離散最適化基礎論　第 9 回
数値が関わる問題 (2)：3 分割問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 12 月 10 日

最終更新：2019 年 12 月 11 日　13:06

スケジュール 前半

- ⋆ 休み (大学院入学式) (10/1)
- 1 アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
- 2 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ⋆ 休み (祝日) (10/22)
- 3 充足可能性問題とその変種 (10/29)
- 4 グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択 (11/5)
- 5 グラフに関する問題 (2)：経路の選択 (11/12)
- 6 集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連 (11/19)
- 7 集合族に関する問題 (2)：発展 (11/26)

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)

★ 冬期休業 (12/24, 31)

11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)

★ 休講 (2/4)

★ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- 数値が関わる強 NP 完全問題を扱う
  - 基礎となる問題：3 分割問題
  - スケジューリング問題
  - 3 分割問題を用いた帰着

自然数の符号化法：2 種類

- 1 進符号化 (unary encoding)
- 2 進符号化 (binary encoding) ←普通の入力法

10 進	1 進符号化	2 進符号化
0	0	0
1	10	1
2	110	10
3	1110	11
4	11110	100
5	111110	101
6	1111110	110
7	11111110	111
8	111111110	1000

自然数 a を符号化するとき，

- 1 進符号化のサイズ $= O(a)$
- 2 進符号化のサイズ $= O(\log a)$

つまり，2 つの符号化法の間で
サイズが指数関数的に異なる

弱多項式時間アルゴリズムと擬多項式時間アルゴリズム

数値を入力 (の一部) とする問題に対して

- 弱多項式時間アルゴリズム (weakly polynomial-time algorithm) とは，
  入力数値が 2 進符号化されるとき，
  多項式時間で実行できるアルゴリズム
- 擬多項式時間アルゴリズム (pseudo-polynomial-time algorithm) とは，
  入力数値が 1 進符号化されるとき，
  多項式時間で実行できるアルゴリズム

例：入力数値が自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとき，

- 最悪時実行時間 $= O\left(\sum_{i=1}^{n} \log a_i\right)$ ： 弱多項式時間アルゴリズム
- 最悪時実行時間 $= O\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ ： 擬多項式時間アルゴリズム

  2 進符号化だと，指数時間

数値を入力 (の一部) とする問題に対して

- 強多項式時間アルゴリズム (strongly polynomial-time algorithm) とは，数値の総数の多項式時間で実行できるアルゴリズム

例：入力数値が自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとき，

- 最悪時実行時間 $= O\left(\sum_{i=1}^{n} \log a_i\right)$ ： 弱多項式時間アルゴリズム
- 最悪時実行時間 $= O\left(n^2\right)$ ： 強多項式時間アルゴリズム

例：入力数値が自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であるとき，

- 最悪時実行時間 $= O\left(n^2\right)$ ： 強多項式時間アルゴリズム
- 最悪時実行時間 $= O\left(\sum_{i=1}^{n} \log a_i\right)$ ： 弱多項式時間アルゴリズム
- 最悪時実行時間 $= O\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ ： 擬多項式時間アルゴリズム

普通の入力法 (つまり，2 進符号化) において

- 強多項式時間アルゴリズム，弱多項式時間アルゴリズムは多項式時間アルゴリズム
- 擬多項式時間アルゴリズムは指数時間アルゴリズム

$\boxed{\text{速さの直感}}$ ：強多項式時間 $>$ 弱多項式時間 $>$ 擬多項式時間

数値を入力 (の一部) とする問題 P に対して

- 問題 P が**弱 NP 完全** (weakly NP-complete) であるとは，入力数値が 2 進符号化されるときに，NP 完全であること
- 問題 P が**強 NP 完全** (strongly NP-complete) であるとは，入力数値が 1 進符号化されるときに，NP 完全であること

P $\neq$ NP であるとき，

- 問題 P が弱 NP 完全である $\Rightarrow$
  - P を解く弱多項式時間アルゴリズムは存在しない
  - (P を解く擬多項式時間アルゴリズムは存在するかもしれない)
- 問題 P が強 NP 完全である $\Rightarrow$
  - P を解く擬多項式時間アルゴリズムは存在しない
  - (つまり，P を解く弱多項式時間アルゴリズムも存在しない)

強，弱，擬

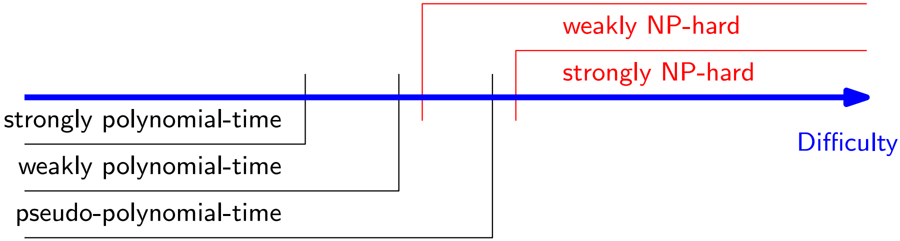
アルゴリズムの速さに対する直感

強多項式時間 $>$ 弱多項式時間 $>$ 擬多項式時間

問題の難しさに対する直感

弱 NP 完全 $<$ 強 NP 完全

P $\neq$ NP であるとき



2 分割問題 (2-partition problem，分割問題とも呼ばれる)

