離散最適化基礎論　第 6 回
集合に関する問題 (1)：グラフとの関連

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 19 日

最終更新：2019 年 11 月 19 日　13:47

スケジュール 前半 (予定)

- ⋆ 休み (大学院入学式) (10/1)
1. アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
2. 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ⋆ 休み (祝日) (10/22)
3. 充足可能性問題とその変種 (10/29)
4. グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択 (11/5)
5. グラフに関する問題 (2)：経路の選択 (11/12)
6. 集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連 (11/19)
7. 集合族に関する問題 (2)：発展 (11/26)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)
- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)
11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)
- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- 集合に関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 集合被覆問題 (set covering problem)
  - 集合充填問題 (set packing problem)
  - 集合横断問題 (set transversal problem)
  - 集合分割問題 (set partition problem)

目次

「問題 P が NP 完全」の証明の流れ

1. P が NP に所属することを証明する
2. ある NP 完全問題 Q が P に多項式時間多対一帰着可能であることを証明する

主要な部分：

- Q の選定
- 多項式時間多対一帰着 (アルゴリズム) の設計

今のところ，NP 完全問題 Q として使える問題：

- CNF-SAT
- 3-SAT
- 独立集合問題
- クリーク問題
- 頂点被覆問題
- 3 彩色問題
- ハミルトン閉路問題
- 有向グラフのハミルトン閉路問題
- 巡回セールスマン問題 (判定問題版)

目次

定義：集合族とは？

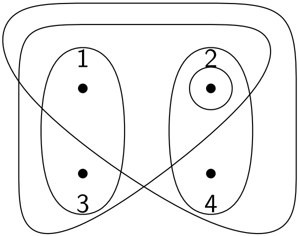
集合族 (set system, set family) とは，順序対 $(V, \mathcal{F})$ で，

- V は集合
- $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ は V の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mathcal{F} = \{\{2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

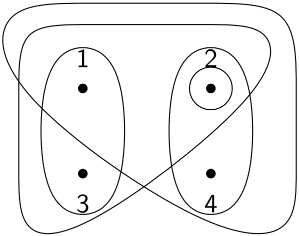


定義：ハイパーグラフとは？

集合族 $(V, \mathcal{F})$ のことを**ハイパーグラフ** (hypergraph) と呼ぶこともある．このとき，

- V の要素はハイパーグラフの頂点 (vertex)，
- $\mathcal{F}$ の要素はハイパーグラフの辺 (ハイパー辺，hyperedge)

とも呼ばれる

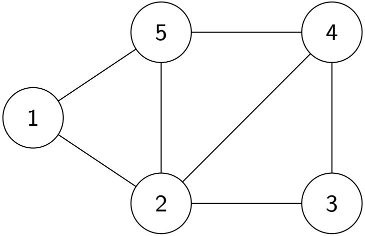


補足 (重要)

無向グラフは集合族 ($\because$ グラフの辺は要素数 2 の部分集合)

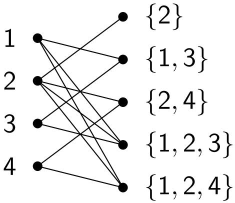
無向グラフの例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mathcal{F} = \{\{2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & \{2\} & \{1,3\} & \{2,4\} & \{1,2,3\} & \{1,2,4\} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$



どちらの表現でも，入力のサイズは $O(|V||\mathcal{F}|)$ ($|V|$ と $|\mathcal{F}|$ の多項式)

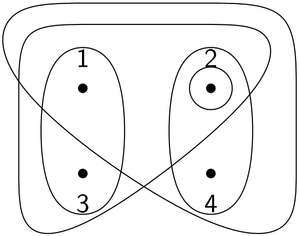
目次

集合被覆問題：集合で，全体を覆う問題

集合被覆問題 (set covering problem, set cover problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の被覆とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{C}$ で，
V の任意の要素が $\mathcal{C}$ のある要素に含まれること

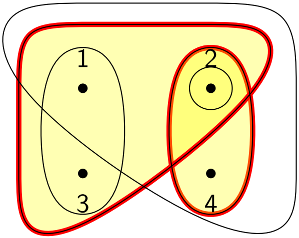


集合被覆問題：集合で，全体を覆う問題

集合被覆問題 (set covering problem, set cover problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の被覆とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{C}$ で，
V の任意の要素が $\mathcal{C}$ のある要素に含まれること

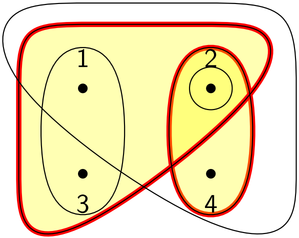


定理 (Karp '72)

集合被覆問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 集合被覆問題が NP に所属すること
- 頂点被覆問題が集合被覆問題に多項式時間多対一帰着可能であること



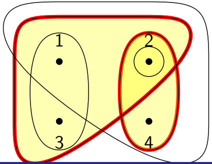
集合被覆問題

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の被覆を持たない $\Rightarrow$ No

Yes 入力の証拠：要素数 k 以下の被覆 $\mathcal{C}$

多項式時間検証アルゴリズム

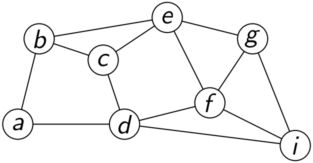
1. $\mathcal{C}$ の要素数が k 以下であるか，確認
2. V のどの要素も $\mathcal{C}$ のある要素に含まれるか，確認

