

離散最適化基礎論 第 10 回
平面性に関わる問題

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 12 月 17 日

最終更新 : 2019 年 12 月 17 日 16:13

- ★ 休み (大学院入学式) (10/1)
- 1 アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
- 2 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ★ 休み (祝日) (10/22)
- 3 充足可能性問題とその変種 (10/29)
- 4 グラフに関する問題 (1) : 部分集合の選択 (11/5)
- 5 グラフに関する問題 (2) : 経路の選択 (11/12)
- 6 集合族に関する問題 (1) : グラフとの関連 (11/19)
- 7 集合族に関する問題 (2) : 発展 (11/26)

- | | | |
|----|-----------------------|-------------|
| 8 | 数値が関わる問題 (1) : 2 分割問題 | (12/3) |
| 9 | 数値が関わる問題 (2) : 3 分割問題 | (12/10) |
| 10 | 平面性が関わる問題 | (12/17) |
| ★ | 冬期休業 | (12/24, 31) |
| 11 | 計算幾何学に関する問題 | (1/7) |
| 12 | 文字列に関する問題 | (1/14) |
| 13 | アルゴリズム的問題解決 : 再考 | (1/21) |
| 14 | 予備 | (1/28) |
| ★ | 休講 | (2/4) |
| ★ | 祝日のため休み | (2/11) |

注意 : 予定の変更もありうる

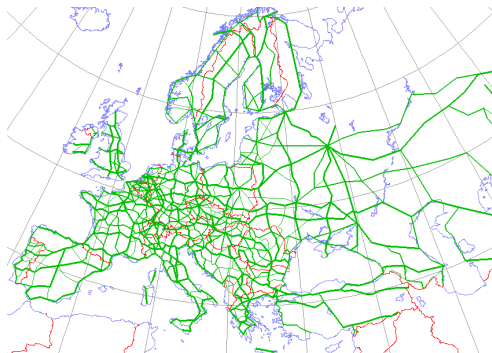
今日の目標

平面性に関わる問題の NP 完全性を扱う

- ▶ 平面的グラフに関する問題
- ▶ 平面的充足可能性問題

鍵となる概念：交差解消ガジェット

- 現実問題では、「任意の無向グラフ」が入力として与えられるわけではなく「ある種の特徴を持つ無向グラフ」が入力として与えられることが多い
- ▶ **平面性**はそのような特徴の1つ



http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

そのような「ある種の特徴」を問題解決に活かしたい

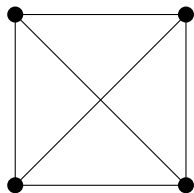
- ① 平面的グラフ
- ② 平面的グラフにおける 3 彩色問題
- ③ 平面的グラフにおける独立集合問題
- ④ 平面的充足可能性問題
- ⑤ 今日のまとめ と 次回の予告

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：平面的グラフとは？

G が**平面的** (planar) であるとは、
 G を平面上に辺交差なく描けること

例：頂点数 4 の完全グラフは平面的



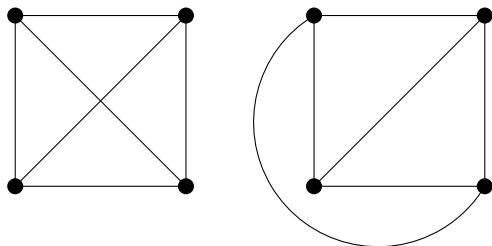
注：平面的ではないグラフが存在する

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：平面的グラフとは？

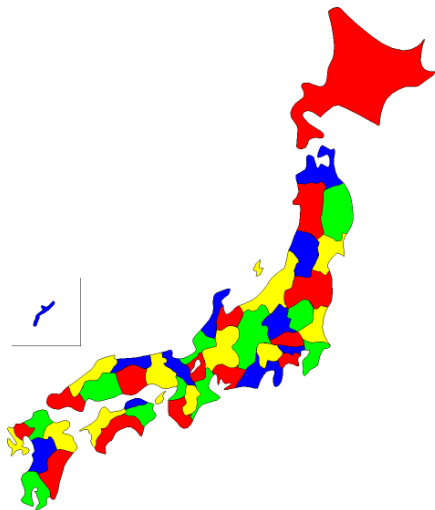
G が**平面的** (planar) であるとは、
 G を平面上に辺交差なく描けること

例：頂点数 4 の完全グラフは平面的

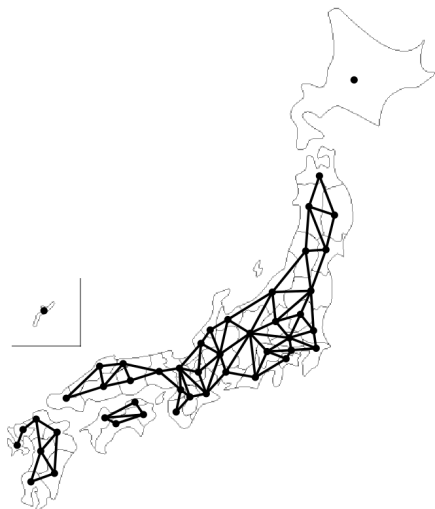


注：平面的ではないグラフが存在する

地図の彩色



地図からグラフへ \rightsquigarrow 平面的グラフにおける彩色問題

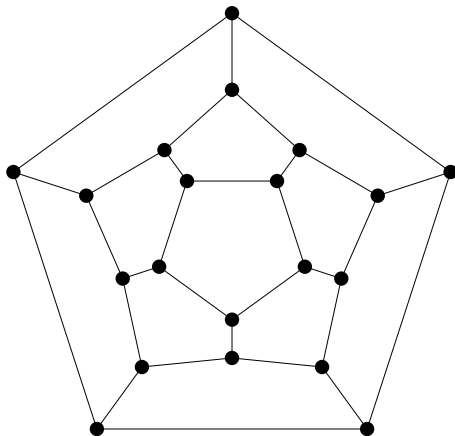


イコシアン・ゲーム (ハミルトン卿の問題)



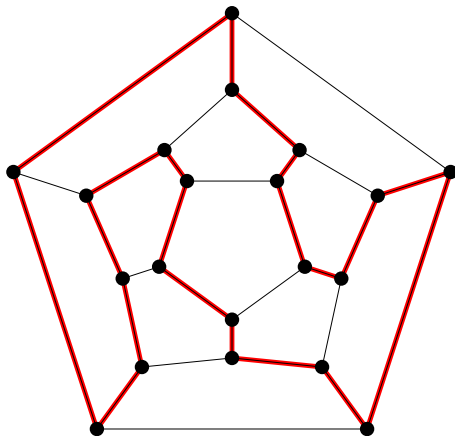
<https://godandmath.com/2012/03/29/christian-mathematicians-hamilton/>

イコシアン・ゲーム (ハミルトン卿の問題)



⇒ 平面的グラフにおけるハミルトン閉路問題

イコシアン・ゲーム (ハミルトン卿の問題)



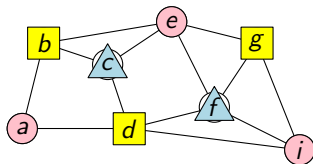
⇒ 平面的グラフにおけるハミルトン閉路問題

- ① 平面的グラフ
- ② 平面的グラフにおける3彩色問題
- ③ 平面的グラフにおける独立集合問題
- ④ 平面的充足可能性問題
- ⑤ 今日のまとめ と 次回の予告

平面的グラフにおける 3 彩色問題

- ▶ 入力：平面的グラフ G
- ▶ 出力：Yes か No
- ▶ 条件： G が 3 彩色を持つ \Rightarrow Yes
 G が 3 彩色を持たない \Rightarrow No

無向グラフ G の 3 彩色とは、頂点を 3 色で塗る方法で、どの辺の両端点も同じ色にならないもの



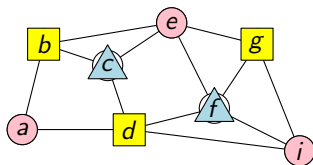
注：平面的グラフは必ず 4 彩色を持つ (四色定理 (Appel, Haken '77))

定理 (Garey, Johnson, Stockmeyer '76)

平面的グラフにおける 3 彩色問題は NP 完全

これを証明するためには、次を証明すればよい

- ▶ 平面的グラフにおける 3 彩色問題が NP に所属すること
- ▶ 3 彩色問題が 平面的グラフにおける 3 彩色問題に多項式時間多対一帰着可能であること



- ▶ 既に知っていること :
入力を平面的グラフに限定しない 3 彩色問題は NP に所属する
- ▶ 事実 :
平面的グラフはグラフ
- ▶ この 2 つを組み合わせると :
平面的グラフに入力を限定しても, 3 彩色問題は NP に所属する

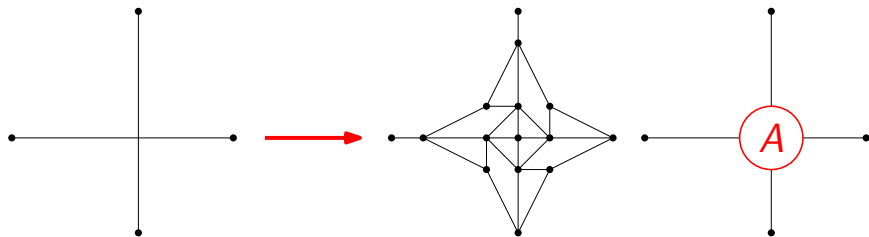
3 彩色問題の入力は平面的グラフではないかもしれない

基本的な考え方

平面的ではないグラフ を 平面的グラフ に 変換する

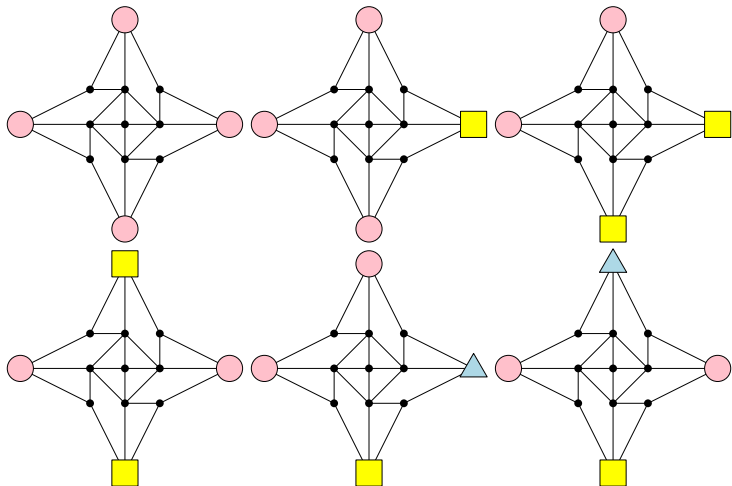
↪ 交差解消ガジェット (crossover gadget)