- 入力：n 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\displaystyle\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \notin X} a_i$ となる $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在する $\Rightarrow$ Yes

  $\displaystyle\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \notin X} a_i$ となる $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在しない $\Rightarrow$ No

a_1	3
a_2	7
a_3	2
a_4	4
a_5	3
a_6	2
a_7	1
和	22

これは Yes 入力：$X = \{1, 2, 7\}$ が解

- $\displaystyle\sum_{i \in X} a_i = a_1 + a_2 + a_7 = 3 + 7 + 1 = 11$
- $\displaystyle\sum_{i \notin X} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 4 + 3 + 2 = 11$

注：2 分割問題は「同じ和をもつ 2 つの部分」に分割する

2 分割問題の弱 NP 完全性

定理 (Karp '72)

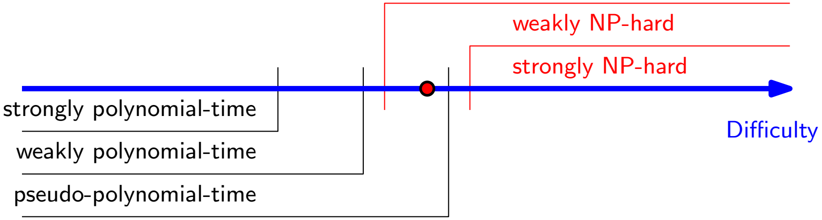
2 分割問題は弱 NP 完全

証明はややこしいので，省略

事実 (Bellman '56, Dantzig '57)

2 分割問題を解く擬多項式時間アルゴリズムが存在する

- 最悪時実行時間 $= O\left(n \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ (動的計画法の典型例)



目次

1. 前回の復習
2. 数値が関わる問題：3 分割問題
3. 強 NP 完全性の証明法
4. 数値が関わらない問題への帰着
5. 今日のまとめ と 次回の予告

3 分割問題は，自然数の集合を 要素数が 3 の集合 に分割する問題

3 分割問題 (3-partition problem)

- 入力：$3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
  ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ に対して，次を満たす

$$\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$$

- 出力：Yes か No
- 条件：$\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる $\Rightarrow$ Yes
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できない $\Rightarrow$ No

3 分割問題 (3-partition problem)

- 入力：$3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
  ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ に対して，次を満たす

$$\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$$

$n = 4$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24

$$\sum_{i=1}^{3n} a_i = 248, \quad \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3n} a_i = 15.5, \quad \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{3n} a_i = 31$$

3 分割問題 (3-partition problem)

- 出力：Yes か No
- 条件：$\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる $\Rightarrow$ Yes
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できない $\Rightarrow$ No

$n = 4$ 　　　　これは Yes 入力

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24

- $X_1 = \{1, 3, 4\}$ 　$a_1 + a_3 + a_4 = 19 + 25 + 18 = 62$
- $X_2 = \{2, 7, 11\}$ 　$a_2 + a_7 + a_{11} = 22 + 19 + 21 = 62$
- $X_3 = \{5, 6, 8\}$ 　$a_5 + a_6 + a_8 = 17 + 21 + 24 = 62$
- $X_4 = \{9, 10, 12\}$ 　$a_9 + a_{10} + a_{12} = 20 + 18 + 24 = 62$

3 分割問題 (3-partition problem)

- 入力：$3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
  ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ に対して，次を満たす

$$\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$$

- 条件：$\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，⋯

$\boxed{\text{注}}$：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ の要素数はどれも 3

- X_j の要素数が 2 以下だと，$\sum_{i \in X_j} a_i < 2 \cdot \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$

3 分割問題 (3-partition problem)

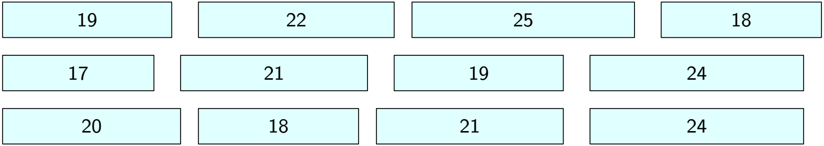
- 入力：$3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
  ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ に対して，次を満たす
$$\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$$
- 条件：$\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，…

$\boxed{\text{注}}$：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ の要素数はどれも 3

- X_j の要素数が 4 以上だと，$\displaystyle\sum_{i \in X_j} a_i > 4 \cdot \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$

