離散最適化基礎論　第 7 回
集合に関する問題 (2)：発展

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 26 日

最終更新：2019 年 11 月 26 日　14:02

スケジュール 前半

- ⋆ 休み (大学院入学式) (10/1)
- 1 アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
- 2 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ⋆ 休み (祝日) (10/22)
- 3 充足可能性問題とその変種 (10/29)
- 4 グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択 (11/5)
- 5 グラフに関する問題 (2)：経路の選択 (11/12)
- 6 集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連 (11/19)
- 7 集合族に関する問題 (2)：発展 (11/26)

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)
- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)
11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)
- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 支配集合問題
  - シュタイナー木問題
- 集合族に関する問題について，直感を養う

目次

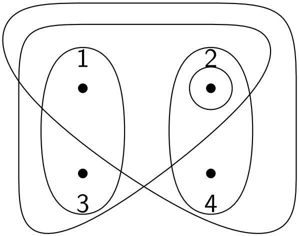
定義：集合族とは？

集合族 (set system, set family) とは，順序対 $(V, \mathcal{F})$ で，

- V は集合
- $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ は V の部分集合の集合

であるもののこと

例：$V = \{1, 2, 3, 4\}$，$\mathcal{F} = \{\{2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

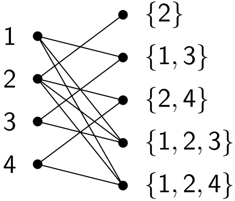


- 集合族を $(V, \mathcal{F})$ ではなく，ただ $\mathcal{F}$ とだけ書くこともある
- 集合族をハイパーグラフと呼ぶこともある

集合族の表現：接続行列と二部グラフ (接続グラフ)

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mathcal{F} = \{\{2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & \{2\} & \{1,3\} & \{2,4\} & \{1,2,3\} & \{1,2,4\} \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$



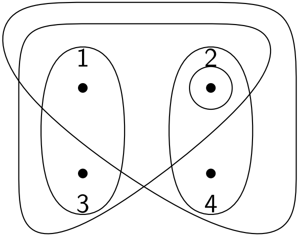
どちらの表現でも，入力のサイズは $O(|V||\mathcal{F}|)$ ($|V|$ と $|\mathcal{F}|$ の多項式)

集合被覆問題は NP 完全 (Karp '72)

集合被覆問題 (set covering problem, set cover problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の被覆とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{C}$ で，
V の任意の要素が $\mathcal{C}$ のある要素に含まれること

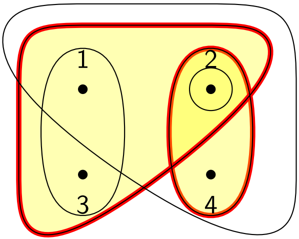


集合被覆問題は NP 完全 (Karp ’72)

集合被覆問題 (set covering problem, set cover problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の被覆とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{C}$ で，
V の任意の要素が $\mathcal{C}$ のある要素に含まれること

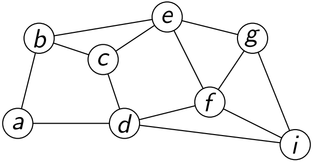


目次

支配集合問題 (dominating set problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の支配集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の支配集合を持たない $\Rightarrow$ No

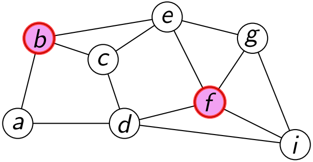
無向グラフ G の支配集合とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ の任意の頂点が D のある頂点に隣接しているもの



支配集合問題 (dominating set problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の支配集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の支配集合を持たない $\Rightarrow$ No

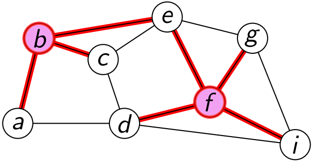
無向グラフ G の支配集合とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ の任意の頂点が D のある頂点に隣接しているもの



支配集合問題 (dominating set problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の支配集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の支配集合を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の**支配集合**とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ の任意の頂点が D のある頂点に隣接しているもの

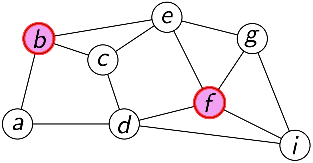


定理 (Garey, Johnson '79)

支配集合問題は NP 完全

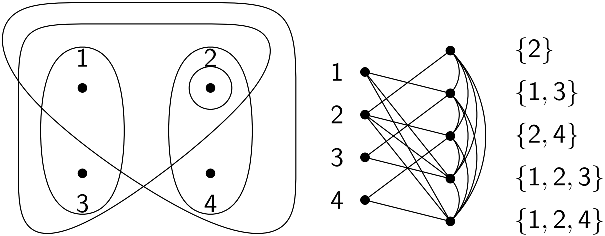
これを証明するためには，次を証明すればよい

- 支配集合問題が NP に所属すること
  (これは 独立集合問題 の場合と同様に証明できる)
- 集合被覆問題が支配集合問題に多項式時間多対一帰着可能であること