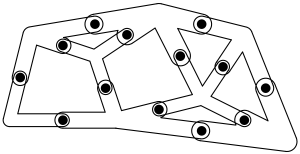


復習：頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の頂点被覆とは，G' の頂点部分集合 S で
G' のどの辺も S に端点を持つもの

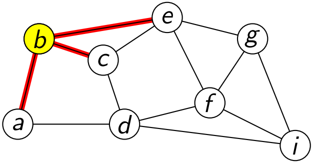


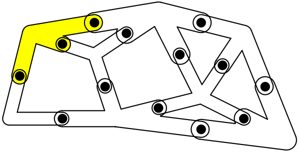


復習：頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の頂点被覆とは，G' の頂点部分集合 S で
G' のどの辺も S に端点を持つもの

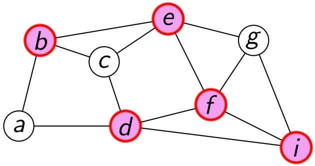


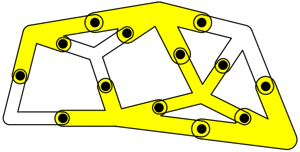


復習：頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の頂点被覆とは，G' の頂点部分集合 S で
G' のどの辺も S に端点を持つもの



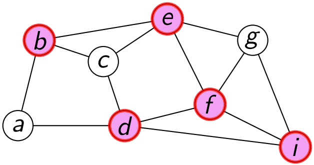


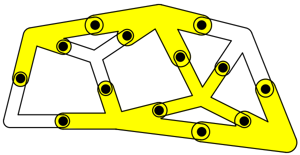
頂点被覆問題の入力 $G' = (V', E'), k'$ から，集合被覆問題の入力を構成

- $V = E'$，$\mathcal{F} = \{E'(v) \mid v \in V'\}$
  ただし，$E'(v)$ は G' において v' に接続する辺全体の集合
- $k = k'$

このとき，

G' が要素数 k 以下の頂点被覆を持つ	$\Leftrightarrow$	$(V, \mathcal{F})$ が要素数 k 以下の被覆を持つ





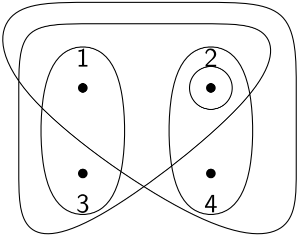
$|V| = |E'|$，$|\mathcal{F}| = |V'|$ であり，この構成は多項式時間でできる □

充填 (じゅうてん) = 敷き詰め

集合充填問題 (set packing problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以上の充填を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以上の充填を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の充填とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{P}$ で，
$\mathcal{P}$ の任意の 2 要素が V の共通要素を持たないこと

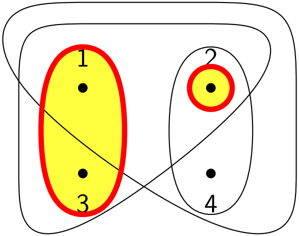


充填 (じゅうてん) = 敷き詰め

集合充填問題 (set packing problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以上の充填を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以上の充填を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $\mathcal{F}$ の充填とは，$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{P}$ で，
$\mathcal{P}$ の任意の 2 要素が V の共通要素を持たないこと

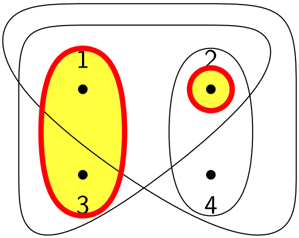


定理 (Karp '72)

集合充填問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

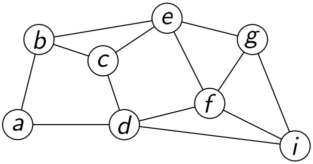
- 集合充填問題が NP に所属すること
(これは 集合被覆問題 の場合と同様に証明できる)
- 独立集合問題が集合充填問題に多項式時間多対一帰着可能であること

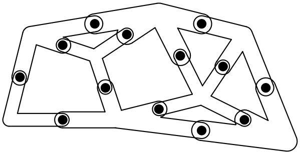


復習：独立集合問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の独立集合とは，G' の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの

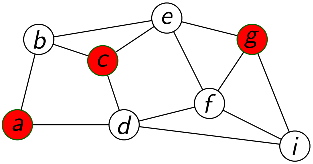


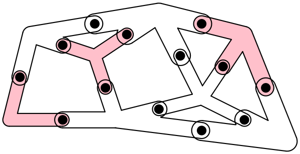


復習：独立集合問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の独立集合とは，G' の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの



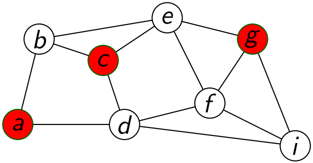


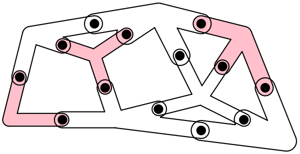
独立集合問題の入力 $G' = (V', E'), k'$ から，集合充填問題の入力を構成

- $V = E'$，$\mathcal{F} = \{E'(v) \mid v \in V'\}$
  ただし，$E'(v)$ は G' において v' に接続する辺全体の集合
- $k = k'$

このとき，

G' が要素数 k 以上の独立集合を持つ $\Leftrightarrow$ $(V, \mathcal{F})$ が要素数 k 以上の充填を持つ





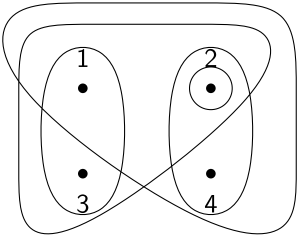
$|V| = |E'|$，$|\mathcal{F}| = |V'|$ であり，この構成は多項式時間でできる □