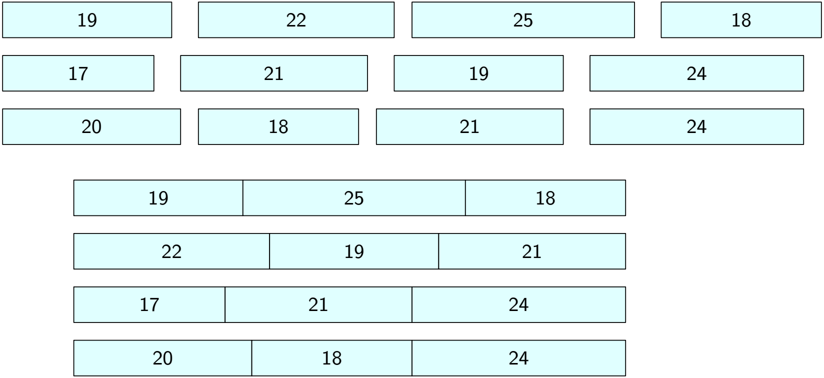
3 分割問題：イメージ

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24



3 分割問題：イメージ

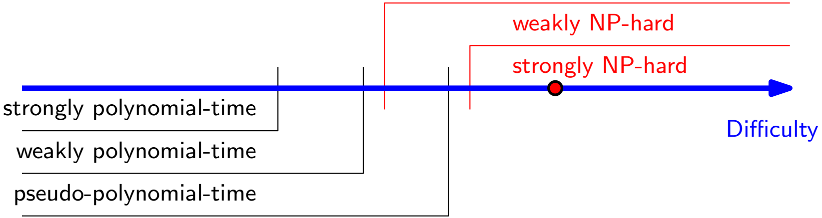
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24



定理 (Garey, Johnson '75)

3 分割問題は強 NP 完全

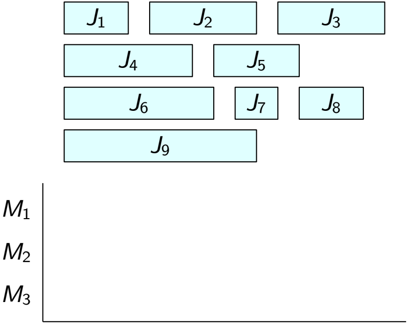
証明はややこしいので，省略



目次

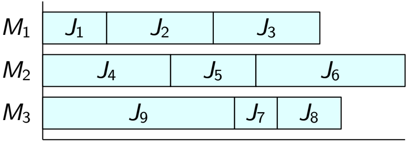
スケジューリング問題：イメージ

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4,$$
$$p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



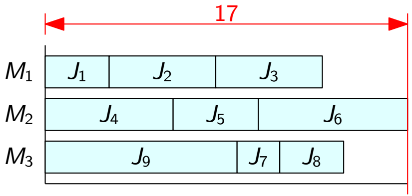
このような図をガント・チャート (Gantt chart) と呼ぶことがある

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4,$$
$$p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



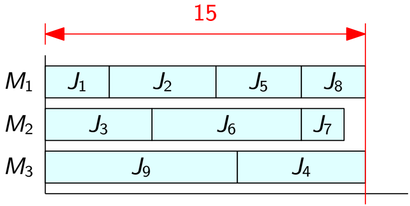
よくある目的：最小完了時刻 (makespan) の最小化

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4,$$
$$p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



よくある目的：最小完了時刻 (makespan) の最小化

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4,$$
$$p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



同一機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題

- 入力：自然数 $m \in \mathbb{N}$，m 個の同一機械，n 個のジョブ $J_1, \ldots, J_n$
  各ジョブ J_i の処理時間 $p_i \in \mathbb{N}$
- 出力：m 個の機械へのスケジューリング (割り込みなし)
- 評価：最終完了時刻の最小化

同一機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題 (判定問題版)

- 入力：自然数 $m \in \mathbb{N}$，m 個の同一機械，n 個のジョブ $J_1, \ldots, J_n$
  各ジョブ J_i の処理時間 $p_i \in \mathbb{N}$，期限 $T \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes または No
- 条件：最終完了時刻が T 以下のスケジューリングがある $\Rightarrow$ Yes
  最終完了時刻が T 以下のスケジューリングがない $\Rightarrow$ No

定理 (Garey, Johnson '75)

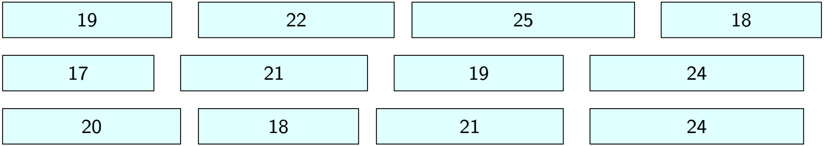
同一機械スケジューリングにおける
最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) は強 NP 完全

参考：定理 (Garey, Johnson '79)

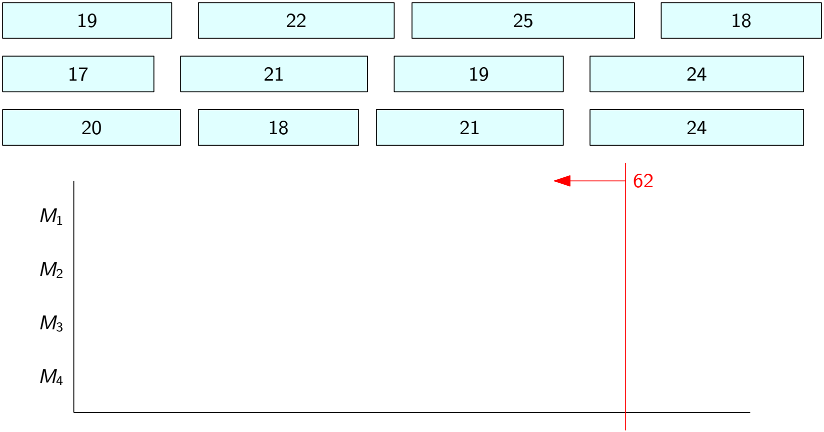
$m \geq 2$ のとき，同一 m 機械スケジューリングにおける
最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) は弱 NP 完全