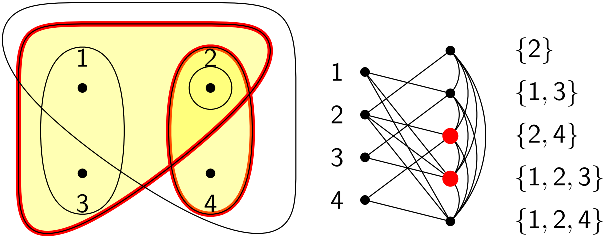


ここでは，Paz, Moran ('81) に書いてある帰着を紹介する

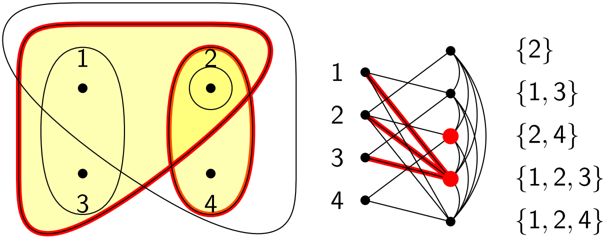
支配集合問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



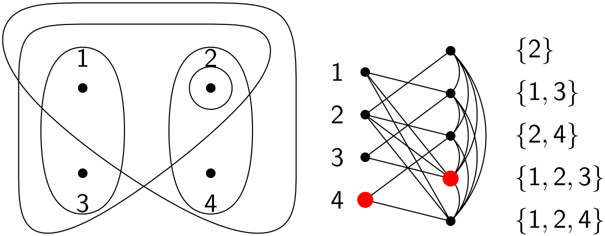
支配集合問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



支配集合問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)



支配集合問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)

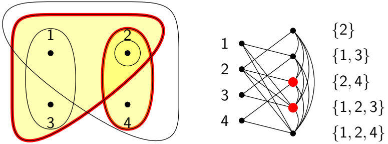


集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ から，支配集合問題の入力を構成

- $V = V' \cup \mathcal{F}', \quad k = k'$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\}$ $\cup \{\{X, Y\} \mid X, Y \in \mathcal{F}', X \neq Y\}$

このとき，

$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ $G = (V, E)$ が要素数 k 以下の支配集合を持つ



$$|V| = |V'| + |\mathcal{F}'|, \quad |E| = \sum_{X \in \mathcal{F}} |X| + \binom{|\mathcal{F}|}{2}$$ であり，

この構成は多項式時間でできる $\square$

支配集合問題と施設配置問題

支配集合問題は $\left\{\begin{array}{l}\text{施設配置問題}\\\text{クラスタリング問題}\end{array}\right\}$ と密接に関係している

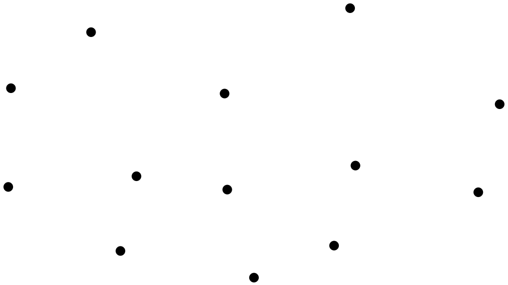
- 多くの施設配置問題 (クラスタリング問題) は，NP 困難
- 集合被覆問題か支配集合問題を帰着する (ことが多い)

施設配置問題 (クラスタリング問題) には，多くの変種がある

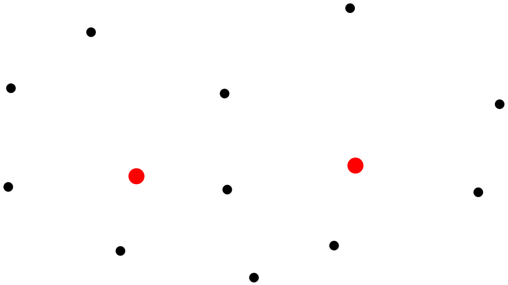
ここで紹介するのは，その中でも基本的なもの 2 つ

- p センター問題
- p メディアン問題

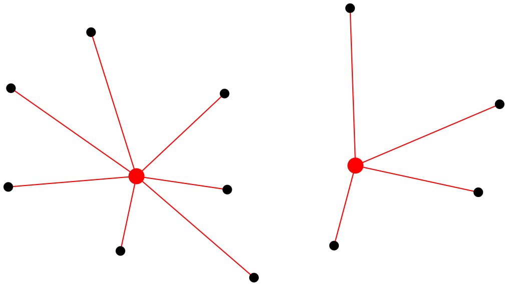
p センター問題と p メディアン問題：イメージ



p センター問題と p メディアン問題：イメージ



p センター問題と p メディアン問題：イメージ



- p センター問題：　赤い線分の最大長さを最小化
- p メディアン問題：赤い線分の長さの和を最小化

集合 V (有限集合でなくてもよい)

