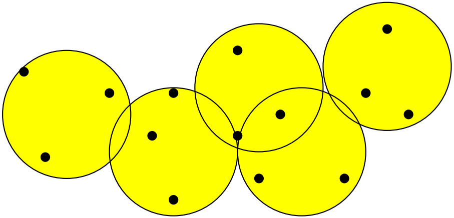
1. 各点 P_i と各円 D_j の中心 C_j の距離の 2 乗を計算して，それが 1 以下かどうか，調べる
2. すべての点 P_i に対して，ある円 D_j の中心との距離の 2 乗が 1 以下であれば，よい



$\boxed{\text{Yes 入力の証拠}}$：n 個の点を覆う単位円 $D_1, D_2, \ldots, D_m$???

多項式時間検証アルゴリズム ???

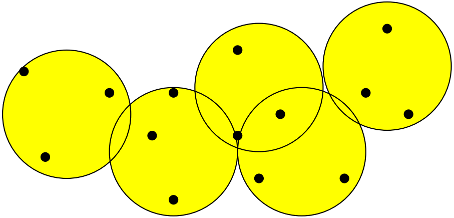
1. 各点 P_i と各円 D_j の中心 C_j の距離の 2 乗を計算して，それが 1 以下かどうか，調べる
2. すべての点 P_i に対して，ある円 D_j の中心との距離の 2 乗が 1 以下であれば，よい



注意すべきこと

単位円の中心の座標がどう表されるか？

単位円の中心の座標を入力の多項式長で表せないかもしれない



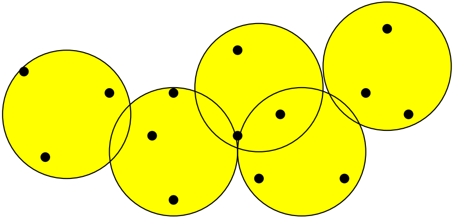
単位円の中心の座標 C_j が入力の多項式長で表せない

$\Rightarrow$ P_i と C_j の距離の 2 乗が多項式時間で計算できない

$\Rightarrow$ 検証アルゴリズムが多項式時間で終了しない

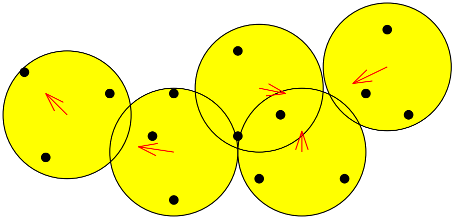
観察

与えられた n 個の点を m 個の単位円で覆える $\Rightarrow$
m 個の単位円として，与えられた点の中の 2 つを境界に持つものを使うことができる



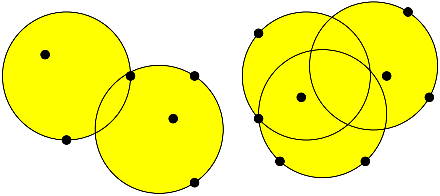
観察

与えられた n 個の点を m 個の単位円で覆える $\Rightarrow$
m 個の単位円として，与えられた点の中の 2 つを境界に持つものを使うことができる



観察

与えられた n 個の点を m 個の単位円で覆える $\Rightarrow$
m 個の単位円として，与えられた点の中の 2 つを境界に持つものを使うことができる



2 点を通る単位円の中心 (1)

2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を境界に持つ単位円の中心の座標 (x, y) を計算する

- (x, y) は次を満たす

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 1 \qquad \text{(式 1)}$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = 1 \qquad \text{(式 2)}$$

- 「(式 1) − (式 2)」より次が得られる

$$(x - x_1)^2 - (x - x_2)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_2)^2 = 0$$
$$\therefore \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 2y) = 0 \qquad \text{(式 3)}$$

- 式 (1) と式 (3) より，次が得られる (復号同順)

$$x = \frac{(x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2},$$
$$y = \frac{(y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2}$$

ただし，$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を境界に持つ単位円 D が点 (x_3, y_3) を覆う

$\Leftrightarrow$ $(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 \leq 1$ 　　(ただし，(x, y) は単位円 D の中心)

$$\Leftrightarrow \left(x_3 - \frac{(x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{(y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2}\right)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(2x_3d^2 - \left((x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}\right)\right)^2 + \left(2y_3d^2 - \left((y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}\right)\right)^2 \leq 4d^4$$