定理を証明するためには，次を証明すればよい

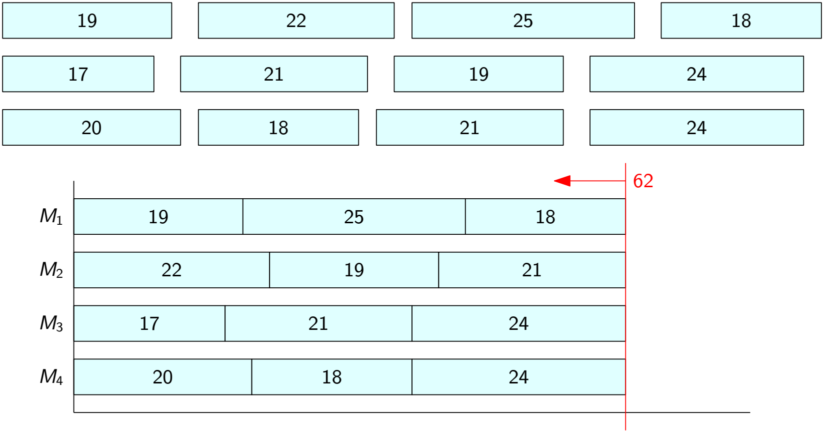
- 入力数値が 1 進符号化されるとき，
  最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) が NP に所属すること
  (これは 部分和問題と同様に 証明できる)
- 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が
  入力数値が 1 進符号化された最終完了時刻最小化問題 (判定問題版)
  に 多項式時間多対一帰着可能であること


19
22
25
18
17
21
19
24
20
18
21
24

最終完了時刻最小化問題の強 NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



最終完了時刻最小化問題の強 NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



3 分割問題の入力から最大完了時刻最小化問題の入力を構成

- 機械の数は n
- ジョブの数は $3n$ で，　すべての $i \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ に対して，$p_i = a_i$
- $T = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$　　　(この構成は多項式時間で可能)

このとき，次の 2 つは同値

- $\displaystyle\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる
- 各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して
  機械 M_j に $\{J_i \mid i \in X_j\}$ を割り当てると最大完了時刻が T となる　□

箱詰め問題：ナップサック問題に似ているが，すべて詰める
そのため，ナップサックの個数を最小化

箱詰め問題 (bin packing problem)

- 入力：n 個のアイテム $\{1, 2, \ldots, n\}$
  各アイテム i の重さ $w_i \in \mathbb{N}$，箱の容量 $C \in \mathbb{N}$
- 出力：$\sum_{i \in X_j} w_i \leq C$ を満たす $\{1, 2, \ldots, n\}$ の分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$
- 評価：k の最小化

アイテム	1	2	3	4	5
重さ w_i	4	2	5	3	3

- 容量 $C = 7$

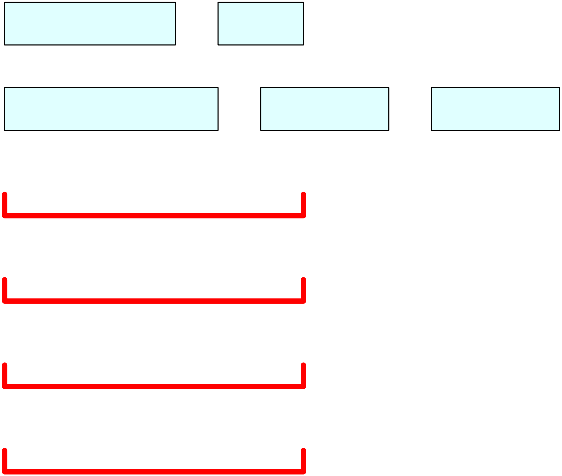
最適解は $k = 3$

- $X_1 = \{1, 4\}$：$w_1 + w_4 = 7 \leq C$
- $X_2 = \{2, 3\}$：$w_2 + w_3 = 7 \leq C$
- $X_3 = \{5\}$：$w_5 = 3 \leq C$