目次

集合横断問題 (set transversal problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の横断を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の横断を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $(V, \mathcal{F})$ の横断 (transversal) とは，V の部分集合 H で，
$\mathcal{F}$ の任意の要素が H の要素を含むこと

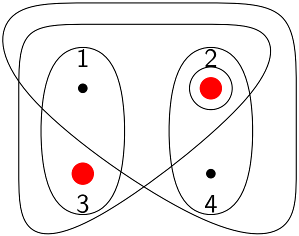


横断を，打集合 (hitting set) と呼ぶこともある

集合横断問題 (set transversal problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の横断を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が要素数 k 以下の横断を持たない $\Rightarrow$ No

集合族 $(V, \mathcal{F})$ の横断 (transversal) とは，V の部分集合 H で，$\mathcal{F}$ の任意の要素が H の要素を含むこと



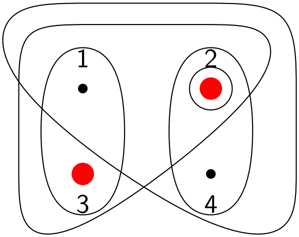
横断を，打集合 (hitting set) と呼ぶこともある

定理 (Karp '72)

集合横断問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

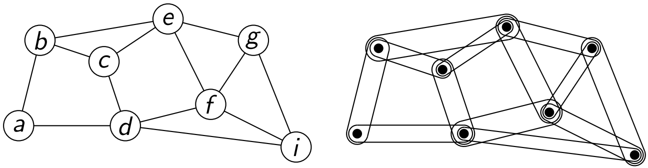
- 集合横断問題が NP に所属すること
  (これは 集合被覆問題 の場合と同様に証明できる)
- 頂点被覆問題が集合横断問題に多項式時間多対一帰着可能であること



復習：頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

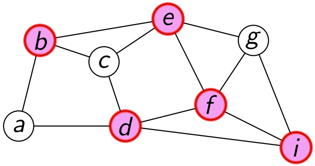
無向グラフ G' の**頂点被覆**とは，G' の頂点部分集合 S で
G' のどの辺も S に端点を持つもの

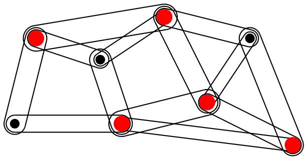


復習：頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G'，自然数 $k' \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G' が要素数 k' 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G' の頂点被覆とは，G' の頂点部分集合 S で
G' のどの辺も S に端点を持つもの





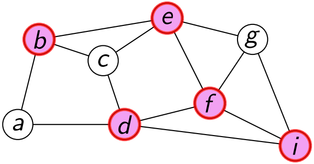
集合横断問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (2)

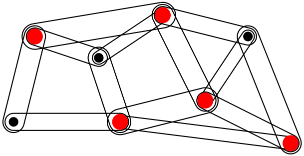
頂点被覆問題の入力 $G' = (V', E'), k'$ から，集合横断問題の入力を構成

- $V = V'$，$\mathcal{F} = E'$，$k = k'$

このとき，

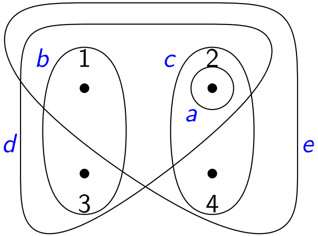
G' が要素数 k 以下の頂点被覆を持つ	$\Leftrightarrow$	$(V, \mathcal{F})$ が要素数 k 以下の横断を持つ

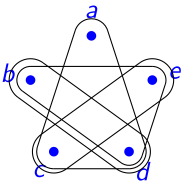




$|V| = |V'|$，$|\mathcal{F}| = |E'|$ なので，この構成は多項式時間でできる $\square$

集合被覆問題を集合横断問題に多対一多項式時間帰着



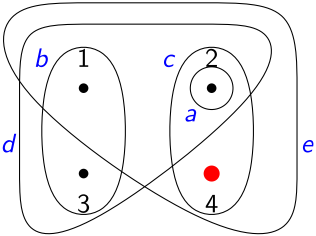


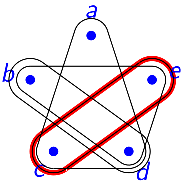
接続行列を見ると,「転置」の関係にある

	a	b	c	d	e
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1

	1	2	3	4
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	1	1	0
e	1	1	0	1

集合被覆問題を集合横断問題に多対一多項式時間帰着



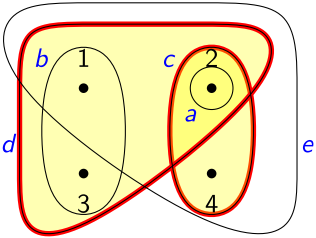


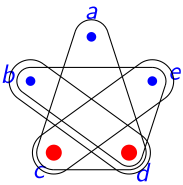
接続行列を見ると,「転置」の関係にある

	a	b	c	d	e
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1

	1	2	3	4
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	1	1	0
e	1	1	0	1

集合被覆問題を集合横断問題に多対一多項式時間帰着





接続行列を見ると,「転置」の関係にある

	a	b	c	d	e
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1

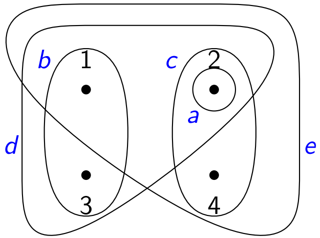
	1	2	3	4
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	1	1	0
e	1	1	0	1