つまり，任意の有理数 $A, B, C \geq 0$ に対して
「$A - B\sqrt{C} \leq 0$」であることが判定できれば
(x_1, y_1)，(x_2, y_2) を境界に持つ単位円が点 (x_3, y_3) を覆うか分かる

解ければよい問題

任意の有理数 $A, B, C \geq 0$ に対して「$A \leq B\sqrt{C}$」かの判定

場合分け

1. $A \leq 0 \leq B$ の場合：$A \leq B\sqrt{C}$ となる
2. $B < 0 \leq A$ の場合：$A \leq B\sqrt{C}$ とならない
3. $0 \leq A$ かつ $0 \leq B$ の場合：「$A^2 \leq B^2 C$」を判定する
4. $A \leq 0$ かつ $B \leq 0$ の場合：「$A^2 \geq B^2 C$」を判定する

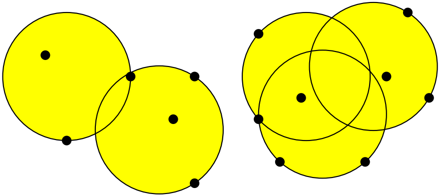
結論

3 点 P_1, P_2, P_3 に対して，
P_1, P_2 を境界に持つ単位円 D が P_3 を覆うことの判定は
P_1, P_2, P_3 の座標の値の多項式時間で行なえる

$\boxed{\text{Yes 入力の証拠}}$：n 個の点を覆う単位円 $D_1, D_2, \ldots, D_m$
(各 D_j はその境界上の 2 点と復号の符号で定める)

多項式時間検証アルゴリズム

1. 各点 P_i と各円 D_j の中心 C_j の距離の 2 乗を計算して，それが 1 以下かどうか，調べる
2. すべての点 P_i に対して，ある円 D_j の中心との距離の 2 乗が 1 以下であれば，よい



定理 (Fowler, Paterson, Tanimoto '81)

単位円被覆問題 (判定問題版) は強 NP 完全

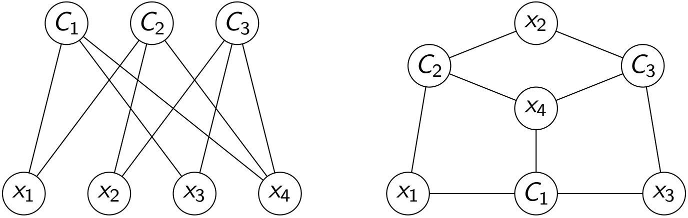
定理を証明するためには，次を証明すればよい

- 入力数値が 1 進符号化されるとき
  単位円被覆問題 (判定問題版) が NP に所属すること (済)
- 入力数値が 1 進符号化された単位円被覆問題 (判定問題版) に
  平面的 3-SAT が多項式時間多対一帰着可能であること

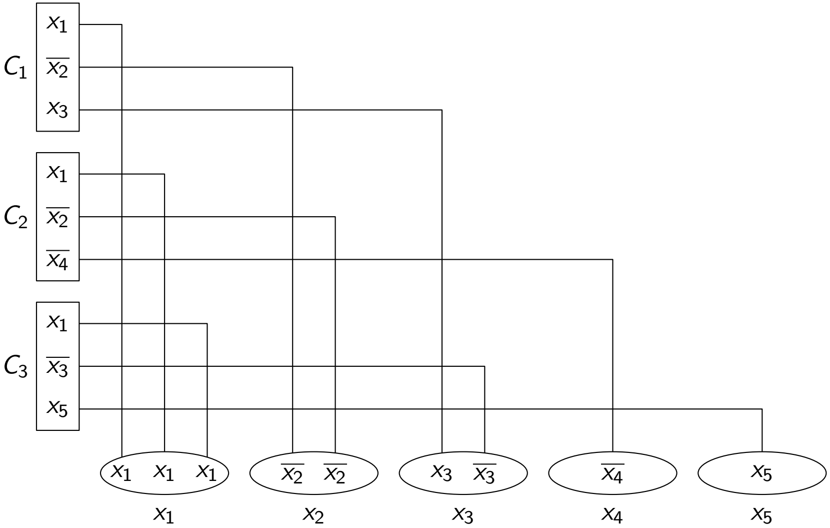
平面的 3-SAT

- 入力：整数 $n \geq 1$，3-CNF 論理式 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
  ただし，f の接続グラフは平面的グラフ
- 出力：Yes または No
- 条件：f が充足可能である $\Rightarrow$ Yes
  f が充足可能でない $\Rightarrow$ No