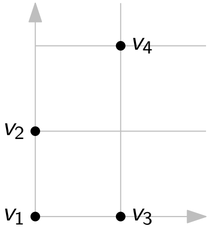
定義：距離とは？

V 上の距離 (metric) とは，次を満たす関数 $d\colon V^2 \to \mathbb{R}$ のこと

- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u,v) \geq 0$ (非負性)
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ((不可識別者) 同一性)
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u,v) = d(v,u)$ (対称性)
- 任意の $u, v, w \in V$ に対して，$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ (三角不等式)

距離：例 — 非負性

V = 次に示す平面上の 4 点の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	$\sqrt{5}$
v_2	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
v_3	1	$\sqrt{2}$	0	2
v_4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	0

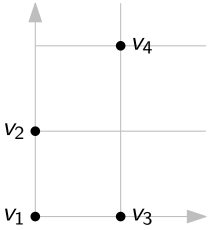
距離の性質：非負性

任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) \geq 0$

つまり，距離行列の成分はすべて非負

距離：例 — 同一性

V = 次に示す平面上の 4 点の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



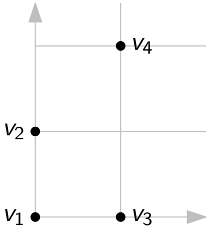
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	$\sqrt{5}$
v_2	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
v_3	1	$\sqrt{2}$	0	2
v_4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	0

距離の性質：(不可識別者) 同一性

任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

つまり，距離行列の対角成分はすべて 0 で，それ以外に 0 はない

V = 次に示す平面上の 4 点の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	$\sqrt{5}$
v_2	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
v_3	1	$\sqrt{2}$	0	2
v_4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	0

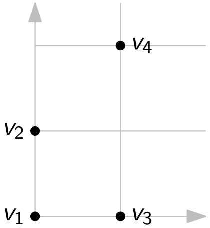
距離の性質：対称性

任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = d(v, u)$

つまり，距離行列は対称行列

距離：例 — 三角不等式

$V=$ 次に示す平面上の 4 点の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$



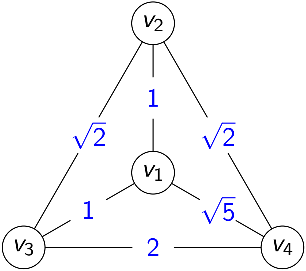
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	$\sqrt{5}$
v_2	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
v_3	1	$\sqrt{2}$	0	2
v_4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	0

距離の性質：三角不等式

任意の $u, v, w \in V$ に対して，$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

つまり，寄り道によって，経路長が短くなることはない

非負性，同一性，対称性より，
V が有限集合であるとき，距離は完全グラフの辺重みと見なせる



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	$\sqrt{5}$
v_2	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
v_3	1	$\sqrt{2}$	0	2
v_4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	0

ただし，重みはすべて正で，三角不等式を満たす必要がある

p センター問題 (p-center problem)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，距離 $d\colon E \to \mathbb{Z}_+$，正整数 p
- 出力：p 個の頂点から成る集合 $S \subseteq V$
- 評価：V の頂点と S の頂点の間の距離の最大値の最小化
(つまり，$\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s)$ の最小化)

p メディアン問題 (p-median problem)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，距離 $d\colon E \to \mathbb{Z}_+$，正整数 p
- 出力：p 個の頂点から成る集合 $S \subseteq V$
- 評価：V の頂点と S の頂点の間の距離の和の最小化
(つまり，$\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s)$ の最小化)

p センター問題 (判定問題版)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，距離 $d\colon E \to \mathbb{Z}_+$，
  正整数 p，正整数 k
- 出力：Yes または No
- 条件：$|S| = p$，$\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) \leq k$ となる $S \subseteq V$ が存在 $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

p メディアン問題 (判定問題版)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，距離 $d\colon E \to \mathbb{Z}_+$，
  正整数 p，正整数 k
- 出力：Yes または No
- 条件：$|S| = p$，$\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) \leq k$ となる $S \subseteq V$ が存在 $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

定理 (Kariv, Hakimi '79; Kariv, Hakimi '79)

- p センター問題 (判定問題版) は NP 完全
- p メディアン問題 (判定問題版) は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

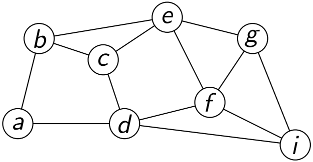
- p センター問題 (判定問題版) と p メディアン問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは 簡単に 証明できる)
- p センター問題 (判定問題版) と p メディアン問題 (判定問題版) に支配集合問題が多項式時間多対一帰着可能であること