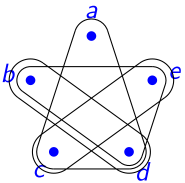
ハイパーグラフ $\mathcal{H} = (V, \mathcal{F})$

定義：双対ハイパーグラフとは？

$\mathcal{H}$ の双対ハイパーグラフとは，次のハイパーグラフ $(V', \mathcal{F}')$

- $V' = \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}(v) \subseteq \mathcal{F} \mid v \in V\}$
  ただし，$\mathcal{F}(v)$ は v を要素として含む $\mathcal{F}$ の要素全体の集合

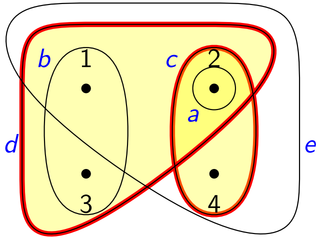


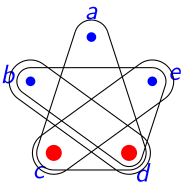


注：無向グラフの双対グラフは，これと違う概念

集合被覆問題の入力 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{F})$ に対して，
その双対ハイパーグラフ $\mathcal{H}'$ を考えると

$\mathcal{H}$ が要素数 k 以下の被覆を持つ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}'$ が要素数 k 以下の横断を持つ





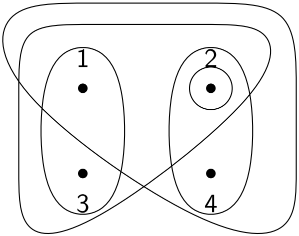
$\mathcal{H}'$ の構成は多項式時間でできる □

分割 = 被覆であり，かつ，充填であるもの

集合分割問題 (set partition problem, set partitioning problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が V の分割を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が V の分割を持たない $\Rightarrow$ No

$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が V の分割であるとは，
V の任意の要素が $\mathcal{P}$ のちょうど 1 つの要素に含まれること

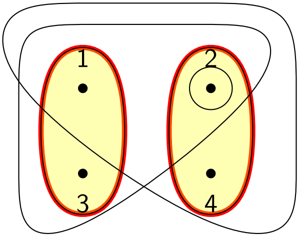


分割 = 被覆であり，かつ，充填であるもの

集合分割問題 (set partition problem, set partitioning problem)

- 入力：集合族 $(V, \mathcal{F})$
- 出力：Yes か No
- 条件：$\mathcal{F}$ が V の分割を持つ $\Rightarrow$ Yes
  $\mathcal{F}$ が V の分割を持たない $\Rightarrow$ No

$\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が V の分割であるとは，
V の任意の要素が $\mathcal{P}$ のちょうど 1 つの要素に含まれること

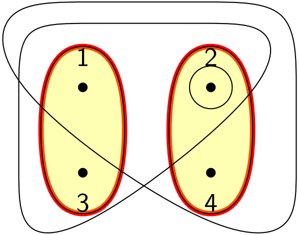


定理 (Karp '72)

集合分割問題は NP 完全

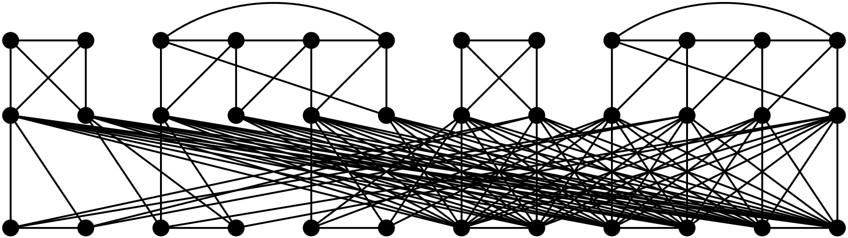
これを証明するためには，次を証明すればよい

- 集合分割問題が NP に所属すること
  (これは 集合被覆問題 の場合と同様に証明できる)
- 3-SAT が集合分割問題に多項式時間多対一帰着可能であること

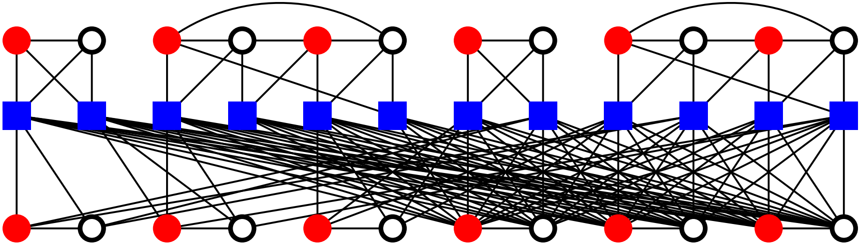


紹介する証明は，Garey, Johnson ('72) と Caprara, Rizzi ('02) を参考にした

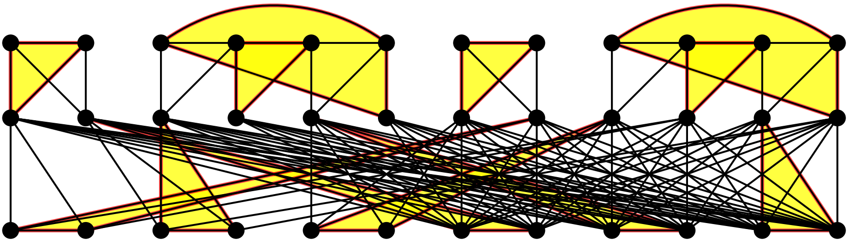
$\boxed{\text{例}}$ ：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