グラフの中に交差があったら、それを次のように置き換える

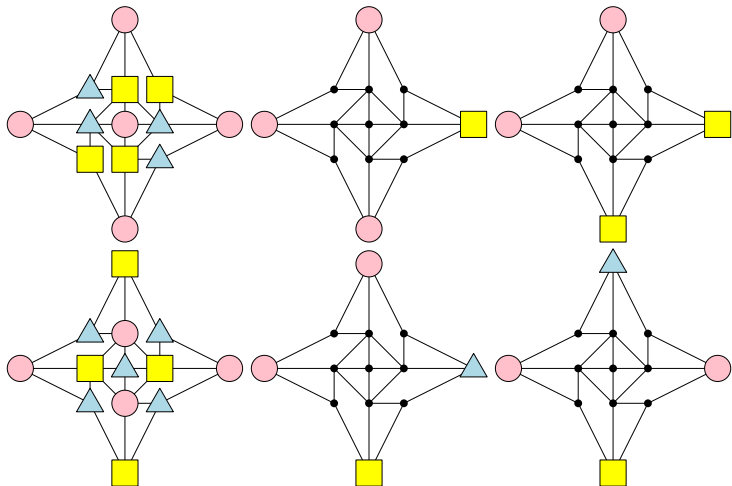


右のように「A」を使って、略記する

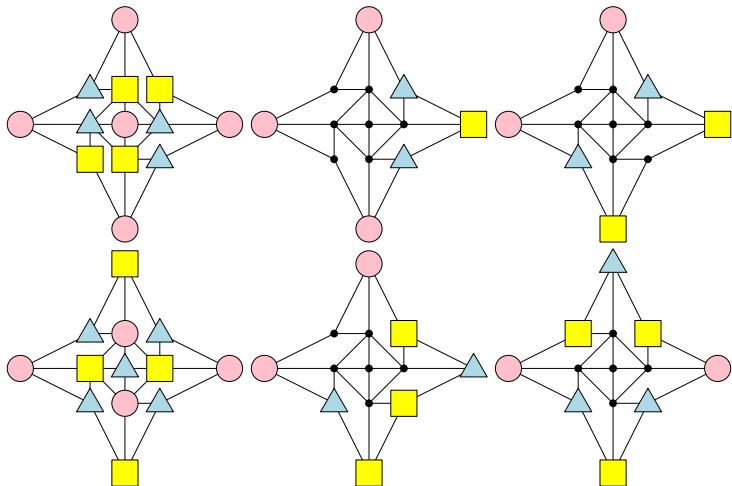
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える



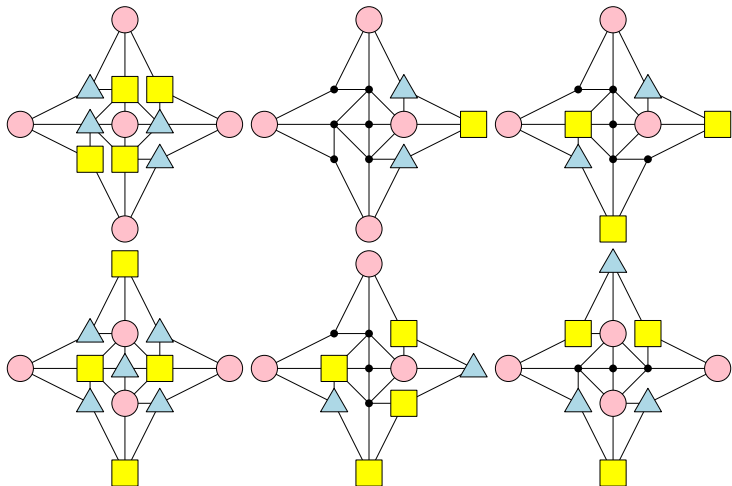
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える



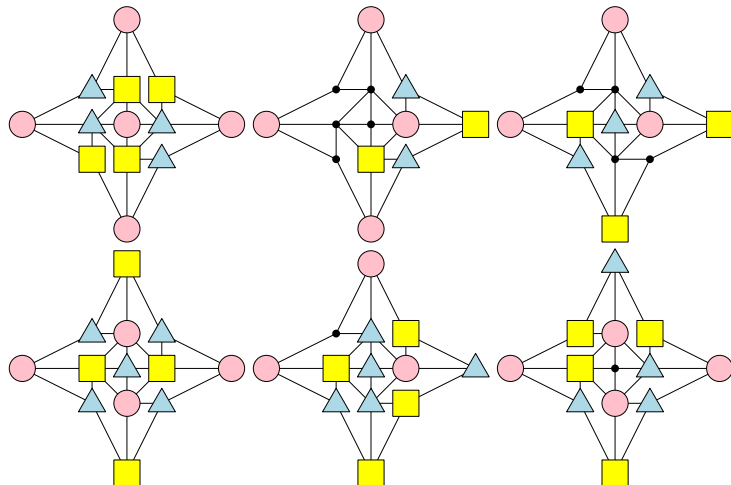
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える



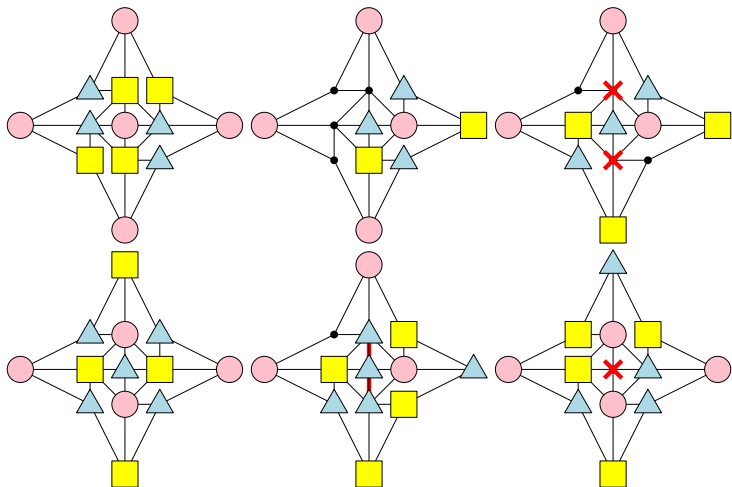
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える



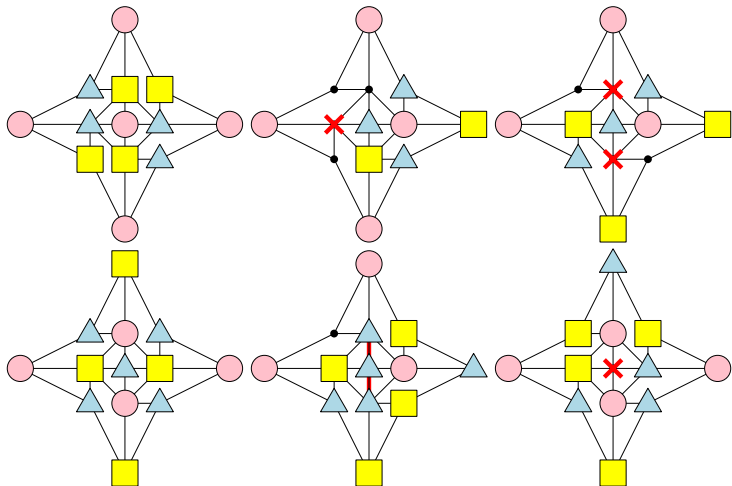
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える



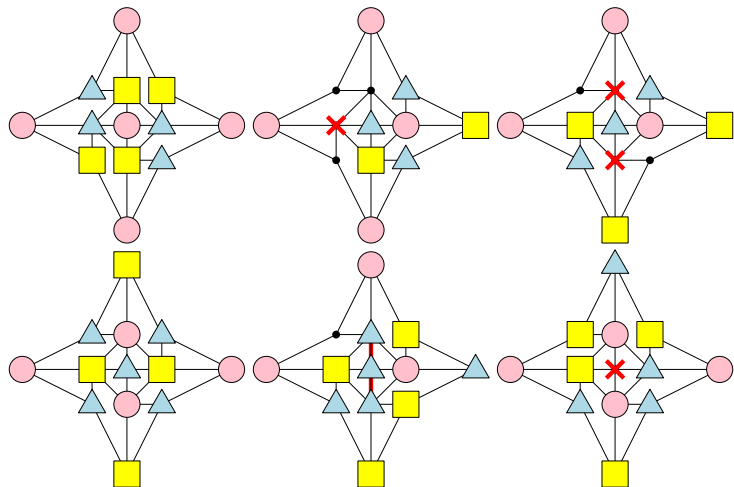
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか，考える



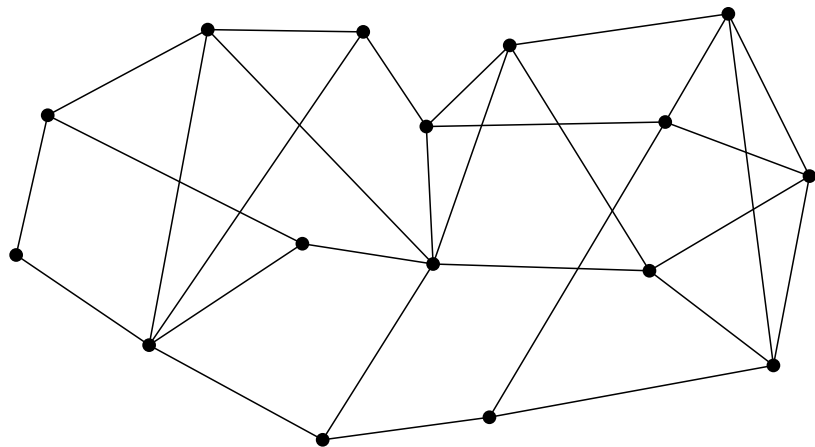
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える