2 つの問題に対して，同じ構成法を使う

連結な無向グラフ $G = (V, E)$

ポイントとなる事実

2 頂点 u, v 間の最短路の長さを $d(u, v)$ とすると
関数 $d \colon V^2 \to \mathbb{Z}$ は距離である



距離行列

	a	b	c	d	e	f	g	i
a	0	1	2	1	2	2	3	2
b	1	0	1	2	1	2	2	3
c	1	1	0	1	1	2	2	2
d	1	2	1	0	2	1	2	1
e	2	1	1	2	0	1	1	2
f	2	2	2	1	1	0	1	1
g	3	2	2	2	1	1	0	1
i	2	3	2	1	2	1	1	0

連結な無向グラフ $G = (V, E)$

ポイントとなる事実

2 頂点 u, v 間の最短路の長さを $d(u, v)$ とすると
関数 $d\colon V^2 \to \mathbb{Z}$ は距離である

- 非負性，同一性，対称性が満たされることはすぐに分かる
- 三角不等式が満たされることを証明する

復習：関数 $d\colon V^2 \to \mathbb{R}$ が距離であるとは，次を満たすこと

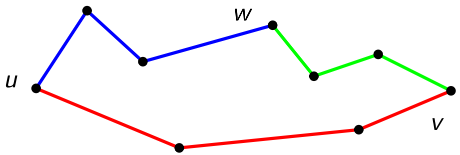
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) \geq 0$ (非負性)
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ((不可識別者) 同一性)
- 任意の $u, v \in V$ に対して，$d(u, v) = d(v, u)$ (対称性)
- 任意の $u, v, w \in V$ に対して，$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (三角不等式)

証明すること

任意の $u, v, w \in V$ に対して，$d(u, v) \le d(u, w) + d(w, v)$

任意の頂点 $u, v, w \in V$ を考える

- 頂点 x, y 間の最短経路 (の 1 つ) を $P(x, y)$ とする
  (つまり，$d(x, y)$ は $P(x, y)$ の長さ)
- $\boxed{P(u, w)}$ と $\boxed{P(w, v)}$ をつなげると，u, v 間の経路 Q を作れる
- $\therefore$ $\boxed{d(u, v)} \le Q$ の長さ $=$ $\boxed{P(u, w)}$ の長さ $+$ $\boxed{P(w, v)}$ の長さ
  $= d(u, w) + d(w, v)$ □



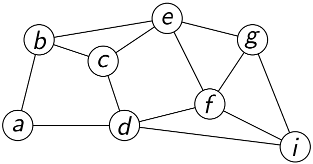
連結な無向グラフ $G = (V, E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

1. G に要素数 p の支配集合が存在する
2. $|S| = p$ で $\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = 1$ となる集合 S が存在する
3. $|S| = p$ で $\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = |V| - |S|$ となる集合 S が存在する

イメージ



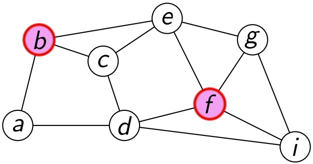
連結な無向グラフ $G = (V, E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

1. G に要素数 p の支配集合が存在する
2. $|S| = p$ で $\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = 1$ となる集合 S が存在する
3. $|S| = p$ で $\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = |V| - |S|$ となる集合 S が存在する

イメージ



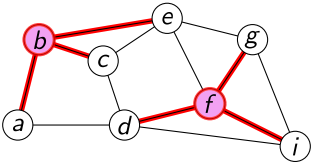
連結な無向グラフ $G=(V,E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

1. G に要素数 p の支配集合が存在する
2. $|S|=p$ で $\max_{v\in V}\min_{s\in S} d(v,s)=1$ となる集合 S が存在する
3. $|S|=p$ で $\sum_{v\in V}\min_{s\in S} d(v,s)=|V|-|S|$ となる集合 S が存在する

イメージ



連結な無向グラフ $G = (V, E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

1. G に要素数 p の支配集合が存在する
2. $|S| = p$ で $\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = 1$ となる集合 S が存在する

1 $\Leftrightarrow$ 2 の証明：S が G の支配集合である

$\Leftrightarrow$ 任意の $v \in S$ に対して，$\min_{s \in S} d(v, s) = 0$ であり，
任意の $v \in V - S$ に対して，$\min_{s \in S} d(v, s) = 1$ である

$\Leftrightarrow$ S は $\max_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = 1$ を満たす

連結な無向グラフ $G = (V, E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

1. G に要素数 p の支配集合が存在する
3. $|S| = p$ で $\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = |V| - |S|$ となる集合 S が存在する

1 ⇒ 3 の証明：S が G の支配集合であり，$|S| = p$ であるとする

- このとき， 任意の $v \in S$ に対して，$\min_{s \in S} d(v, s) = 0$ であり，
  任意の $v \in V - S$ に対して，$\min_{s \in S} d(v, s) = 1$ である
- $\therefore$ S は $\sum_{v \in V} \min_{s \in S} d(v, s) = |V| - |S|$ を満たす □