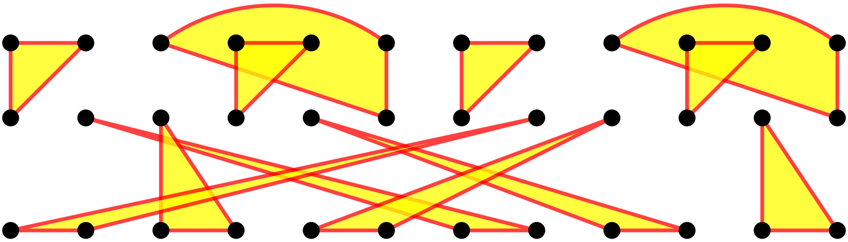
$\boxed{\text{例}}$：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



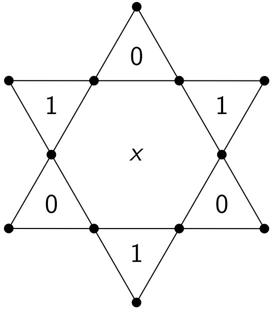
$\boxed{\text{例}}$ ：$n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき

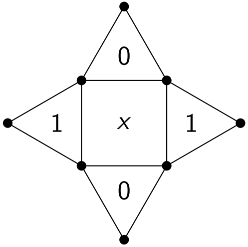


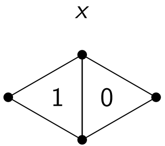
$\boxed{\text{例}}$ ：$n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{=C_1} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4})}_{=C_2} \land \underbrace{(x_2 \lor x_3 \lor x_4)}_{=C_3}$ のとき



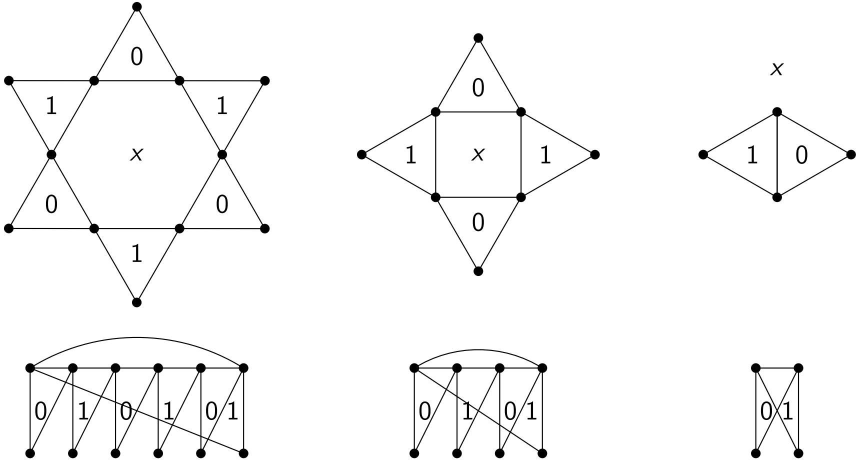
変数ガジェット





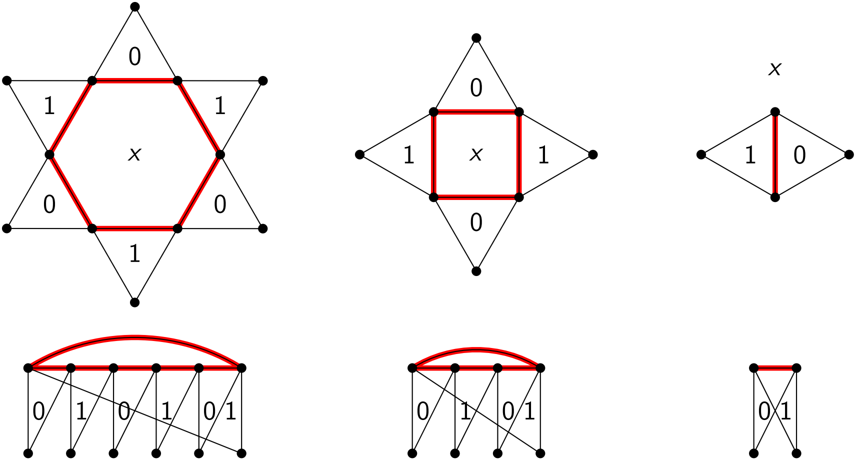


変数ガジェット

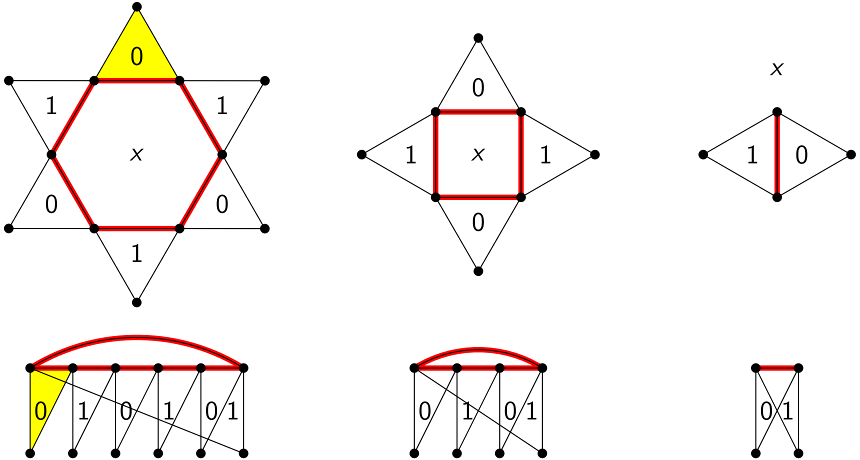


集合分割問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (2)