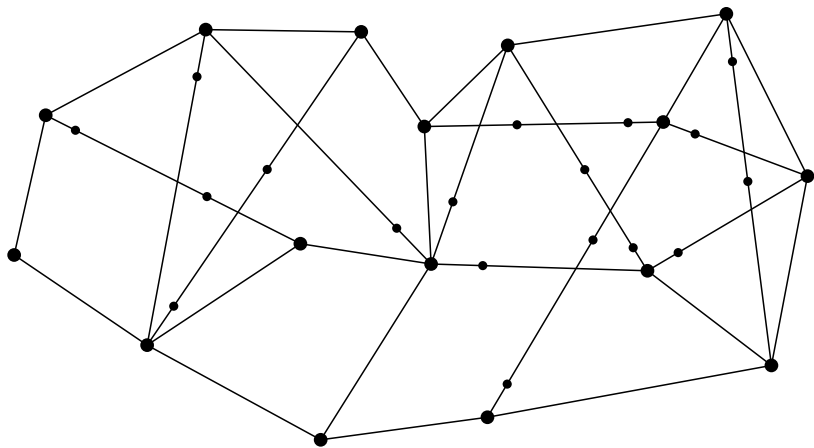


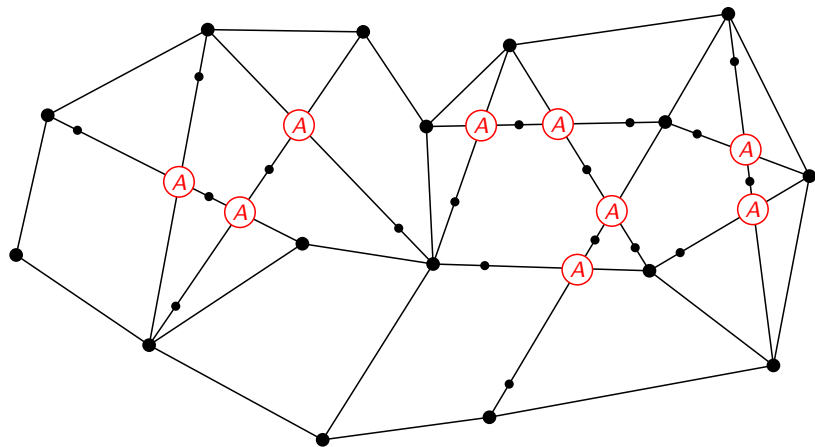
置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか, 考える

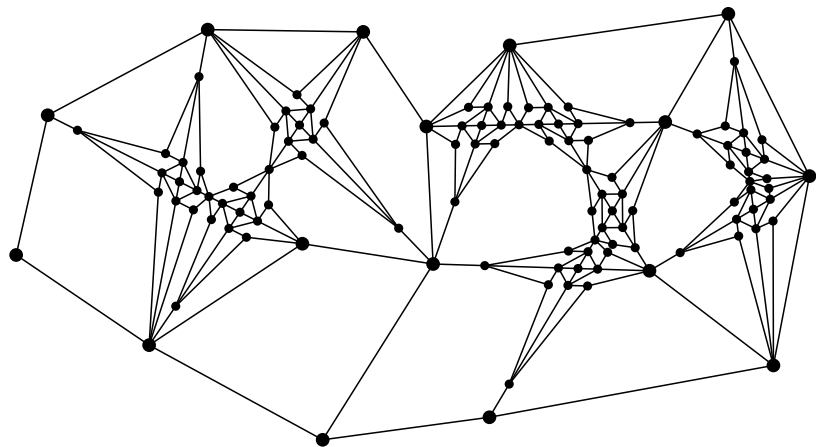


⇒ 「上と下」と「左と右」の色が同じでないと, 3 色で塗れない

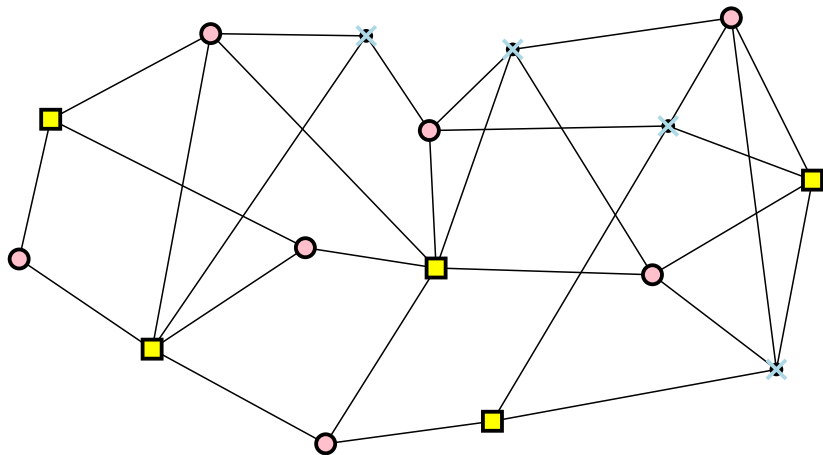




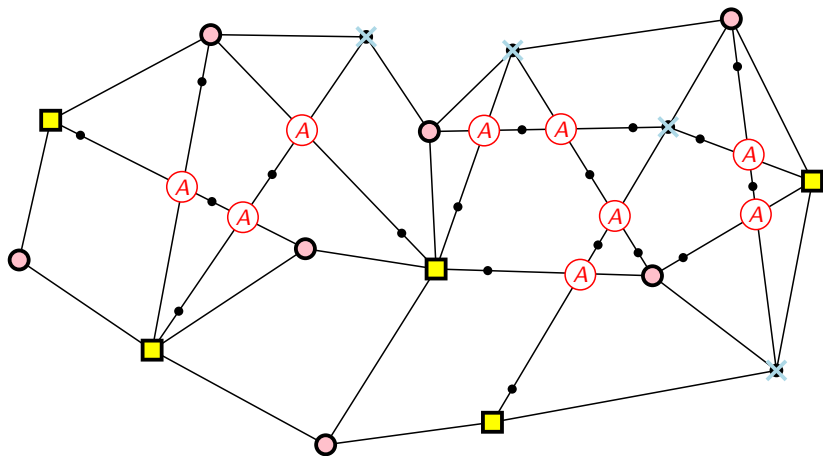


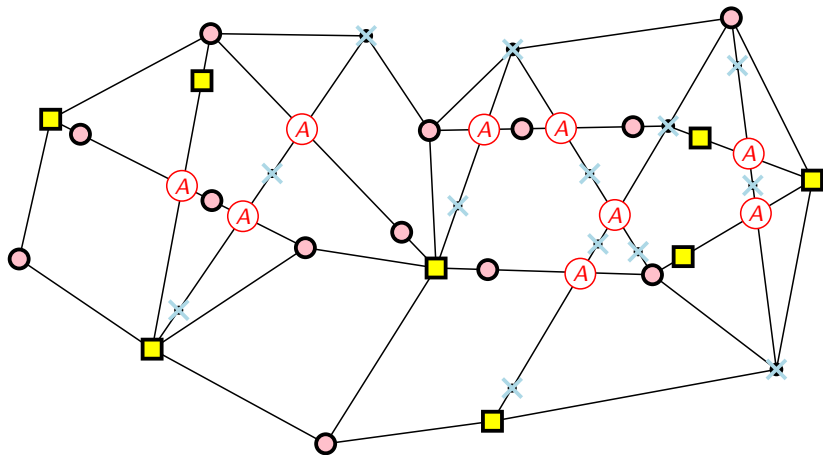


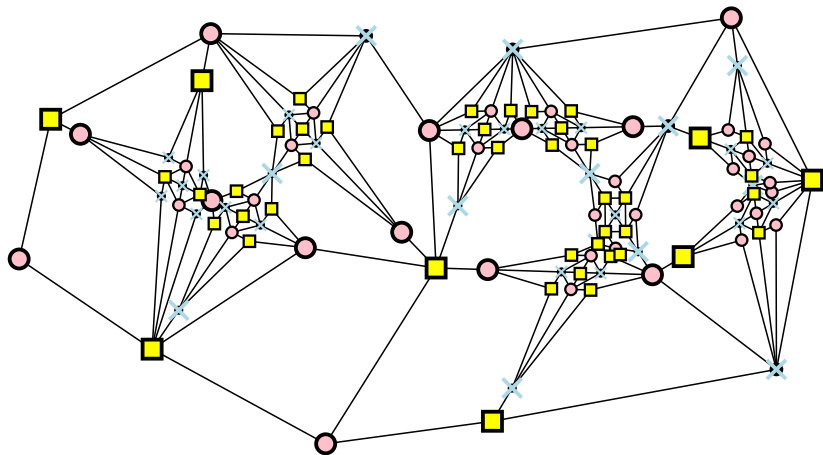
平面的グラフにおける 3 彩色問題 : 帰着 (2)

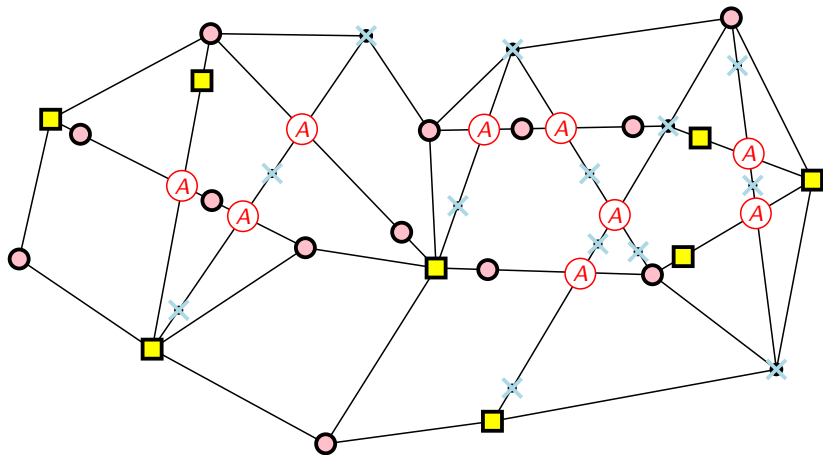


平面的グラフにおける 3 彩色問題 : 帰着 (2)