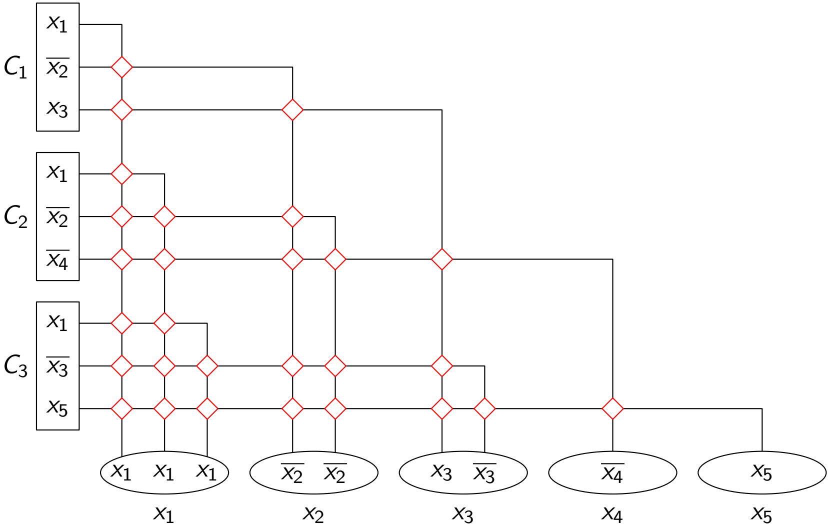
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