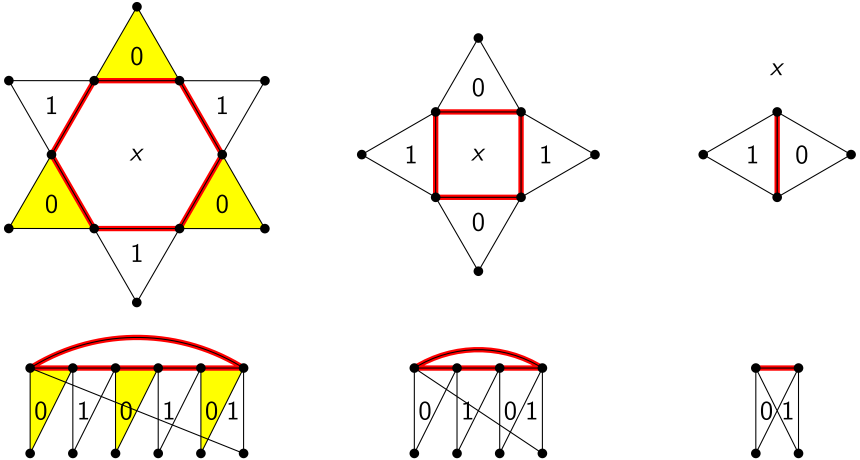
変数ガジェット



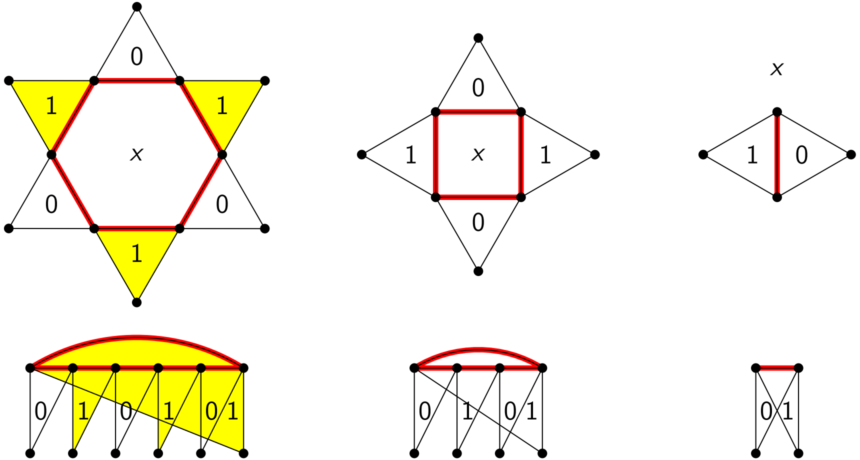
変数ガジェット



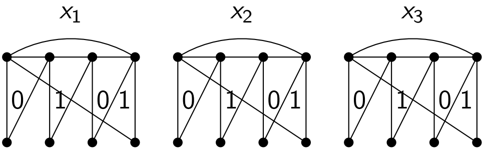
変数ガジェット

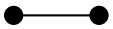


変数ガジェット

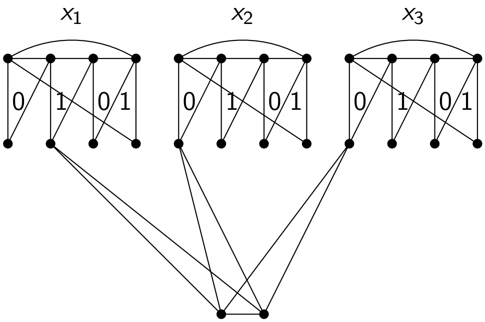


節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき

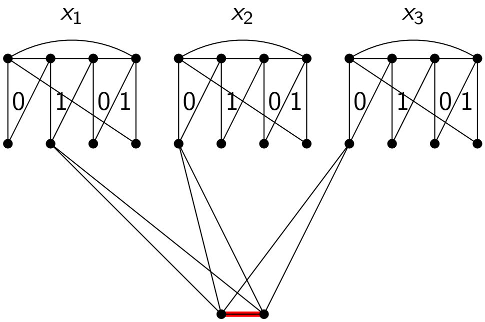




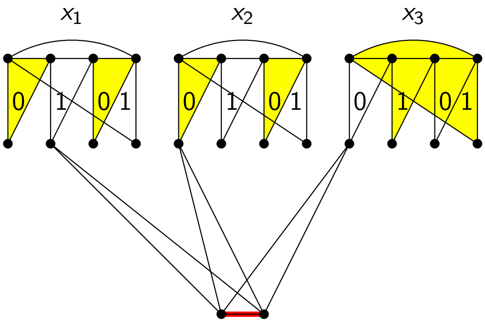
節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき



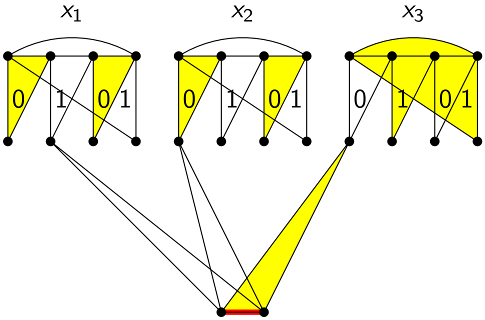
節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき