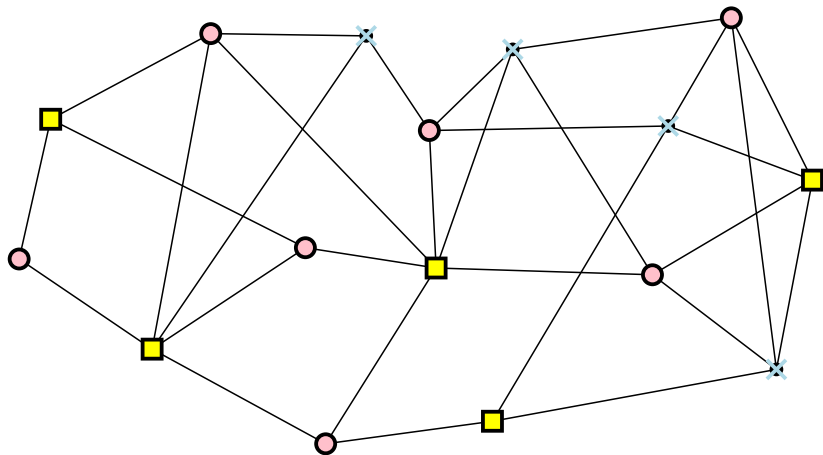








平面的グラフにおける 3 彩色問題 : 帰着 (2)

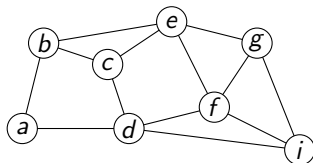


- ① 平面的グラフ
- ② 平面的グラフにおける3彩色問題
- ③ 平面的グラフにおける独立集合問題
- ④ 平面的充足可能性問題
- ⑤ 今日のまとめ と 次回の予告

平面的グラフにおける独立集合問題

- ▶ 入力：平面的グラフ G ，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力：Yes か No
- ▶ 条件： G が要素数 k 以上の独立集合を持つ \Rightarrow Yes
 G が要素数 k 以上の独立集合を持たない \Rightarrow No

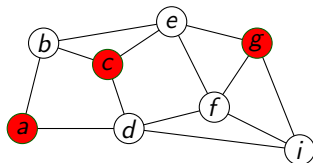
無向グラフ G の**独立集合**とは、 G の頂点部分集合 S で S のどの2頂点間にも辺が存在しないもの



平面的グラフにおける独立集合問題

- ▶ 入力：平面的グラフ G ，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力：Yes か No
- ▶ 条件： G が要素数 k 以上の独立集合を持つ \Rightarrow Yes
 G が要素数 k 以上の独立集合を持たない \Rightarrow No

無向グラフ G の独立集合とは， G の頂点部分集合 S で S のどの2頂点間にも辺が存在しないもの

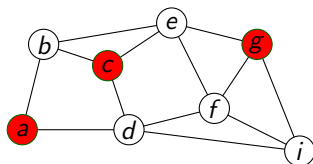


定理 (Garey, Johnson, Stockmeyer '76)

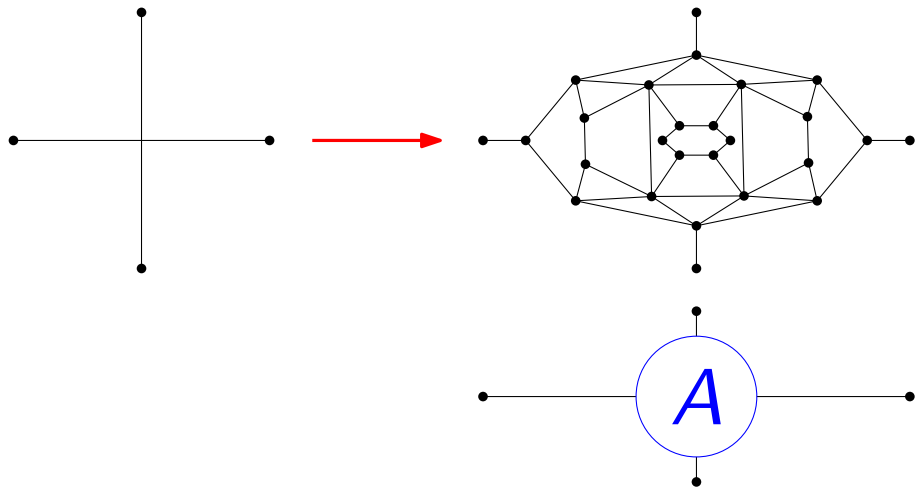
平面的グラフにおける独立集合問題は NP 完全

これを証明するためには、次を証明すればよい

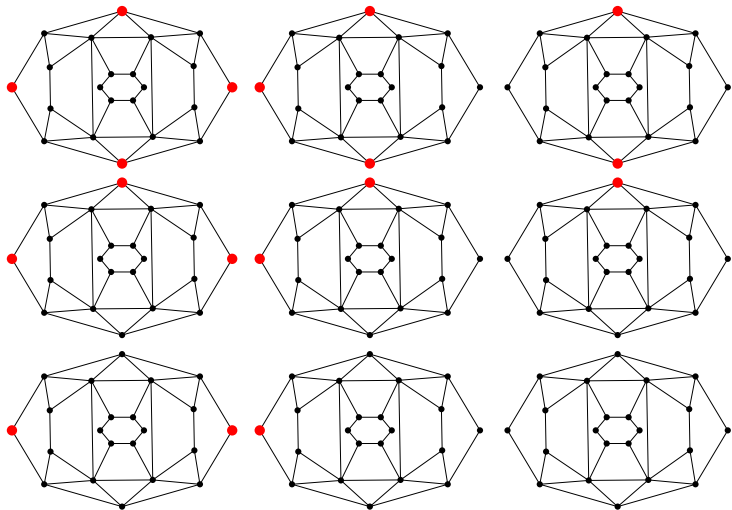
- ▶ 平面的グラフにおける独立集合問題が NP に所属すること (平面的グラフにおける 3 彩色問題 と同様に証明できる)
- ▶ 独立集合問題が 平面的グラフにおける独立集合問題に多項式時間多対一帰着可能であること



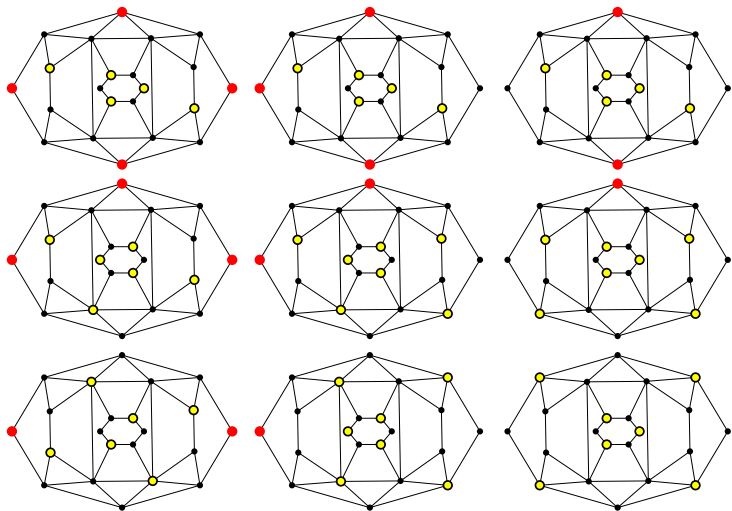
交差解消ガジェット



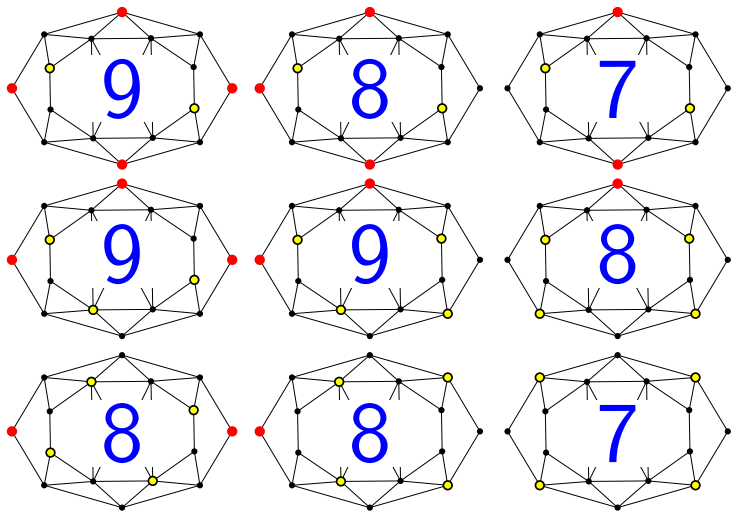
平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (2)

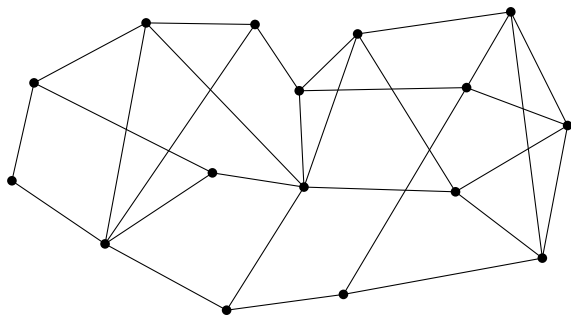


平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (2)



平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (2)