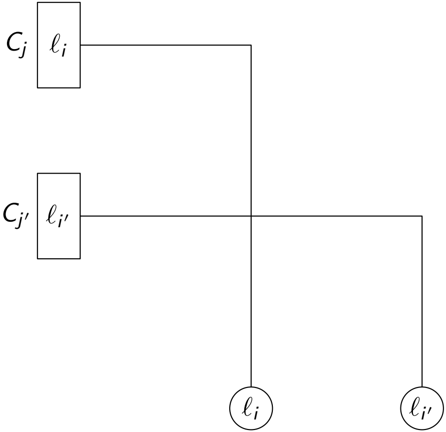
前回の講義では，3-SAT を平面的 3-SAT に帰着した



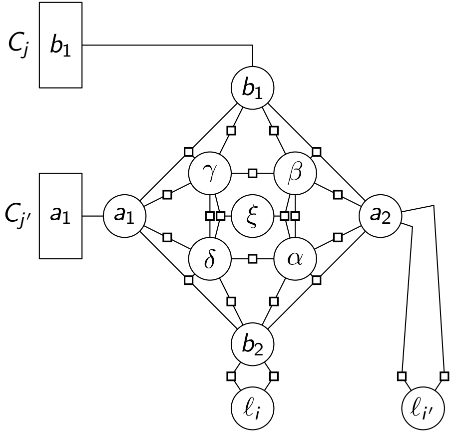
前回の講義では，3-SAT を平面的 3-SAT に帰着した



交差解消ガジェット

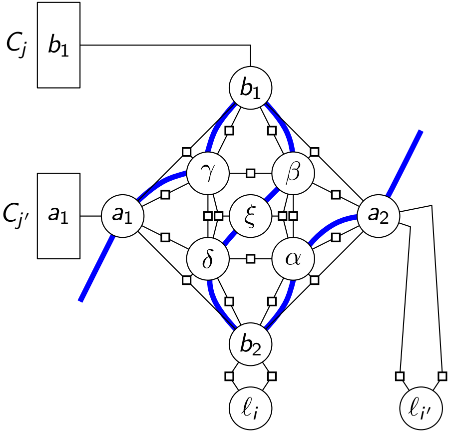


交差解消ガジェット

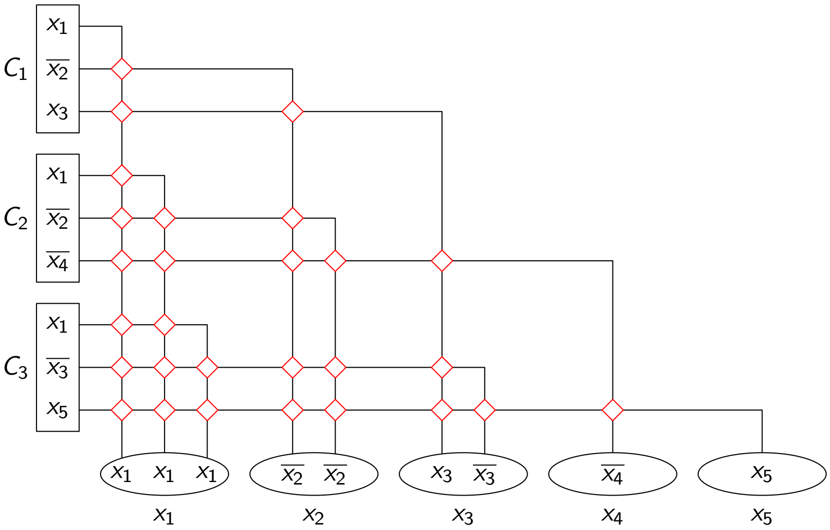


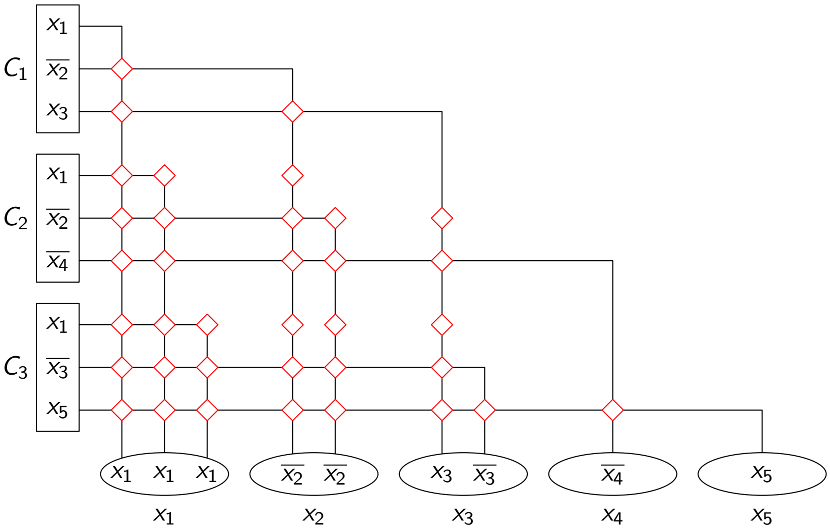
平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (2)

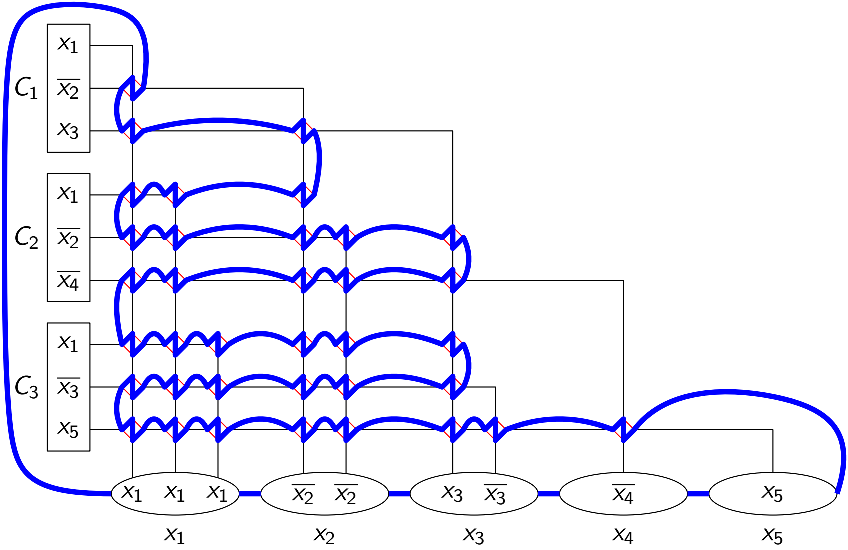
交差解消ガジェット



追加した変数頂点のみを通過し，辺と交差しない曲線を描ける


C_1
x_1
$\overline{x_2}$
x_3
C_2
x_1
$\overline{x_2}$
$\overline{x_4}$
C_3
x_1
$\overline{x_3}$
x_5
x_1 x_1 x_1
$\overline{x_2}$ $\overline{x_2}$
x_3 $\overline{x_3}$
$\overline{x_4}$
x_5
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5