箱詰め問題：イメージ

アイテム	1	2	3	4	5
重さ w_i	4	2	5	3	3

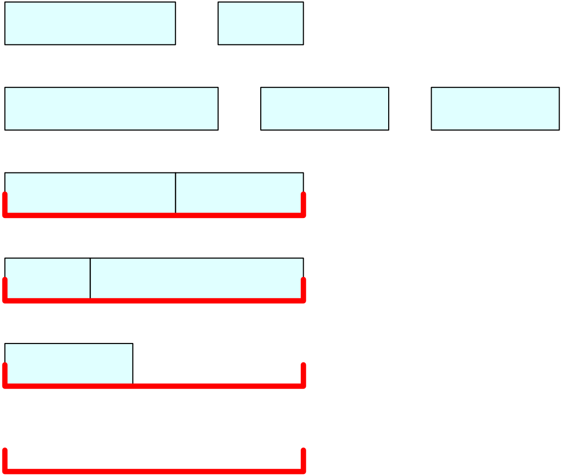
容量 $C = 7$



箱詰め問題：イメージ

アイテム	1	2	3	4	5
重さ w_i	4	2	5	3	3

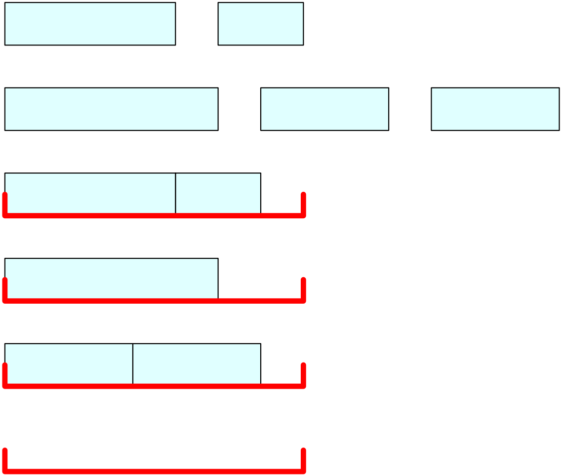
容量 $C = 7$



箱詰め問題：イメージ

アイテム	1	2	3	4	5
重さ w_i	4	2	5	3	3

容量 $C = 7$



箱詰め問題 (判定問題版)

- 入力：n 個のアイテム $\{1, 2, \ldots, n\}$
  各アイテム i の重さ $w_i \in \mathbb{N}$，箱の容量 $C \in \mathbb{N}$，箱の総数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes または No
- 条件：$\sum_{i \in X_j} w_i \leq C$ を満たす $\{1, 2, \ldots, n\}$ の分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ が
  ある $\Rightarrow$ Yes
  ない $\Rightarrow$ No

アイテム	1	2	3	4	5
重さ w_i	4	2	5	3	3

- 容量 $C = 7$
- 箱の総数 $k = 3$

これは Yes 入力

- $X_1 = \{1, 4\}$：$w_1 + w_4 = 7 \leq C$
- $X_2 = \{2, 3\}$：$w_2 + w_3 = 7 \leq C$
- $X_3 = \{5\}$： $w_5 = 3 \leq C$

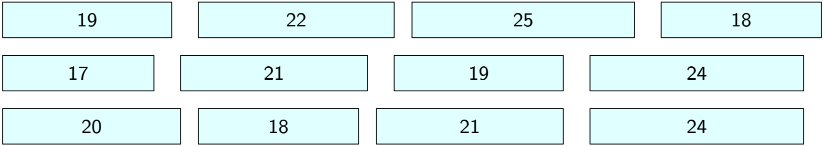
定理 (Garey, Johnson '79)

箱詰め問題 (判定問題版) は強 NP 完全

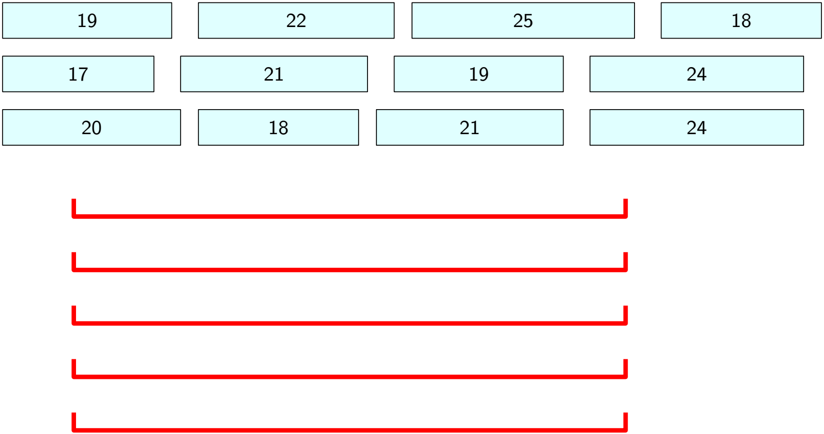
定理を証明するためには，次を証明すればよい

- 入力数値が 1 進符号化されるとき，
  箱詰め問題 (判定問題版) が NP に所属すること
  (これは 部分和問題と同様に 証明できる)
- 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が
  入力数値が 1 進符号化された箱詰め問題 (判定問題版) に
  多項式時間多対一帰着可能であること

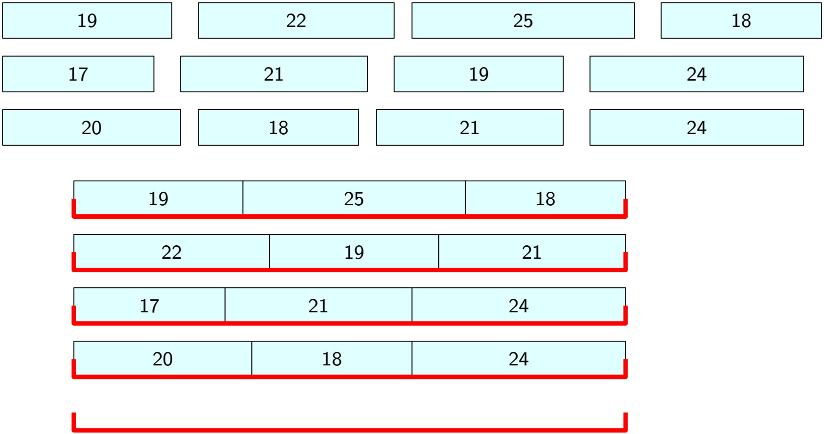
箱詰め問題の強 NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