連結な無向グラフ $G=(V,E)$，d は G 上の最短路の長さを与える関数

性質

次は同値

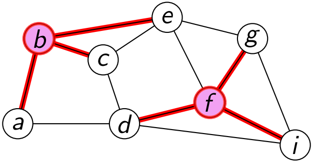
1. G に要素数 p の支配集合が存在する
3. $|S|=p$ で $\sum_{v\in V}\min_{s\in S} d(v,s) = |V|-|S|$ となる集合 S が存在する

<u>3 ⇒ 1 の証明</u>：S が $\sum_{v\in V}\min_{s\in S} d(v,s) = |V|-|S|$ を満たし，$|S|=p$ であるとする

- このとき，任意の $v\in S$ に対して，$\min_{s\in S} d(v,s)=0$ であるので，
$$\sum_{v\in V}\min_{s\in S} d(v,s) = \sum_{v\in V-S}\min_{s\in S} d(v,s)$$
- 任意の $v\in V-S$ に対して，$d(v,s)$ は正整数なので，$d(v,s)=1$
- $\therefore$ S は G の支配集合 □

支配集合問題の入力 $G' = (V', E'), k'$ から，
p センター問題の入力 d, p, k を作る

- 任意の $u, v \in V'$ に対して，$d(u, v) = u$ と v を結ぶ最短経路の長さ
- $p = k'$，$k = 1$



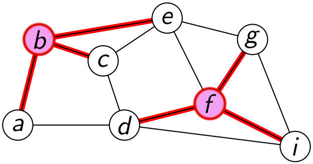
先ほどの性質から，次の 2 つは同値

- G' が要素数 k' 以下の支配集合を持つ　　(支配集合問題の Yes 入力)
- 構成した p センター問題の入力が Yes 入力

細かいこと：G' が非連結であるとき，工夫が必要

支配集合問題の入力 $G' = (V', E'), k'$ から，
p メディアン問題の入力 d, p, k を作る

- 任意の $u, v \in V'$ に対して，$d(u, v) = u$ と v を結ぶ最短経路の長さ
- $p = k'$，$k = |V'| - k'$



先ほどの性質から，次の 2 つは同値

- G' が要素数 k' 以下の支配集合を持つ　　(支配集合問題の Yes 入力)
- 構成した p メディアン問題の入力が Yes 入力

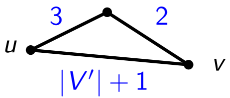
細かいこと：G' が非連結であるとき，工夫が必要

距離行列を多項式時間で作成する

幅優先探索 (breadth-first search) を用いればよい

グラフ $G' = (V', E')$ が非連結である場合

- 異なる連結成分に含まれる 2 頂点 u, v に対して，次のように定める
$$d(u, v) = |V'| + 1$$
- このとき，d は距離になる (特に，三角不等式を満たす)

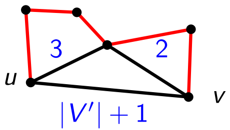


距離行列を多項式時間で作成する

幅優先探索 (breadth-first search) を用いればよい

グラフ $G' = (V', E')$ が非連結である場合

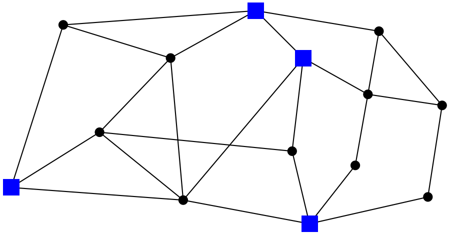
- 異なる連結成分に含まれる 2 頂点 u, v に対して，次のように定める
$$d(u, v) = |V'| + 1$$
- このとき，d は距離になる (特に，三角不等式を満たす)



目次

シュタイナー木問題 (Steiner tree problem)

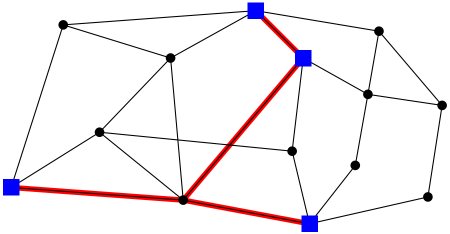
- 入力：グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $R \subseteq V$
- 出力：G の辺集合 $T \subseteq E$ で，グラフ $G' = (V, T)$ において，R の任意の 2 頂点を結ぶ経路があるもの
- 評価：$|T|$ (T の要素数)



シュタイナー木問題の「出力」となる「木」のことを
R を端子とするシュタイナー木と呼ぶことがある

シュタイナー木問題 (Steiner tree problem)