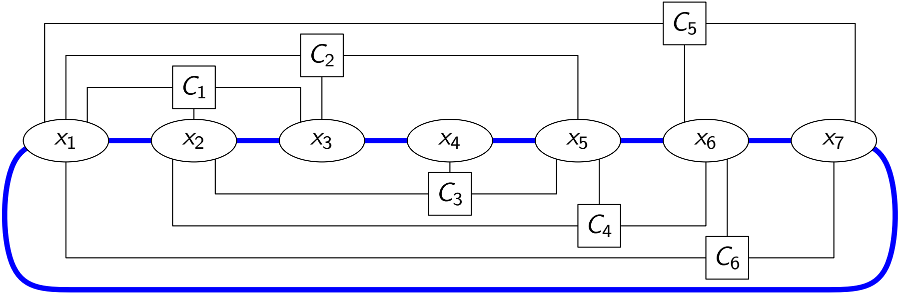

C_1
x_1
$\overline{x_2}$
x_3
C_2
x_1
$\overline{x_2}$
$\overline{x_4}$
C_3
x_1
$\overline{x_3}$
x_5
x_1 x_1 x_1
$\overline{x_2}$ $\overline{x_2}$
x_3 $\overline{x_3}$
$\overline{x_4}$
x_5
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5



変数頂点のみを通過し，辺と交差しない閉曲線を描ける

平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (4)

描き方を連続的に変形させることで，次のように描ける

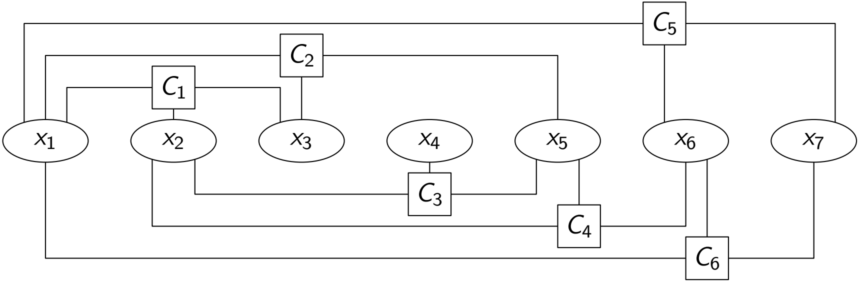


- 変数頂点が水平線上に並ぶ
- 節頂点がその水平線の上と下に辺交差なく並ぶ
- 辺は軸平行な線分で構成される

つまり，このように描ける接続グラフを持つ 3-SAT に限っても NP 完全
(Knuth, Raghunathan '92; 詳しい説明は Tippenhauer '16)

平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (4)

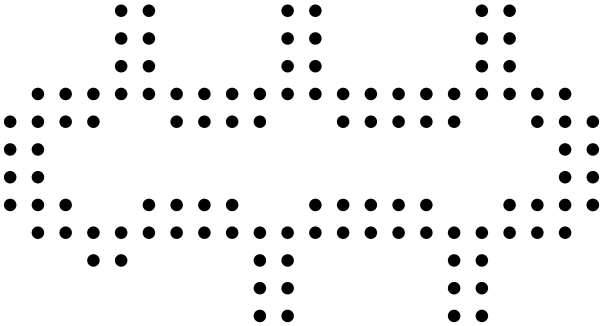
描き方を連続的に変形させることで，次のように描ける



- 変数頂点が水平線上に並ぶ
- 節頂点がその水平線の上と下に辺交差なく並ぶ
- 辺は軸平行な線分で構成される

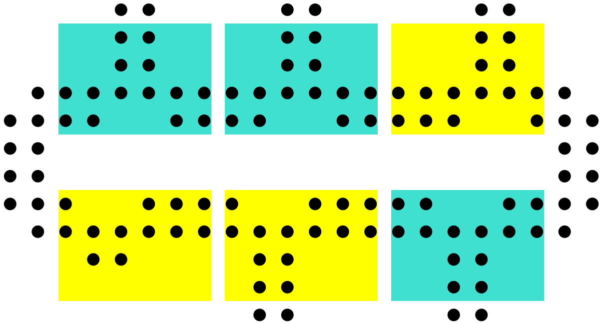
つまり，このように描ける接続グラフを持つ 3-SAT に限っても NP 完全
(Knuth, Raghunathan '92; 詳しい説明は Tippenhauer '16)