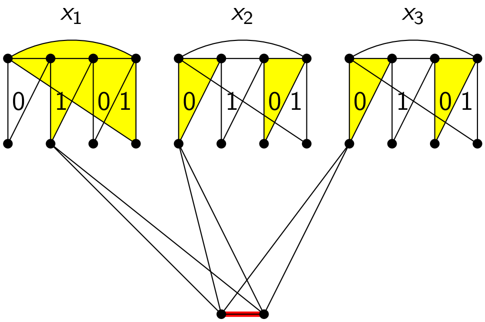
節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき



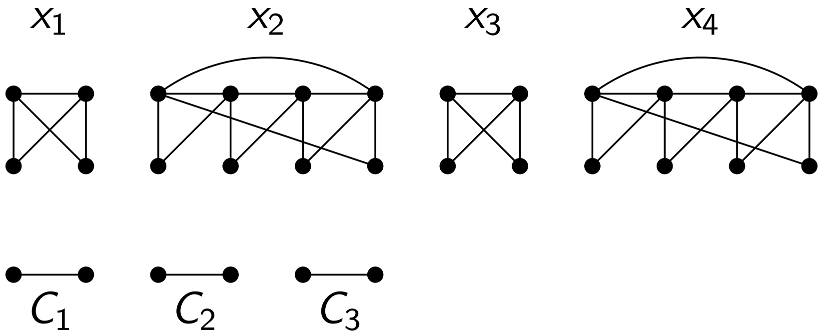
節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき



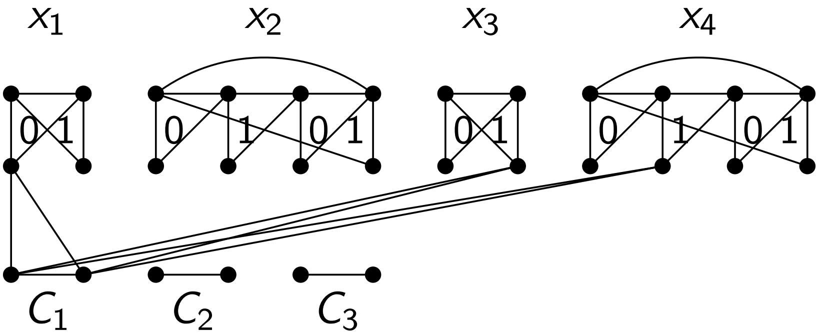
節ガジェット：節が $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ のとき



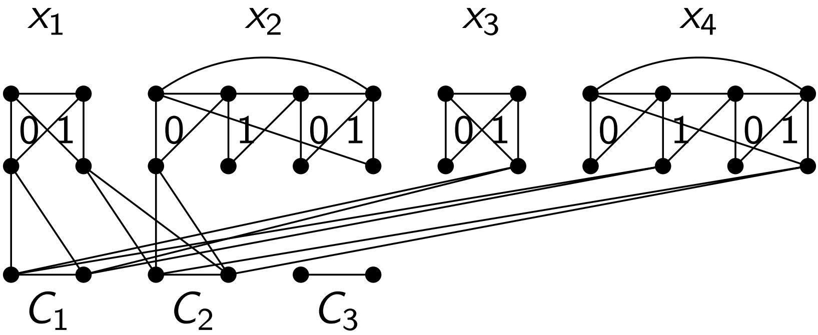
$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



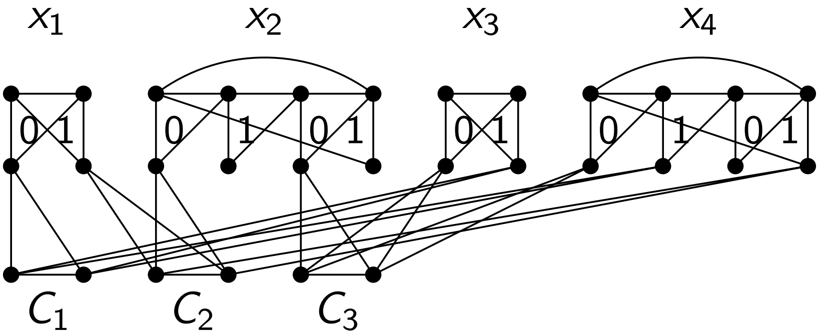
$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



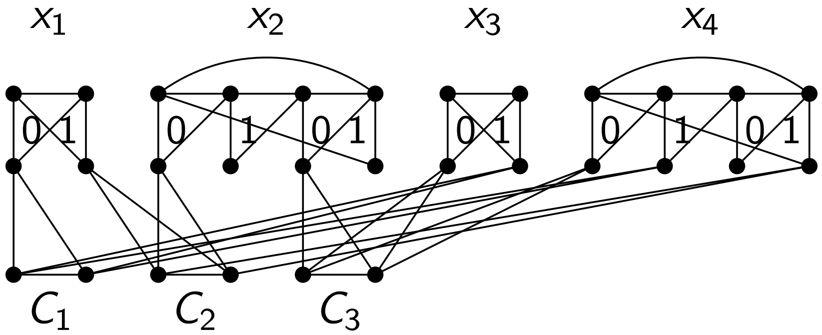
$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