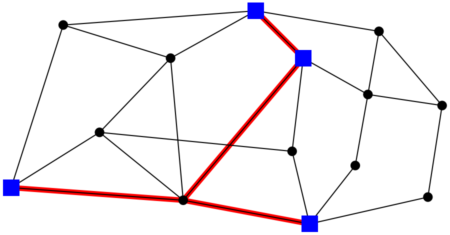
- 入力：グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $R \subseteq V$
- 出力：G の辺集合 $T \subseteq E$ で，グラフ $G' = (V, T)$ において，R の任意の 2 頂点を結ぶ経路があるもの
- 評価：$|T|$ (T の要素数)



シュタイナー木問題の「出力」となる「木」のことを
R を端子とするシュタイナー木と呼ぶことがある

シュタイナー木問題 (判定問題版)

- 入力：グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $R \subseteq V$，正整数 k
- 出力：Yes または No
- 条件：R を端子とするシュタイナー木で，
  辺数が k 以下のものが存在 $\Rightarrow$ Yes
  そうでない $\Rightarrow$ No

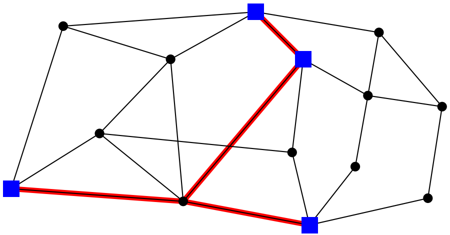


定理 (Karp '72)

シュタイナー木問題 (判定問題版) は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- シュタイナー木問題 (判定問題版) が NP に所属すること
- 集合被覆問題がシュタイナー木問題 (判定問題版) に多項式時間多対一帰着可能であること



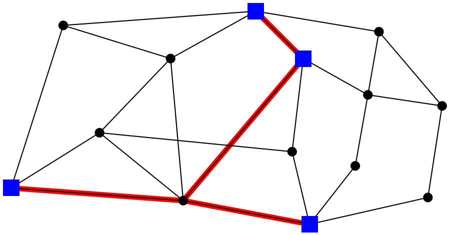
ここでは，Cygan ら ('16) に書いてある帰着を紹介する

Yes 入力の証拠：辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木 T

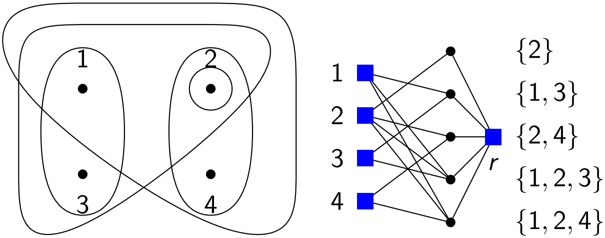
多項式時間検証アルゴリズム

1. T の辺数が k 以下であるか，確認
2. T が木であるか，確認
3. R の任意の 2 頂点が T の辺を用いて結ばれているか，確認

「2 と 3 の部分」では，深さ優先探索等を用いればよい



集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ が与えられる



次のようにシュタイナー木問題の入力 $G = (V, E), R, k$ を作成する

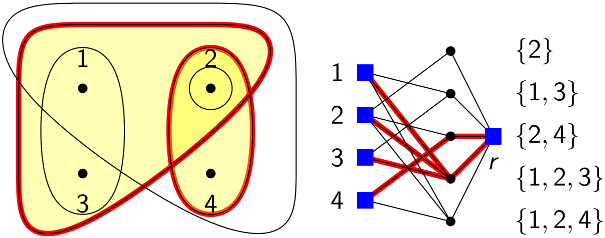
- $V = V' \cup \mathcal{F}' \cup \{r\}$, $R = V' \cup \{r\}$, $k = k' + |V'|$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in \mathcal{F}'\}$

このとき，

$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k' 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ G が辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木を持つ

また，この構成は多項式時間でできる □

集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ が与えられる



次のようにシュタイナー木問題の入力 $G = (V, E), R, k$ を作成する

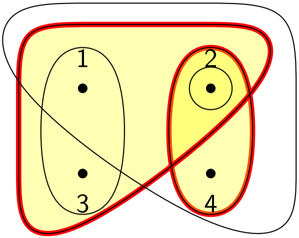
- $V = V' \cup \mathcal{F}' \cup \{r\}$, $R = V' \cup \{r\}$, $k = k' + |V'|$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in \mathcal{F}'\}$

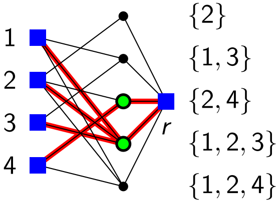
このとき，

$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k' 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ G が辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木を持つ

また，この構成は多項式時間でできる □

集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ が与えられる





次のようにシュタイナー木問題の入力 $G = (V, E), R, k$ を作成する

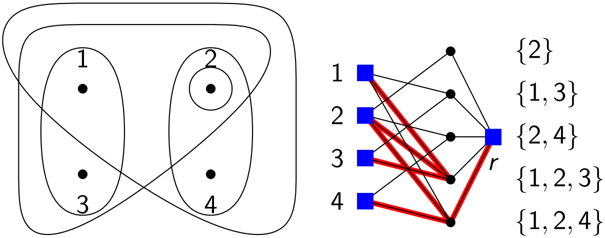
- $V = V' \cup \mathcal{F}' \cup \{r\}$, $R = V' \cup \{r\}$, $k = k' + |V'|$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in \mathcal{F}'\}$