変数ガジェット



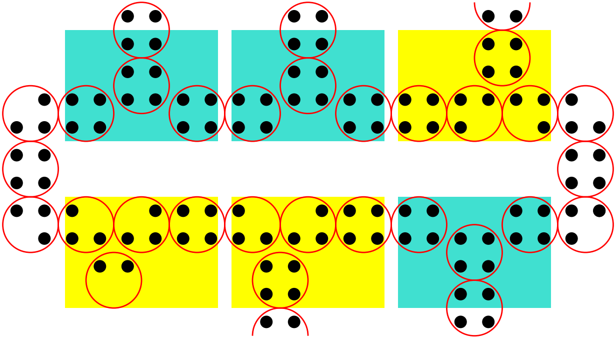
変数 x_i に対応するガジェット：
入力の論理式に x_i が 2 回，$\overline{x_i}$ が 3 回出現する場合

変数ガジェット



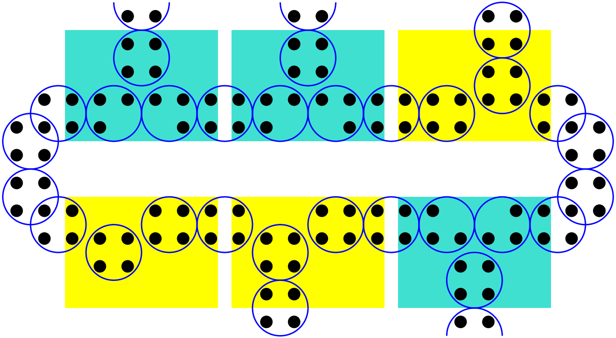
変数 x_i に対応するガジェット：
入力の論理式に x_i が 2 回，$\overline{x_i}$ が 3 回出現する場合

変数ガジェット



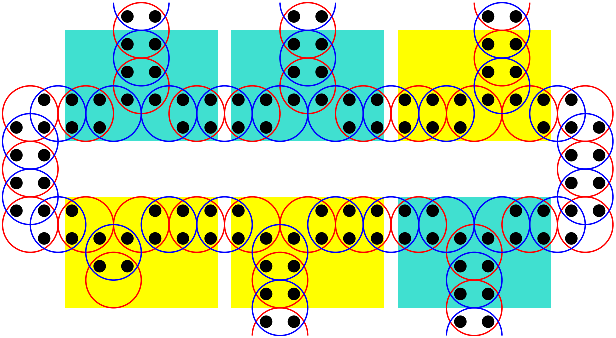
変数 x_i に対応するガジェット：
入力の論理式に x_i が 2 回，$\overline{x_i}$ が 3 回出現する場合

変数ガジェット



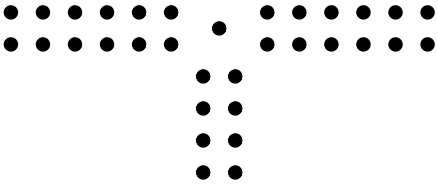
変数 x_i に対応するガジェット：
入力の論理式に x_i が 2 回，$\overline{x_i}$ が 3 回出現する場合

変数ガジェット



変数 x_i に対応するガジェット：
入力の論理式に x_i が 2 回，$\overline{x_i}$ が 3 回出現する場合

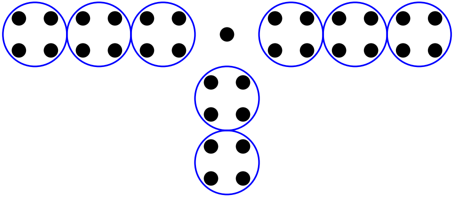
節ガジェット



節 C_j に対応するガジェット

- C_j に含まれるリテラルにすべて 0 が割り当てられると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円が必要となる
- C_j に含まれるリテラルの中に 1 が割り当てられるものがあると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円を必要としない