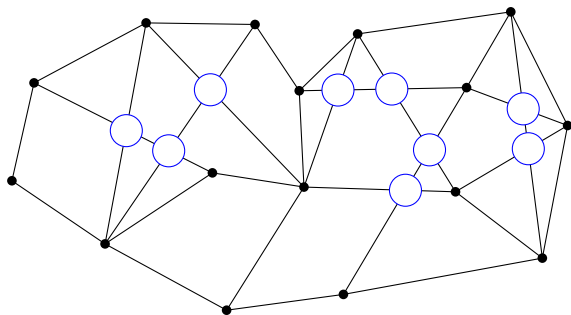


元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

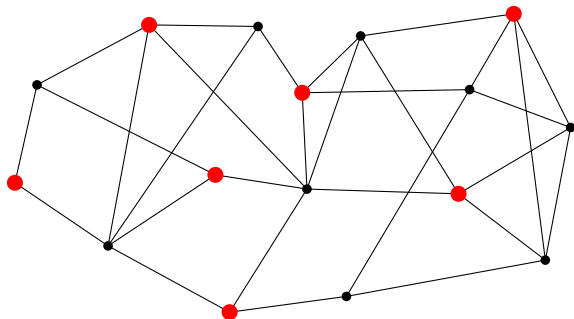


元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

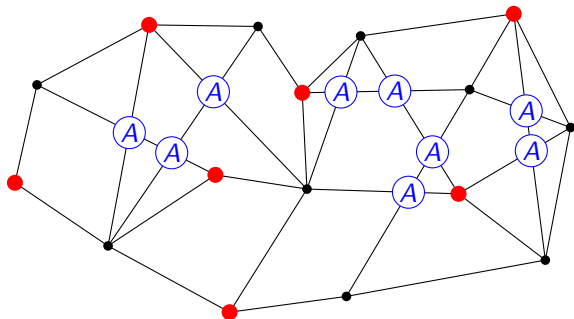


元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

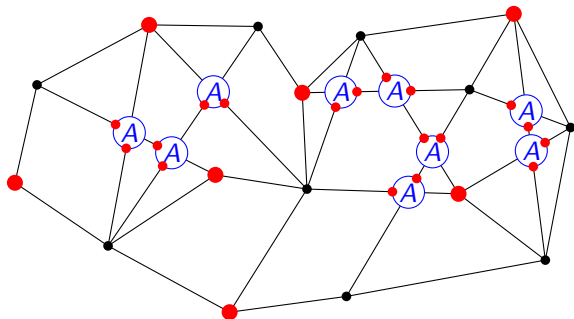


元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

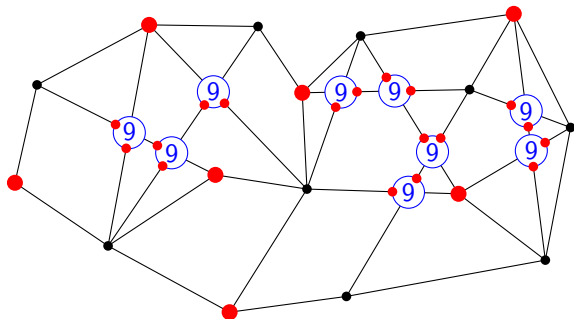


元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)



元のグラフに
要素数 k の独立集合が
存在する

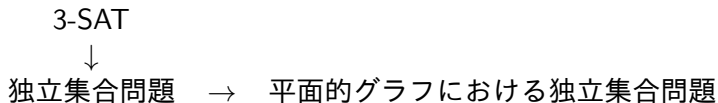
\Leftrightarrow

構成した平面的グラフに
要素数 $k + 9c$ の独立集合が
存在する

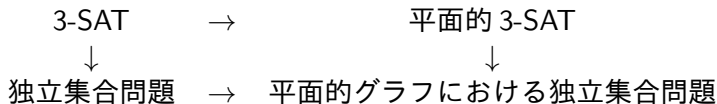
(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

- ① 平面的グラフ
- ② 平面的グラフにおける3彩色問題
- ③ 平面的グラフにおける独立集合問題
- ④ 平面的充足可能性問題
- ⑤ 今日のまとめ と 次回の予告

- 1 交差解消ガジェットを用いて
辺交差のある問題を辺交差のない問題に帰着する



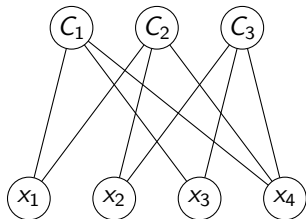
- 1 交差解消ガジェットを用いて
辺交差のある問題を辺交差のない問題に帰着する
- 2 平面的充足可能性問題を用いて
元々の帰着を辺交差のないものにする



平面的 3-SAT

- ▶ 入力：整数 $n \geq 1$, 3-CNF 論理式 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 ただし, f の **接続グラフ** は平面的グラフ
- ▶ 出力：Yes または No
- ▶ 条件： f が充足可能である \Rightarrow Yes
 f が充足可能でない \Rightarrow No

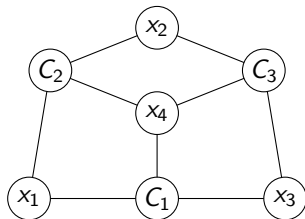
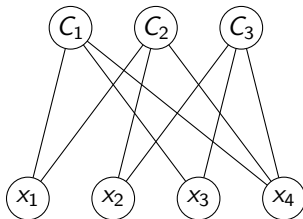
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



平面的 3-SAT

- ▶ 入力：整数 $n \geq 1$, 3-CNF 論理式 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 ただし, f の **接続グラフ** は平面的グラフ
- ▶ 出力：Yes または No
- ▶ 条件： f が充足可能である \Rightarrow Yes
 f が充足可能でない \Rightarrow No

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



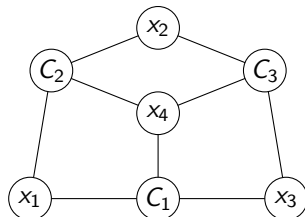
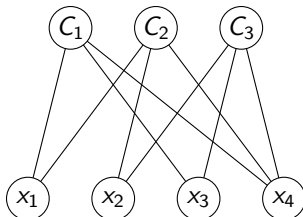
定理

(Lichtenstein '82)

平面的 3-SAT は NP 完全

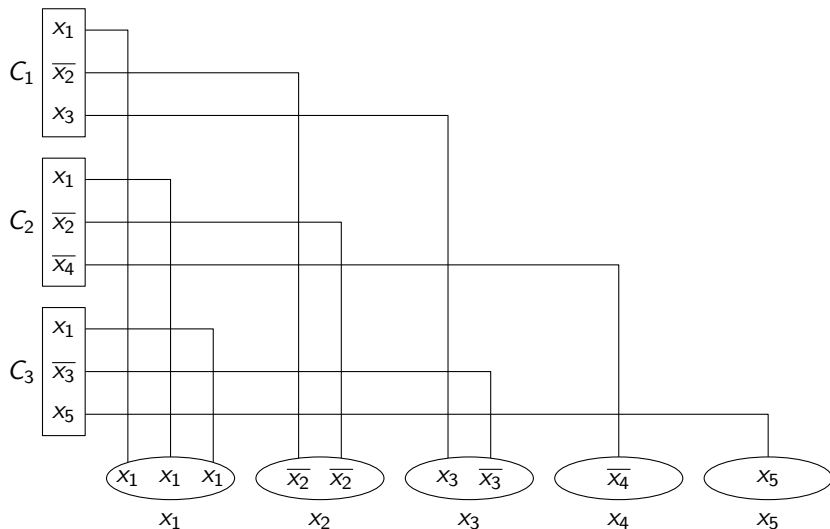
これを証明するためには、次を証明すればよい

- ▶ 平面的 3-SAT が NP に所属すること
(平面的グラフにおける 3 彩色問題 と同様に証明できる)
- ▶ 3-SAT が 平面的 3-SAT に多項式時間多対一帰着可能であること

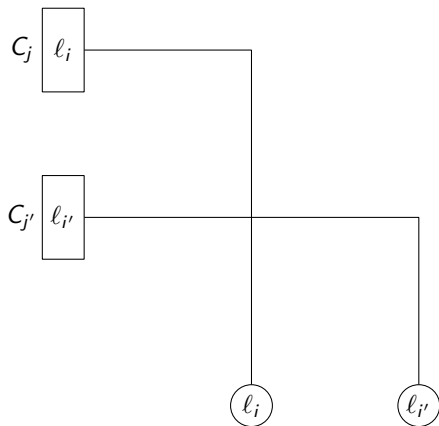


平面的 3-SAT の NP 完全性 : 帰着 (1)

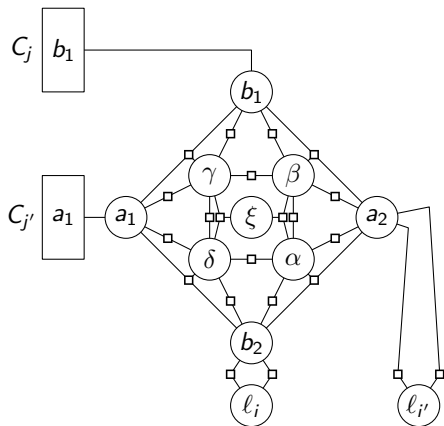
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)}_{=C_3}$$



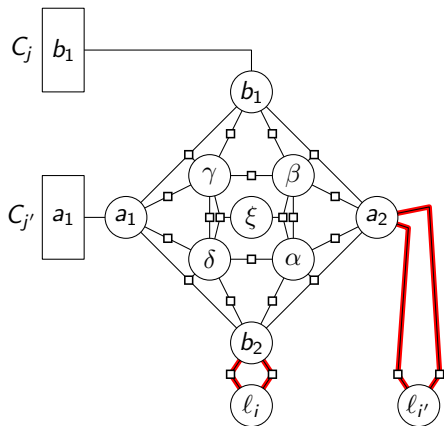
平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