このとき，

$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k' 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ G が辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木を持つ

また，この構成は多項式時間でできる $\square$

集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ が与えられる



次のようにシュタイナー木問題の入力 $G = (V, E), R, k$ を作成する

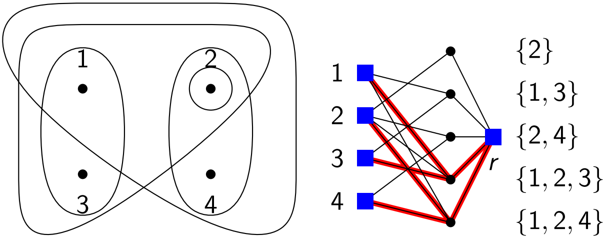
- $V = V' \cup \mathcal{F}' \cup \{r\}$, $R = V' \cup \{r\}$, $k = k' + |V'|$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in \mathcal{F}'\}$

このとき，

$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k' 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ G が辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木を持つ

また，この構成は多項式時間でできる □

集合被覆問題の入力 $V', \mathcal{F}', k'$ が与えられる



次のようにシュタイナー木問題の入力 $G = (V, E), R, k$ を作成する

- $V = V' \cup \mathcal{F}' \cup \{r\}$, $R = V' \cup \{r\}$, $k = k' + |V'|$
- $E = \{\{v, X\} \mid v \in V', X \in \mathcal{F}', v \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in \mathcal{F}'\}$

このとき，

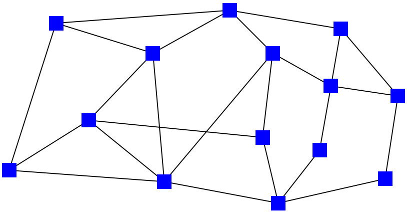
$(V', \mathcal{F}')$ が要素数 k' 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ G が辺数 k 以下の R に関するシュタイナー木を持つ

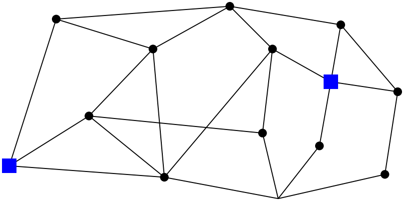
また，この構成は多項式時間でできる □

シュタイナー木問題はいつ簡単なのか？

次のときは多項式時間で解ける

- $|R| = |V|$ のとき：全域木問題 (連結性問題)
- $|R| = 2$ のとき：最短路問題





つまり，$|R|$ が大きいときや小さいときは簡単に思える

実際，シュタイナー木問題は

- $|R| = |V| - \ell$ のとき　($|R|$ が大きいとき)
  - $O(2^\ell \mathrm{poly}(|V|))$ 時間で解ける (Exercise)
- $|R| = \ell$ のとき　($|R|$ が小さいとき)
  - $O(3^\ell \mathrm{poly}(|V|))$ 時間で解ける (Dreyfus, Wagner '72)
  - $O(2^\ell \mathrm{poly}(|V|))$ 時間で解ける (Björklund ら '07)

つまり，シュタイナー木問題が難しいのは，$|R|$ が中程度のとき

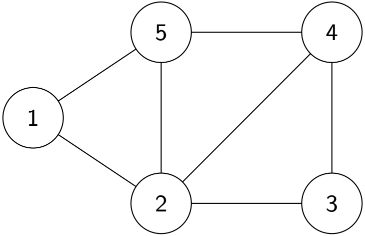
目次

補足 (重要)

無向グラフは集合族 ($\because$ グラフの辺は要素数 2 の部分集合)

無向グラフの例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



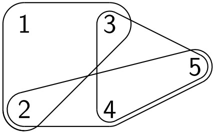
「無向グラフ」は「2 一様ハイパーグラフ」である

定義：k 一様ハイパーグラフ (k-uniform hypergraph) とは？

正整数 k に対して，k 一様ハイパーグラフとは，集合族 $(V, \mathcal{F})$ で任意の $X \in \mathcal{F}$ が $|X| = k$ を満たすもののこと

3 一様ハイパーグラフの例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$



$\boxed{\text{注}}$：「k 一様ハイパーグラフ」を単に「k グラフ (k-graph)」と呼ぶことがあるが，個人的には好ましくないと思う

直感 1

「3 一様ハイパーグラフに対する問題」は
「2 一様ハイパーグラフに対する問題」と同じ程度以上に難しい

難しさを不等号で表すと

$$3\text{ 一様ハイパーグラフの問題} \geq 2\text{ 一様ハイパーグラフの問題}$$

例：

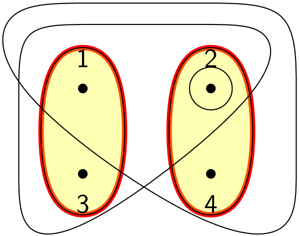
	3 一様	2 一様	
集合被覆問題	NP 完全	多項式時間	(辺被覆問題)
集合充填問題	NP 完全	多項式時間	(マッチング問題)
集合横断問題	NP 完全	NP 完全	(頂点被覆問題)
集合分割問題	NP 完全	多項式時間	(完全マッチング問題)