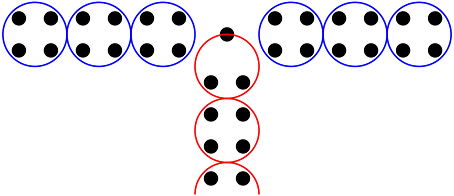
節ガジェット



節 C_j に対応するガジェット

- C_j に含まれるリテラルにすべて 0 が割り当てられると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円が必要となる
- C_j に含まれるリテラルの中に 1 が割り当てられるものがあると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円を必要としない

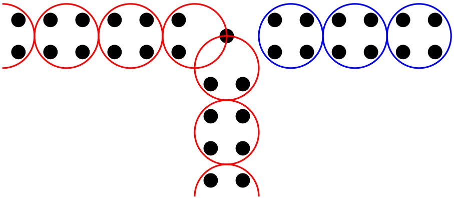
節ガジェット



節 C_j に対応するガジェット

- C_j に含まれるリテラルにすべて 0 が割り当てられると
  中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円が必要となる
- C_j に含まれるリテラルの中に 1 が割り当てられるものがあると
  中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円を必要としない

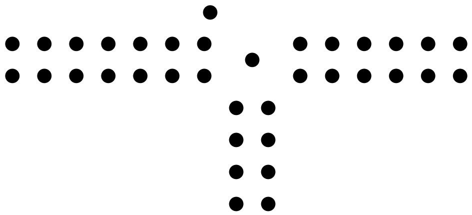
節ガジェット



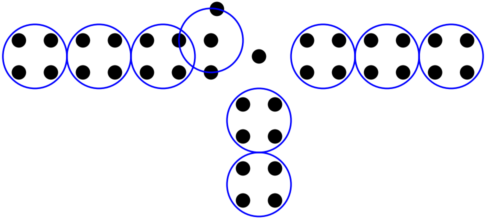
節 C_j に対応するガジェット

- C_j に含まれるリテラルにすべて 0 が割り当てられると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円が必要となる
- C_j に含まれるリテラルの中に 1 が割り当てられるものがあると中央の点を覆うために，もう 1 つ単位円を必要としない