▶ $b_2 \vee \overline{l_i}$

▶ $\overline{b_2} \vee l_i$

▶ $a_2 \vee \overline{l_i'}$

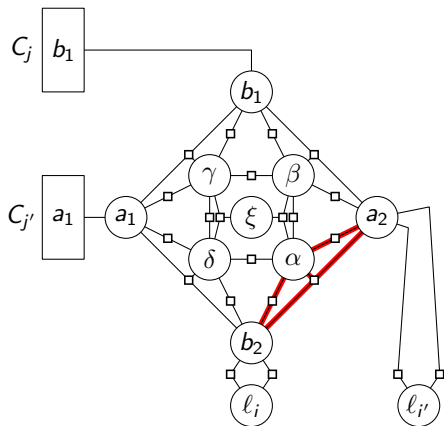
▶ $\overline{a_2} \vee l_i'$

つまり,

▶ $b_2 \leftrightarrow l_i$

▶ $a_2 \leftrightarrow l_i'$

平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



▶ $\overline{a_2} \vee \overline{b_2} \vee \alpha$

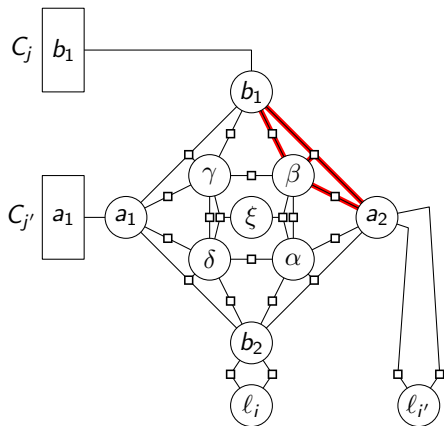
▶ $a_2 \vee \overline{\alpha}$

▶ $b_2 \vee \overline{\alpha}$

つまり

▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$

平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



▶ $\overline{a_2} \vee b_1 \vee \beta$

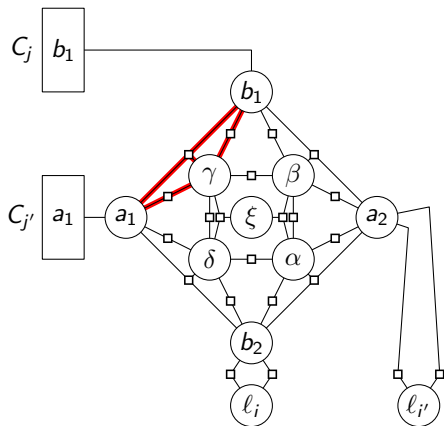
▶ $a_2 \vee \overline{\beta}$

▶ $\overline{b_1} \vee \overline{\beta}$

つまり

▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$

平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



▶ $a_1 \vee b_1 \vee \gamma$

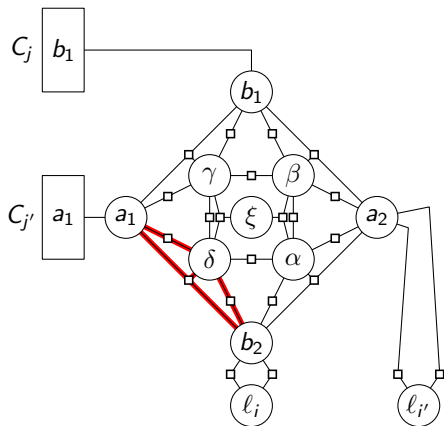
▶ $\overline{a_1} \vee \overline{\gamma}$

▶ $\overline{b_1} \vee \overline{\gamma}$

つまり

▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$

平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)



▶ $a_1 \vee \overline{b_2} \vee \delta$

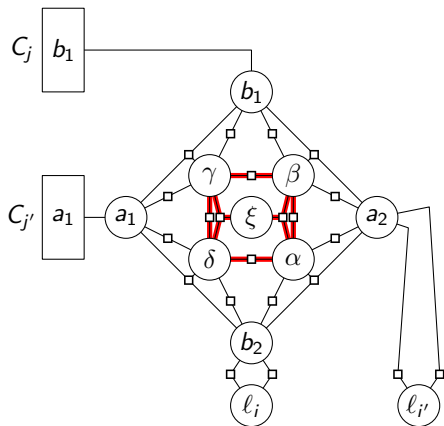
▶ $\overline{a_1} \vee \overline{\delta}$

▶ $b_2 \vee \overline{\delta}$

つまり

▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$

平面的 3-SAT の NP 完全性 : 交差解消ガジェット (1)

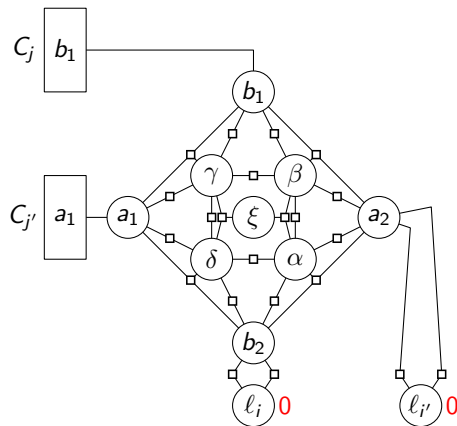


- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \xi$
- ▶ $\gamma \vee \delta \vee \bar{\xi}$
- ▶ $\bar{\alpha} \vee \bar{\beta}$
- ▶ $\bar{\beta} \vee \bar{\gamma}$
- ▶ $\bar{\gamma} \vee \bar{\delta}$
- ▶ $\bar{\delta} \vee \bar{\alpha}$

$(\alpha \vee \beta \vee \xi) \wedge (\gamma \vee \delta \vee \bar{\xi})$ は次と同値

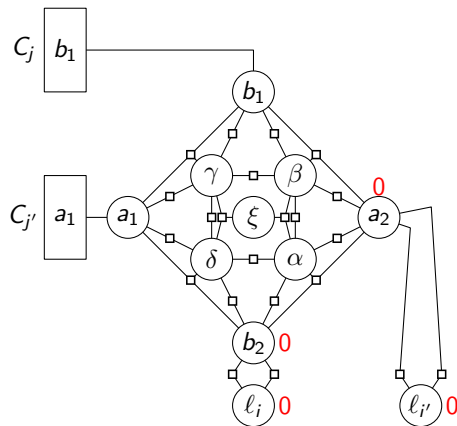
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$

$l_i = 0, l_{i'} = 0$ のとき



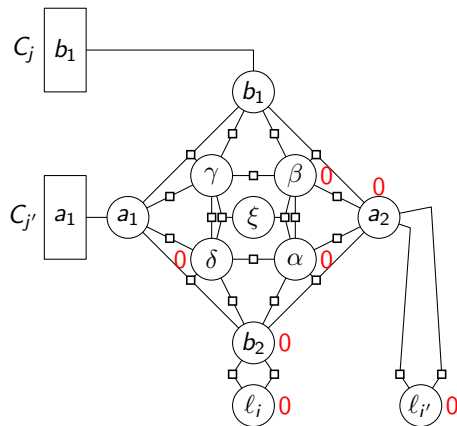
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 0$ のとき



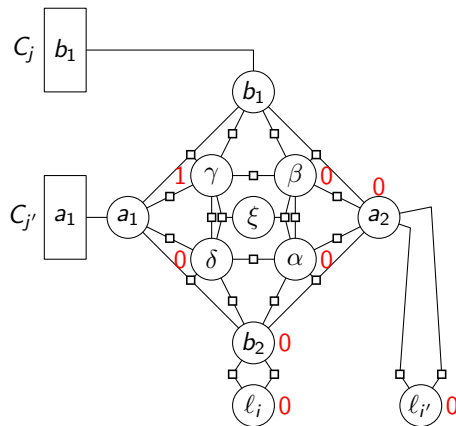
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 0$ のとき



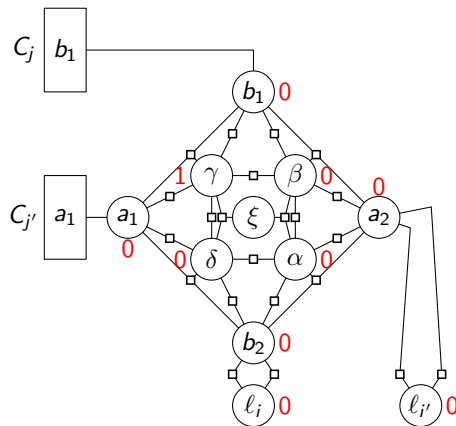
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 0$ のとき



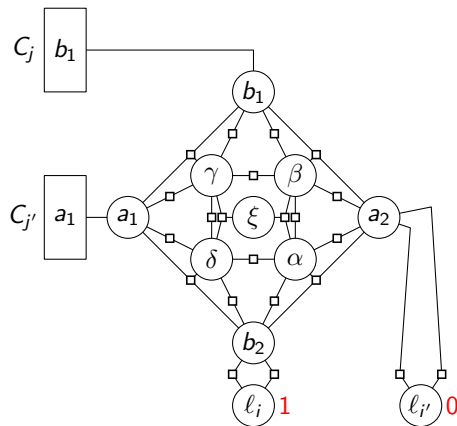
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 0$ のとき



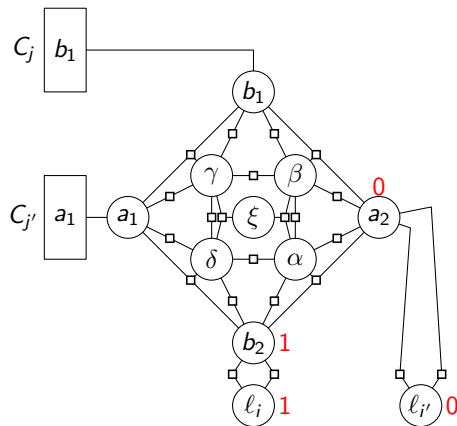
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



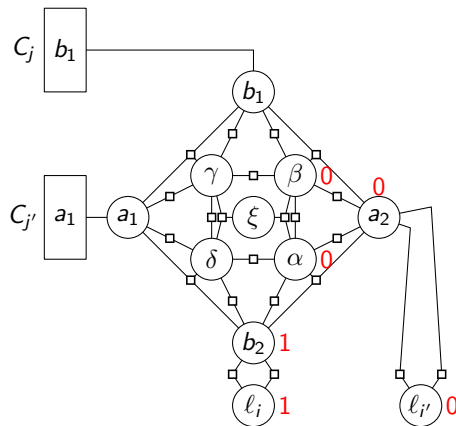
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