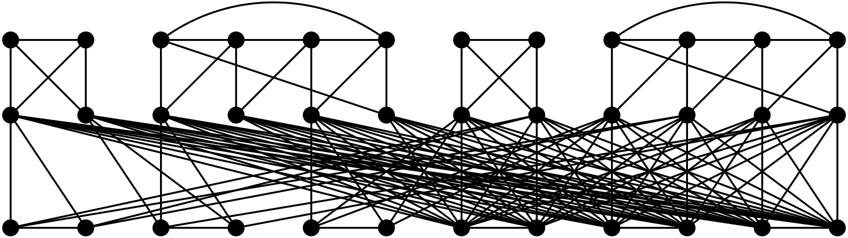
分割 = 被覆であり，かつ，充填であるもの

集合分割問題 (set partition problem, set partitioning problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が V の分割を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が V の分割を持たない $\Rightarrow$ No

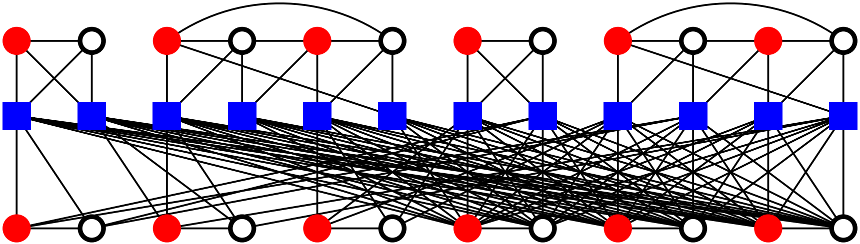
$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が V の分割であるとは，
V の任意の要素が $\mathcal{P}$ のちょうど 1 つの要素に含まれること





帰着で構成した集合族は 3 一様ハイパーグラフだった

- つまり，入力が 3 一様ハイパーグラフであっても，
  集合分割問題は NP 完全



帰着で構成した集合族は 3 一様ハイパーグラフだった

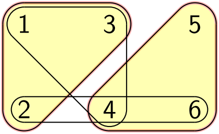
- つまり，入力が 3 一様ハイパーグラフであっても，
  集合分割問題は NP 完全

3 一様ハイパーグラフ $(V, \mathcal{F})$

性質

$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ に対して，次は同値

1. $\mathcal{F}'$ は V の分割
2. $\mathcal{F}'$ は要素数 $|V|/3$ の被覆
3. $\mathcal{F}'$ は要素数 $|V|/3$ の充填



- つまり，入力が 3 一様ハイパーグラフであっても，集合被覆問題と集合充填問題は NP 完全

直感 2

「3 一様ハイパーグラフに対する問題」は難しい

例：

	3 一様
集合被覆問題	NP 完全
集合充填問題	NP 完全
集合横断問題	NP 完全
集合分割問題	NP 完全

重要な例外：3 一様ハイパーグラフにおける全域木問題
(多項式時間で解ける)

目次

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 支配集合問題
  - シュタイナー木問題
- 集合族に関する問題について，直感を養う

次回の予告

- 数値が関わる問題を考察する
  - 数値の入力法 $\rightsquigarrow$ 2 進法と 1 進法
  - 2 進法に対する NP 完全性 (2 分割問題，ナップサック問題など)

- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Fourier meets Möbius: Fast subset convolution. Proceedings of STOC 2007 (2007) pp. 67–74.
- M. Cygan, H. Dell, D. Lokshtanov, D. Marx, J. Nederlof, Y. Okamoto, R. Paturi, S. Saurabh, M. Wahlström, On problems as hard as CNF-SAT. ACM Transactions on Algorithms 12 (2016) pp. 41:1-41:24.
- S. Dreyfus, R. Wagner, The Steiner problem in graphs. Networks 1 (1972) pp. 195–207.
- M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman & Co., 1979.
- O. Kariv, L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems I: The *p*-centers. SIAM Journal on Applied Mathematics 37 (1979) pp. 513–538.

文献案内 (2)

- O. Kariv, L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems II: The p-medians. SIAM Journal on Applied Mathematics 37 (1979) pp. 539–560.
- R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J. D. Bohlinger (eds.), Complexity of Computer Computations. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.
- A. Paz, S. Moran, Non deterministic polynomial optimization problems and their approximations. Theoretical Computer Science 15 (1981) pp. 251–277.