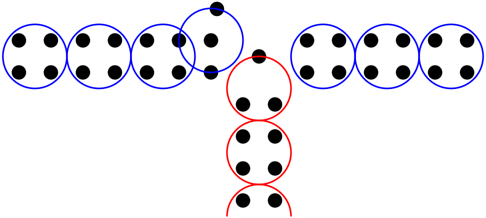
節ガジェット：偶奇が合わないとき



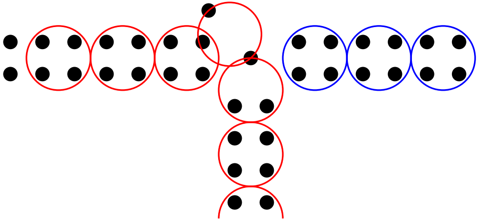
節ガジェット：偶奇が合わないとき



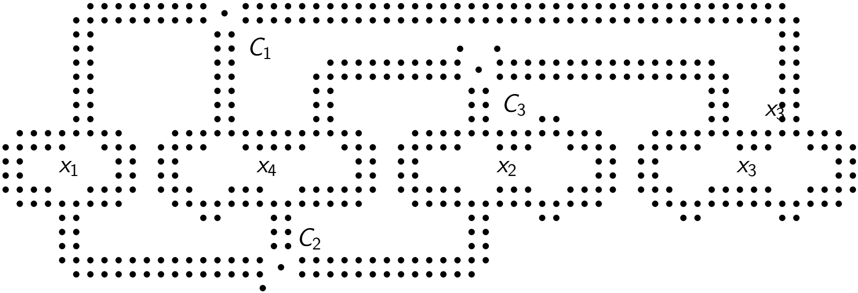
節ガジェット：偶奇が合わないとき



節ガジェット：偶奇が合わないとき



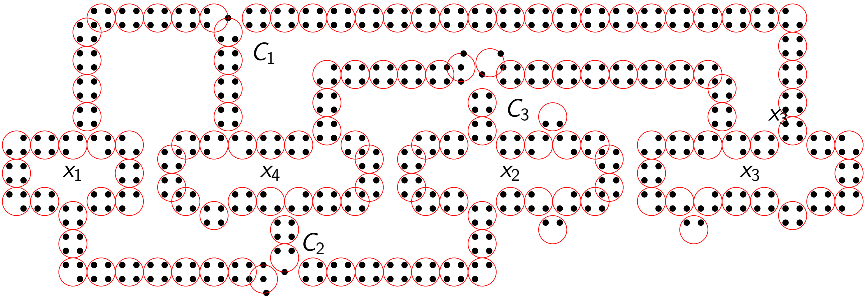
全体像



$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

これは多項式時間帰着

全体像



$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

- 充足割当：$x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 1, x_4 \mapsto 0$

これは多項式時間帰着

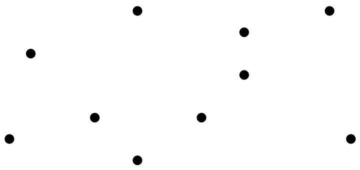
目次

1. 単位円被覆問題
2. 幾何的巡回セールスマン問題
3. 今日のまとめ と 次回の予告

幾何的巡回セールスマン問題

幾何的巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

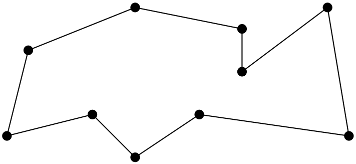
- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- 出力：$P_1, P_2, \ldots, P_n$ をちょうど一度ずつ通り，戻る経路
- 評価：経路長の最小化



出力条件を満たす経路を**巡回路** (tour) と呼ぶことがある

幾何的巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

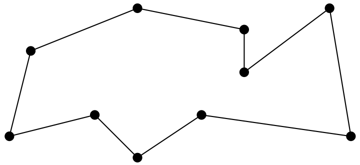
- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- 出力：$P_1, P_2, \ldots, P_n$ をちょうど一度ずつ通り，戻る経路
- 評価：経路長の最小化



出力条件を満たす経路を巡回路 (tour) と呼ぶことがある

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
  $k \in \mathbb{Q}$
- 出力：Yes または No
- 条件：長さが k 以下の巡回路がある $\Rightarrow$ Yes
  長さが k 以下の巡回路がない $\Rightarrow$ No



定理 (Garey, Graham, Johnson '76; Papadimitriou '77)

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版) は強 NP<u>困難</u>

証明は省略

- 原論文では，集合分割問題を帰着している

未解決問題

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版) は NP に所属するか？

幾何的巡回セールスマン問題：NP に所属するか？

なぜ，幾何的巡回セールスマン問題が NP に所属するか，分からないのか？

未解決：次の判定問題が多項式時間で解けるか

- 入力：自然数 $n \geq 1$，正の整数列 $a_1, \ldots, a_n$ と $b_1, \ldots, b_n$
- 出力：Yes または No
- 条件：次の式が成立する $\Rightarrow$ Yes
  次の式が成立しない $\Rightarrow$ No

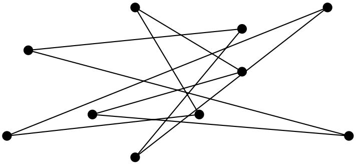
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}$$

これは「2 つの巡回路の長さの比較」に対応

- つまり,「2 つの巡回路から，長さの小さい方を選ぶ」ことが多項式時間でできるかどうか，分かっていない

幾何的最大巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

- 入力：整数 $n \geq 1$，平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- 出力：$P_1, P_2, \ldots, P_n$ をちょうど一度ずつ通り，戻る経路
- 評価：経路長の最大化



未解決問題

幾何的最大巡回セールスマン問題は多項式時間で解けるか？

NP 困難であるかも，分かっていない

目次

今日のまとめ

今日の目標

計算幾何学に関する問題の NP 困難性を扱う

- 幾何的被覆問題
- 幾何的巡回セールスマン問題

- R. J. Fowler, M. S. Paterson, S. L. Tanimoto, Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. Information Processing Letters 12 (1981) pp. 133–137.
- M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, Some NP-complete geometric problems. Proceedings of 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1976) pp. 10–22.
- D. E. Knuth, A. Raghunathan, The problem of compatible representatives. SIAM Journal on Discrete Mathematics 5 (1992) pp. 422–427.
- C. Papadimitriou, The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete. Theoretical Computer Science 4 (1977) pp. 237–244.
- S. Tippenhauer, On planar 3-SAT and its variants. Masterarbeit, Freien Universität Berlin, 2016.