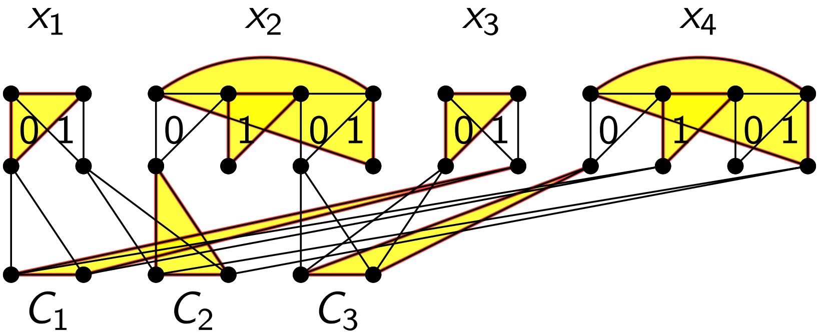
$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$ のとき



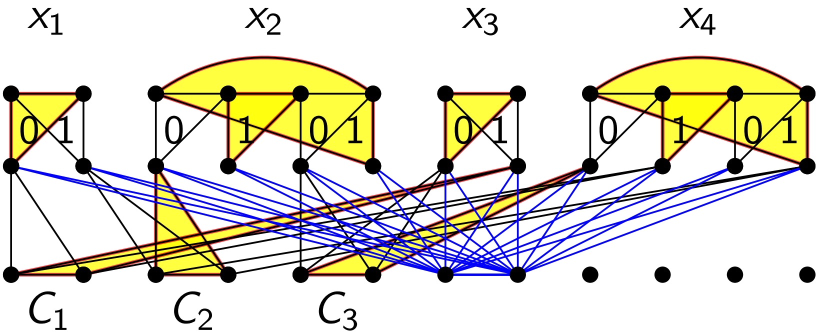
$f = \underbrace{(x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{=C_1} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4})}_{=C_2} \land \underbrace{(x_2 \lor x_3 \lor x_4)}_{=C_3}$ のとき



$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$ のとき

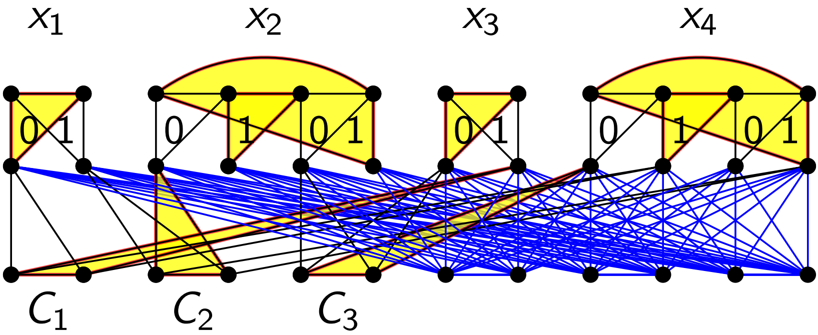


$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$ のとき



辻褄合わせガジェット □

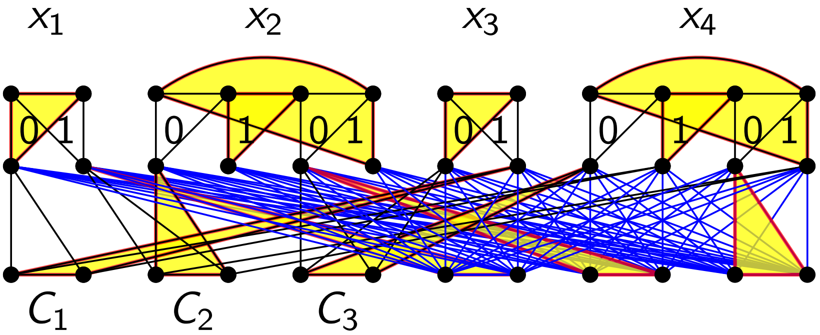
$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



辻褄合わせガジェット

□

$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



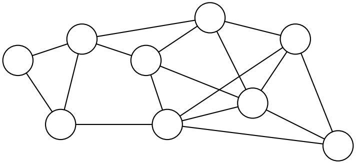
辻褄合わせガジェット □

今の証明を見ると，次の問題が NP 完全であることも分かる

K_3 への頂点分割問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G の頂点集合が K_3 へ分割できる $\Rightarrow$ Yes
  G の頂点集合が K_3 へ分割できない $\Rightarrow$ No

K_3：頂点数 3 の完全グラフ



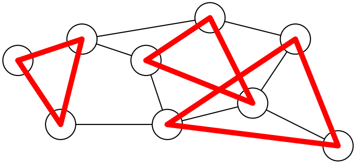
先ほどは「3-SAT が K_3 への頂点分割問題へ多対一多項式時間帰着可能である」ことを証明していた

今の証明を見ると，次の問題が NP 完全であることも分かる

K_3 への頂点分割問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G の頂点集合が K_3 へ分割できる $\Rightarrow$ Yes
  G の頂点集合が K_3 へ分割できない $\Rightarrow$ No

K_3：頂点数 3 の完全グラフ



先ほどは「3-SAT が K_3 への頂点分割問題へ多対一多項式時間帰着可能である」ことを証明していた

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

- 集合に関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 集合被覆問題 (set covering problem)
  - 集合充填問題 (set packing problem)
  - 集合横断問題 (set transversal problem)
  - 集合分割問題 (set partition problem)

次回の予告

- 集合族に関する NP 完全問題を使って，
  グラフに関する問題の NP 完全性を証明する
- 集合族に対する直感

- A. Caprara, R. Rizzi, Packing triangles in bounded degree graphs. Information Processing Letters 84 (2002) pp. 175–180.
- M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman & Co., 1979.
- R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J.D. Bohlinger (eds.), Complexity of Computer Computations. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.