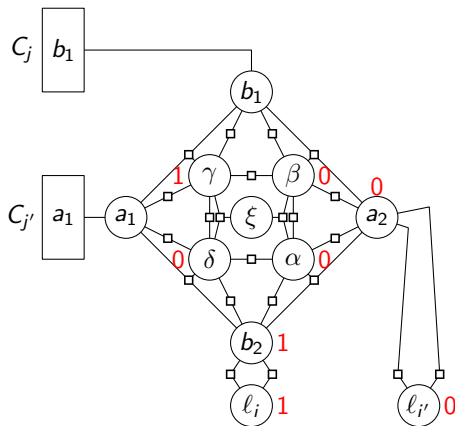
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



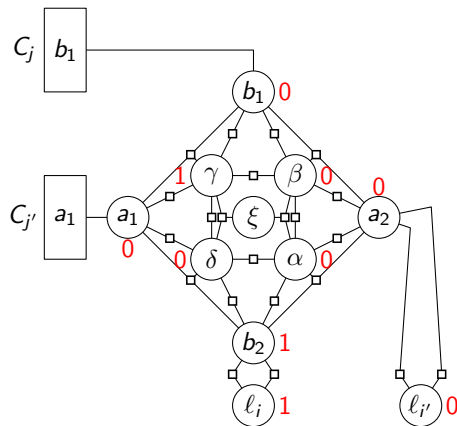
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



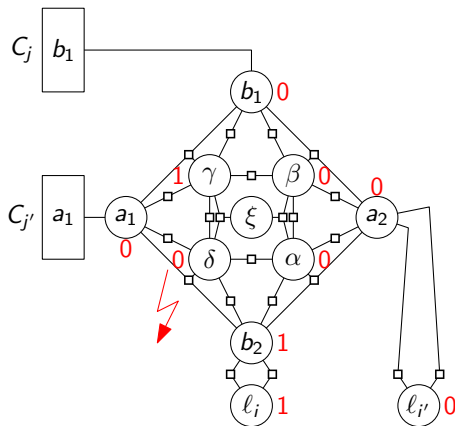
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



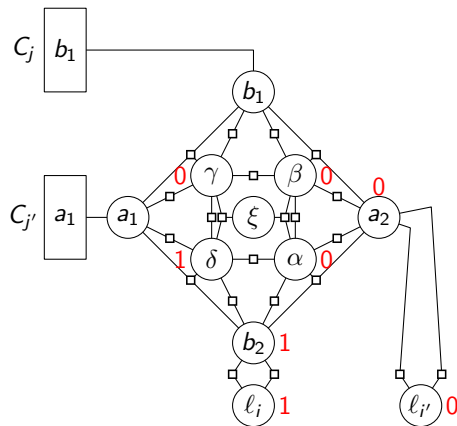
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



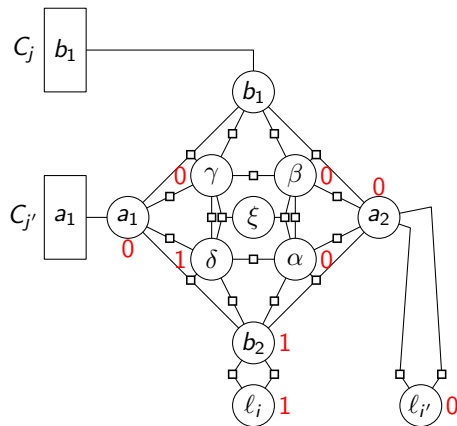
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



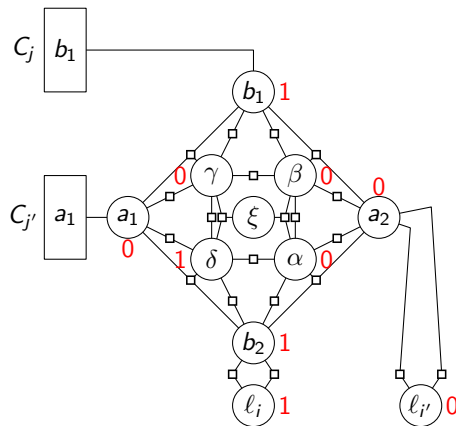
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



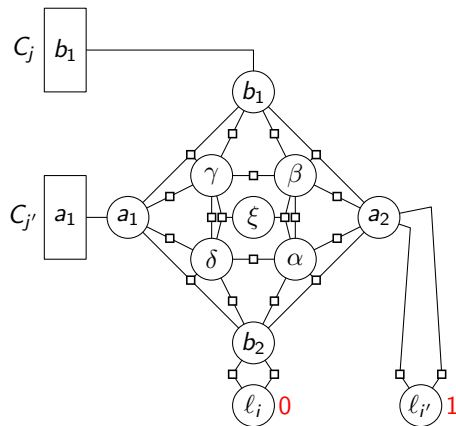
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 0$ のとき



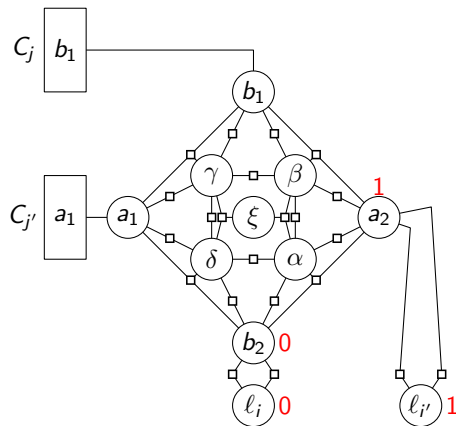
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



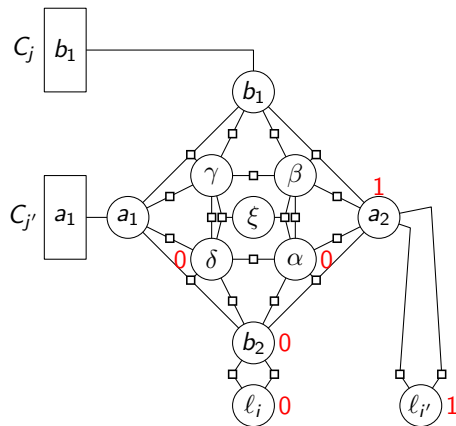
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



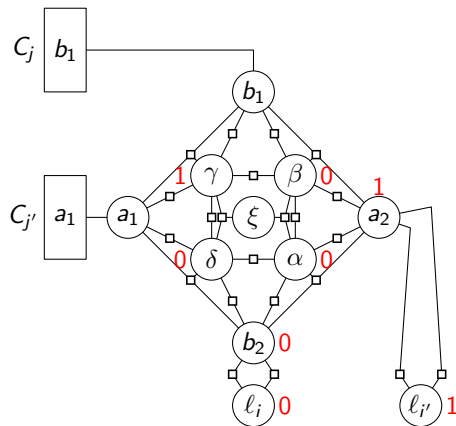
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



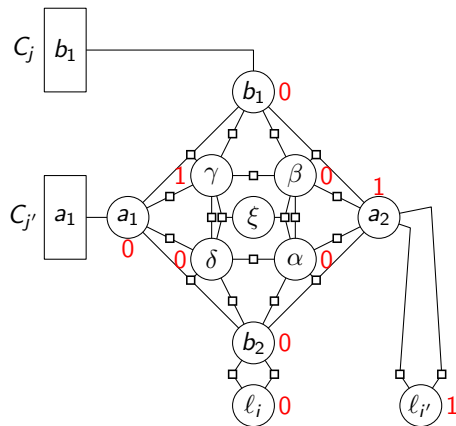
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



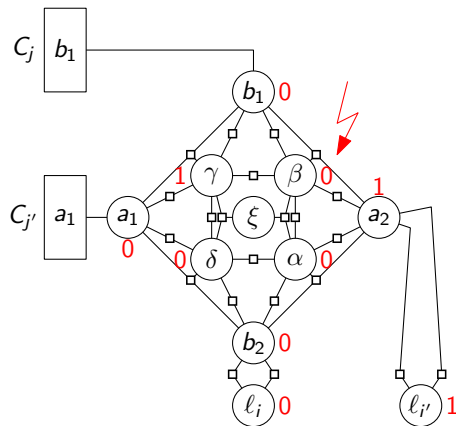
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



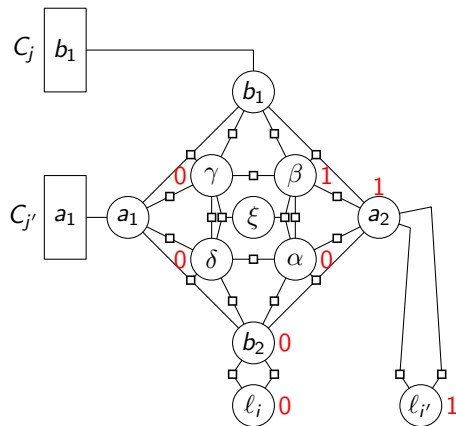
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



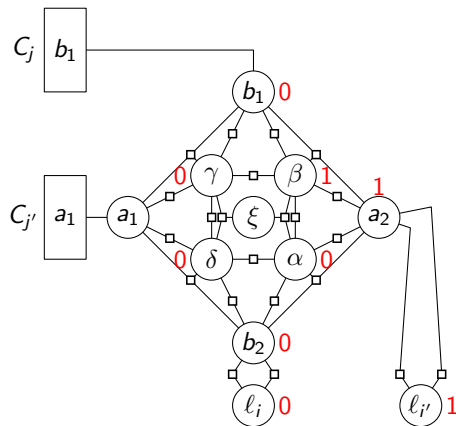
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



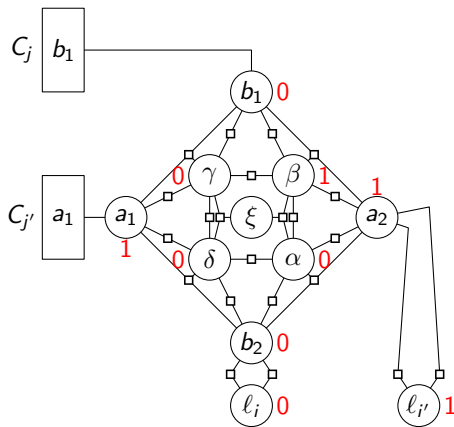
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