箱詰め問題の強 NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



箱詰め問題の強 NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



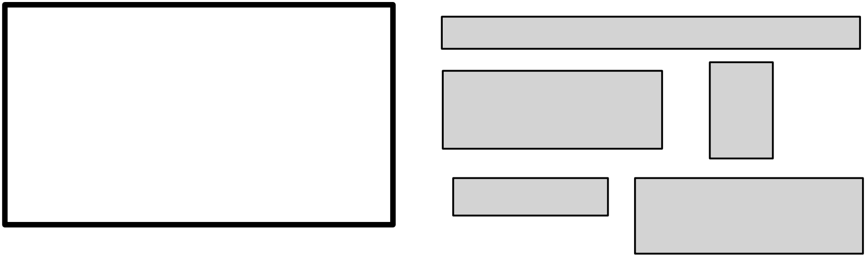
3 分割問題の入力から箱詰め問題の入力を構成

- アイテムの数は $3n$ で，すべての $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して，$w_i = a_i$
- $C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$，$k = n$ (この構成は多項式時間で可能)

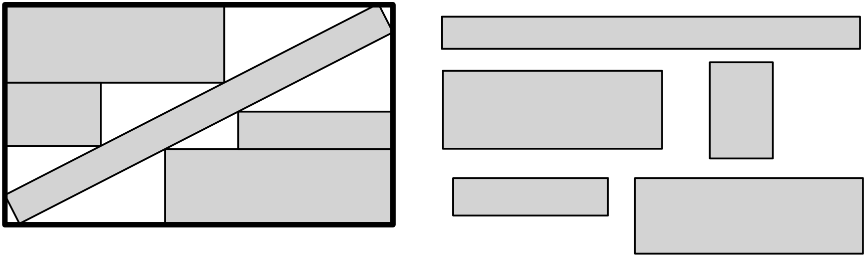
このとき，次の 2 つは同値

- $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，$\{1, 2, \dots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \dots, X_n$ に分割できる
- k 個の箱にすべてのアイテムを詰められる □

長方形への長方形の充填問題：イメージ

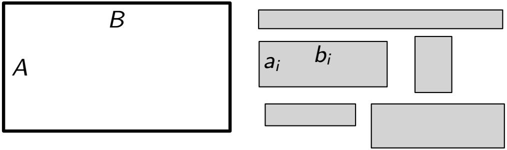


長方形への長方形の充填問題：イメージ



長方形への長方形の充填問題 (rectangle packing problem into a rectangle)

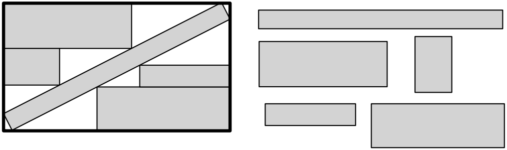
- 入力：$2(n+1)$ 個の正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, A, B$
- 出力：Yes または No
- 条件：$a_i \times b_i$ の長方形 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $A \times B$ の長方形の中に
  重なりなく配置できる $\Rightarrow$ Yes
  重なりなく配置できない $\Rightarrow$ No



定理 (Demaine, Demaine '07)

長方形への長方形の充填問題は強 NP 困難

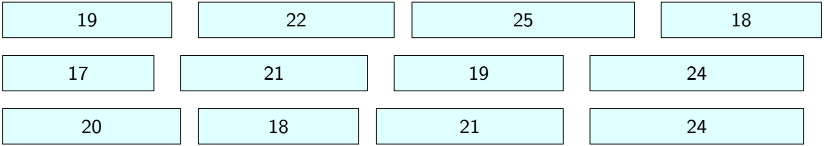
注 :「NP 完全」であるかどうかは未解決



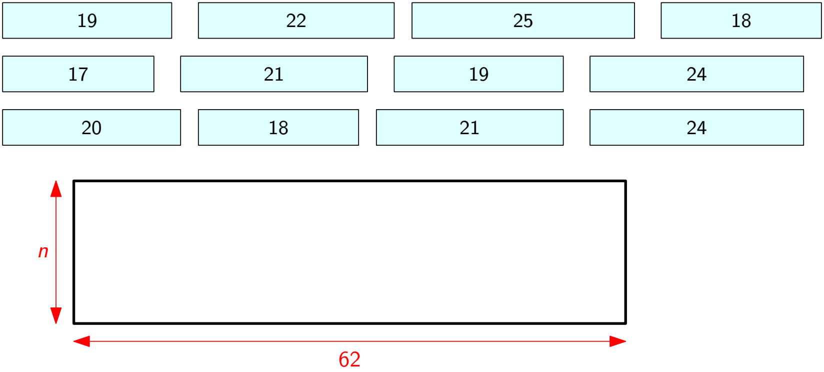
定理を証明するためには，次を証明すればよい

- 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が
  入力数値が 1 進符号化された長方形への長方形の充填問題に
  多項式時間多対一帰着可能であること