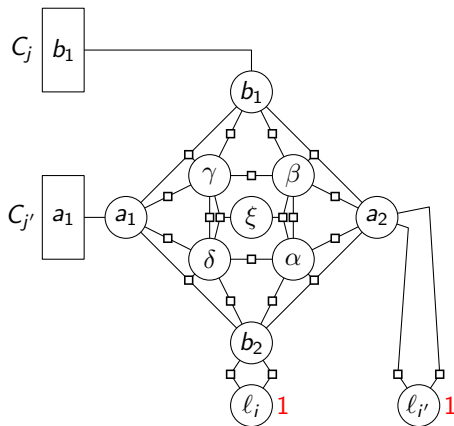
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 0, l_{i'} = 1$ のとき



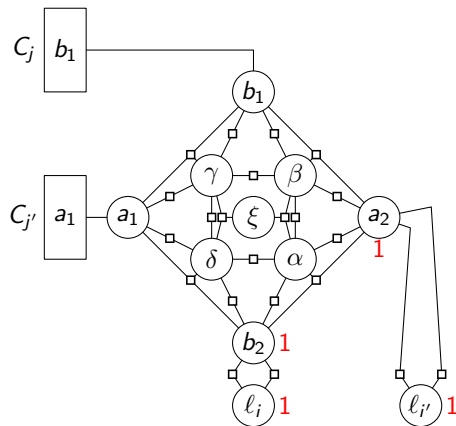
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



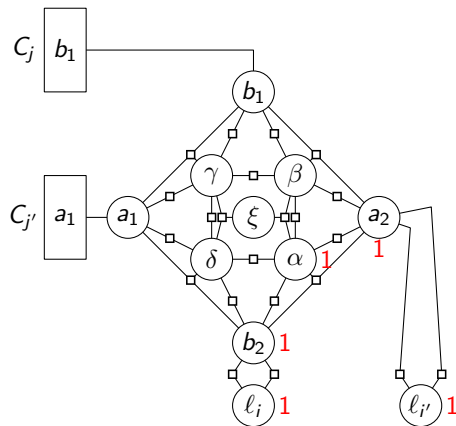
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



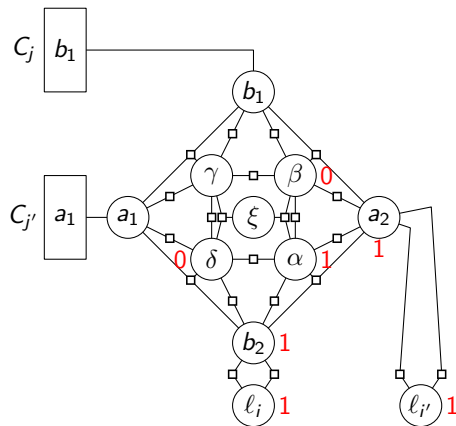
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



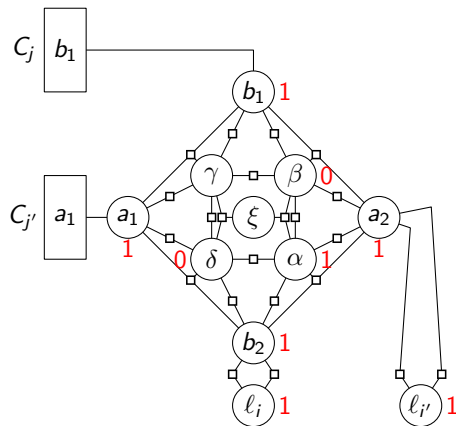
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



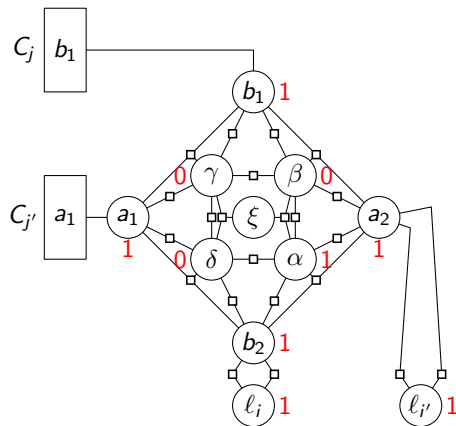
- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

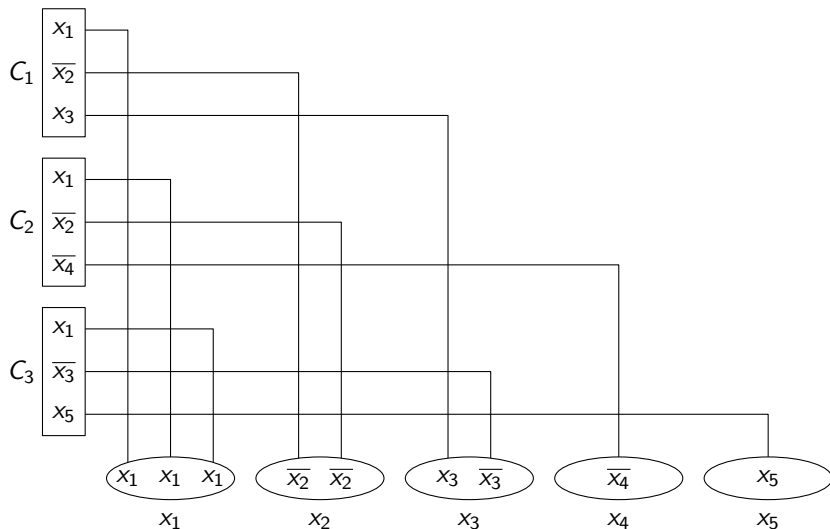
$l_i = 1, l_{i'} = 1$ のとき



- ▶ $b_2 \leftrightarrow l_i, a_2 \leftrightarrow l_{i'}$
- ▶ $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- ▶ $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- ▶ $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- ▶ $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- ▶ $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- ▶ $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- ▶ $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- ▶ $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

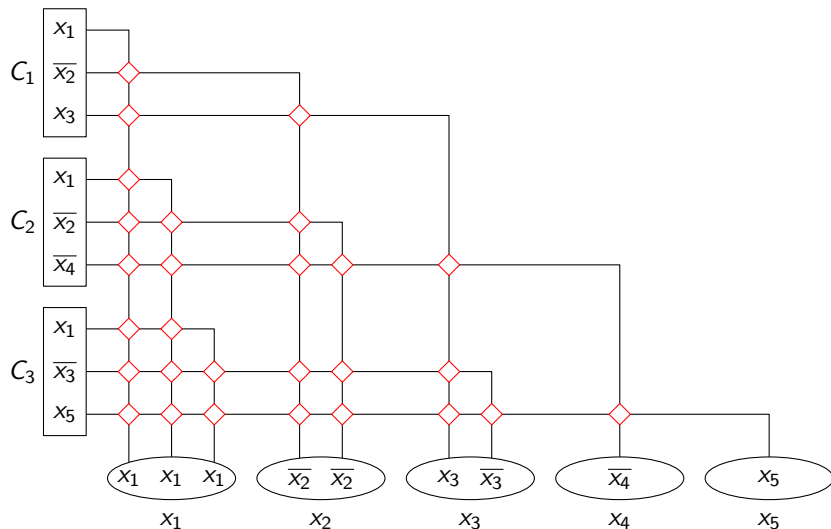
平面的 3-SAT の NP 完全性：帰着 (2)

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)}_{=C_3}$$

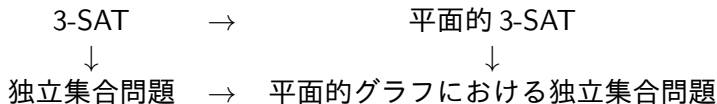


平面的 3-SAT の NP 完全性 : 帰着 (2)

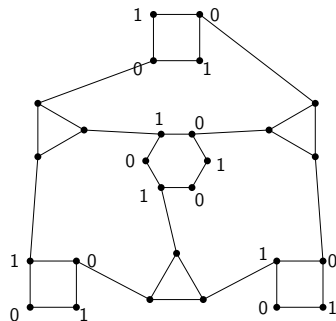
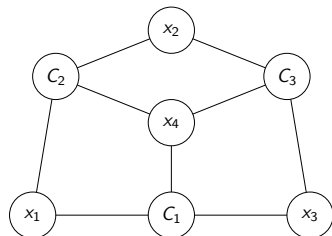
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)}_{=C_3}$$



- 1 交差解消ガジェットを用いて
辺交差のある問題を辺交差のない問題に帰着する
- 2 平面的充足可能性問題を用いて
元々の帰着を辺交差のないものにする



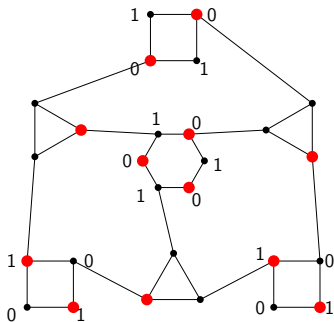
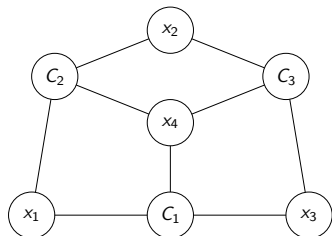
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f の節の数が m であるとき

f が充足可能 \Leftrightarrow 要素数 $4m$ の独立集合がある

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



f の節の数が m であるとき

f が充足可能 \Leftrightarrow 要素数 $4m$ の独立集合がある

- ① 平面的グラフ
- ② 平面的グラフにおける3彩色問題
- ③ 平面的グラフにおける独立集合問題
- ④ 平面的充足可能性問題
- ⑤ 今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

平面性に関わる問題の NP 完全性を扱う

- ▶ 平面的グラフに関する問題
- ▶ 平面的充足可能性問題

鍵となる概念：交差解消ガジェット

次回の予告

計算幾何に関わる問題の NP 完全性 (NP 困難性) を扱う

- ▶ 平面的充足可能性問題 を帰着に用いる

- ▶ M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified *NP*-complete graph problems. *Theoretical Computer Science* 1 (1976) pp. 237–267.
- ▶ D. Lichtenstein, Planar formulae and their uses. *SIAM Journal on Computing* 11 (1982) pp. 329–343.