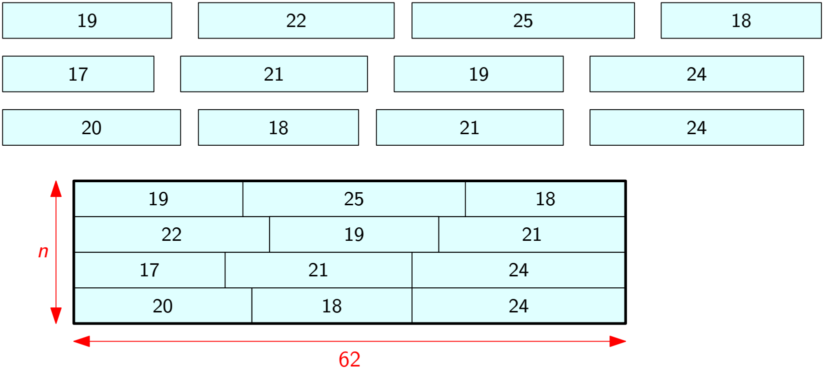
長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



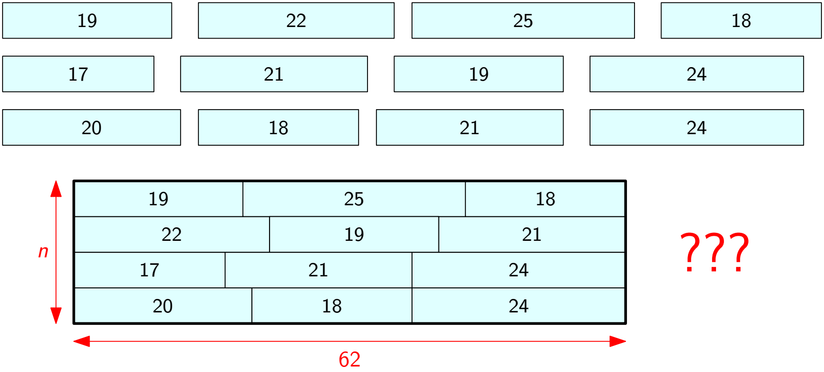
長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



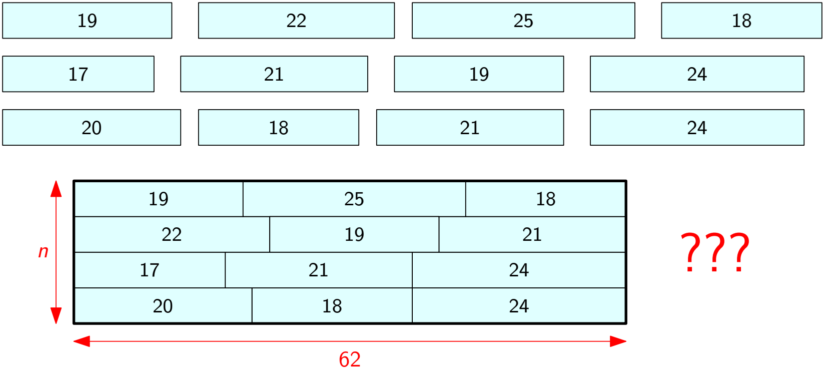
長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



回転を許さないように，長方形の幅を伸ばす

3 分割問題の入力から長方形への長方形の充填問題の入力を構成

- $a_i = a'_i + n, b_i = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$
- $A = 3n + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{3n} a'_i, B = n$ (この構成は多項式時間でできる)

このとき，次の 2 つは同値

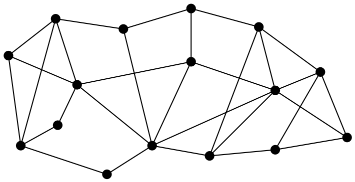
- $\displaystyle\sum_{i \in X_j} a'_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a'_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる
- $a_i \times b_i$ の長方形 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $A \times B$ の長方形の中に
  重なりなく配置できる □

目次

グラフの最小 k 等分割問題 (最適化問題)

- 入力：自然数 $k \in \mathbb{N}$,
  無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし，k は $|V|$ の約数)
- 出力：V の k 等分割 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ($|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|$)
- 評価：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)|$ の最小化

ここで，$E(V_i, V_j) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V_i, v \in V_j\}$

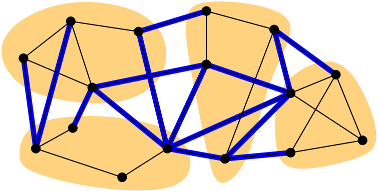


- $|V| = 16, k = 4$

グラフの最小 k 等分割問題 (最適化問題)

- 入力：自然数 $k \in \mathbb{N}$,
  無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし，k は $|V|$ の約数)
- 出力：V の k 等分割 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ $(|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|)$
- 評価：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)|$ の最小化

ここで，$E(V_i, V_j) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V_i, v \in V_j\}$



- $|V| = 16, k = 4$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| = 15$

グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版)

- 入力：自然数 $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$
  無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし，k は $|V|$ の約数)
- 出力：Yes または No
- 条件：$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| \leq \ell$ となる V の k 等分割 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ が
  存在する $\Rightarrow$ Yes
  存在しない $\Rightarrow$ No

定理 (Eppstein, Feigenbaum, Li ’91)

グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) は NP 完全

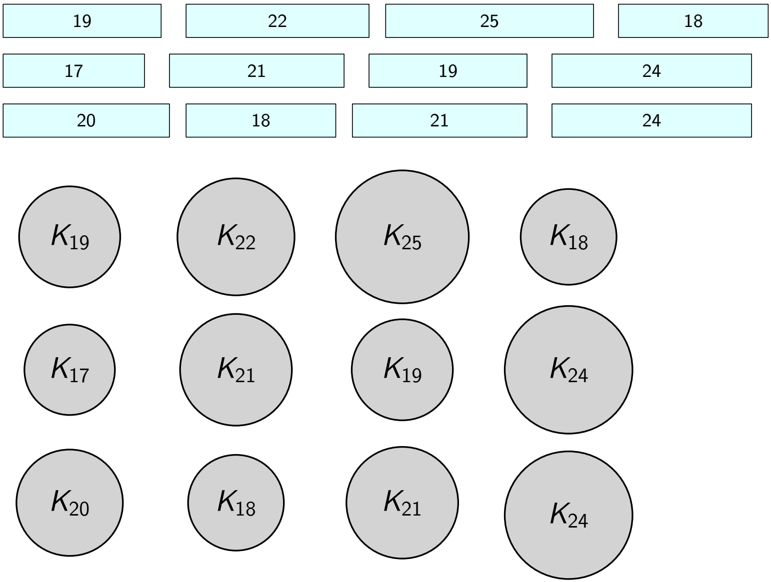
定理を証明するためには，次を証明すればよい

- グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは 独立集合問題 と同様に証明できる)
- 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) に 多項式時間多対一帰着可能であること

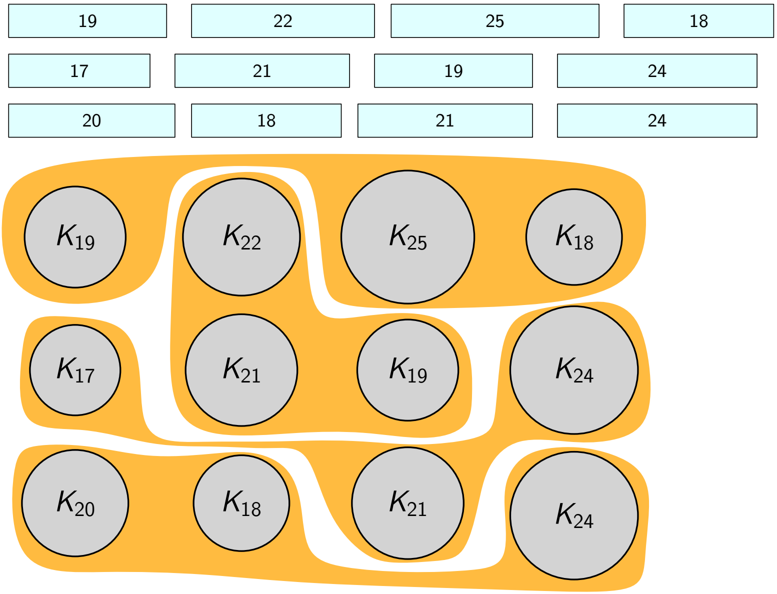
グラフの最小 k 等分割問題の NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)

19	22	25	18
17	21	19	24
20	18	21	24

グラフの最小 k 等分割問題の NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



グラフの最小 k 等分割問題の NP 完全性：多項式時間多対一帰着 (1)



3 分割問題の入力から最小 k 等分割問題の入力を構成

- 頂点数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{3n} a_i$ で，$3n$ 個の連結成分を持つ
- i 個目の連結成分は 完全グラフ K_{a_i}
- $k = n$，$\ell = 0$ (この構成は多項式時間でできる)

このとき，次の 2 つは同値

- $\displaystyle\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| \leq 0$ となる
  V の k 等分割 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ が存在する □

3 分割問題の入力から最小 k 等分割問題の入力を構成

- 頂点数は $\sum_{i=1}^{3n} a_i$ で，$3n$ 個の連結成分を持つ
- i 個目の連結成分は 完全グラフ K_{a_i}
- $k = n$，$\ell = 0$ (この構成は多項式時間でできる)

このとき，次の 2 つは同値

- $\displaystyle\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように，
  $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に分割できる
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| \leq 0$ となる
  V の k 等分割 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ が存在する □

目次

今日の目標

- 数値が関わる強 NP 完全問題を扱う
  - 基礎となる問題：3 分割問題
  - スケジューリング問題
  - 3 分割問題を用いた帰着

ここまでで，基礎的な部分が終了

次回の予告

平面性が関わる問題の NP 完全性を扱う

- 平面的グラフに関する問題
- 平面的充足可能性問題

鍵となる概念：交差解消ガジェット

- E. D. Demaine, M. L. Demaine, Jigsaw puzzles, edge matching, and polyomino packing: connections and complexity. Graphs and Combinatorics 23, Supplement (2007) pp. 195–208.
- D. Eppstein, J. Feigenbaum, C.-L. Li, Equipartitions of graphs. Discrete Mathematics 91 (1991) pp. 239–248.
- M. Garey, D. Johnson, Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints. SIAM Journal on Computing 4 (1975) pp. 397–411.
- M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman & Co., 1979.
- R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J. D. Bohlinger (eds.), Complexity of Computer Computations. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.