離散最適化基礎論　第 5 回
グラフに関する問題 (2)：経路の選択

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 12 日

最終更新：2019 年 11 月 16 日　10:23

スケジュール 前半 (予定)

⋆	休み (大学院入学式)	(10/1)
1	アルゴリズム的問題解決と計算複雑性	(10/8)
2	速習 P vs NP 問題	(10/15)
⋆	休み (祝日)	(10/22)
3	充足可能性問題とその変種	(10/29)
4	グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択	(11/5)
5	グラフに関する問題 (2)：経路の選択	(11/12)
6	集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連	(11/19)
7	集合族に関する問題 (2)：発展	(11/26)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)
- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)
11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)
- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - ハミルトン閉路問題
- グラフに関する問題について，難しさの直感を養う
  - 頂点問題 vs 辺問題
  - 有向問題 vs 無向問題

目次

自然数 $k \geq 1$

定義：k 連言標準形 (k 乗法標準形，k 和積標準形)

論理式が k 連言標準形 (k-CNF) にあるとは，
それが連言標準形にあり，各節が含むリテラルの数がちょうど k であること

2-CNF の例：$(x \vee \overline{y}) \wedge (y \vee z) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})$

3-CNF の例：$(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee z \vee w) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee w)$

$\boxed{\text{注}}$:「リテラルの数がちょうど k」ではなく「リテラルの数が k 以下」とする流儀もある

自然数 $k \geq 1$

定義：k 充足可能性問題 (k-CNF 充足可能性問題，k-SAT) とは？

- 入力：整数 $n \geq 1$，k-CNF 論理式 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- 出力：Yes または No
- 条件：f が充足割当を持てば，Yes
  そうでなければ，No

$\boxed{\text{注意}}$：k は入力の一部ではない (k の値によって，異なる問題ができる)

定理 (Karp '72)

3-SAT は NP 完全

「問題 P が NP 完全」の証明の流れ

1. P が NP に所属することを証明する
2. ある NP 完全問題 Q が P に多項式時間多対一帰着可能であることを証明する

主要な部分：

- Q の選定
- 多項式時間多対一帰着 (アルゴリズム) の設計

今のところ，NP 完全問題 Q として使える問題：

CNF-SAT → 3-SAT → 独立集合問題 → クリーク問題

3-SAT ↓ 3 彩色問題

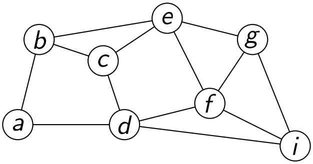
独立集合問題 ↓ 頂点被覆問題

目次

ハミルトン閉路問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がハミルトン閉路を持たない $\Rightarrow$ No

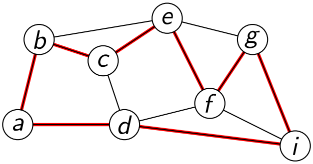
無向グラフ G のハミルトン閉路とは，G のすべての頂点を
ちょうど一度ずつ通る閉路のこと



ハミルトン閉路問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がハミルトン閉路を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G のハミルトン閉路とは，G のすべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路のこと

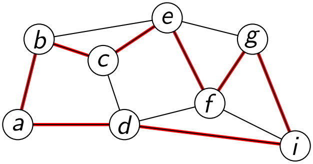


定理 (Karp '72)

ハミルトン閉路問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- ハミルトン閉路問題が NP に所属すること
- 3-SAT がハミルトン閉路問題に多項式時間多対一帰着可能であること



紹介する証明は，Papadimitriou, Steiglitz ('82) を参考にした

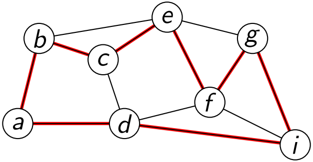
ハミルトン閉路問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がハミルトン閉路を持たない $\Rightarrow$ No

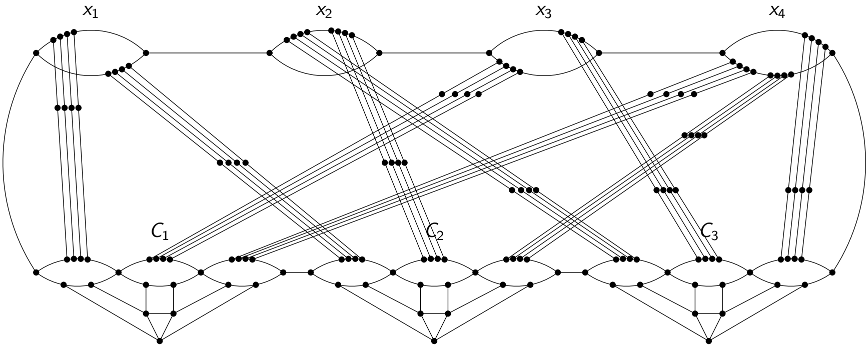
$\boxed{\text{Yes 入力の証拠}}$：G のハミルトン閉路 C

多項式時間検証アルゴリズム

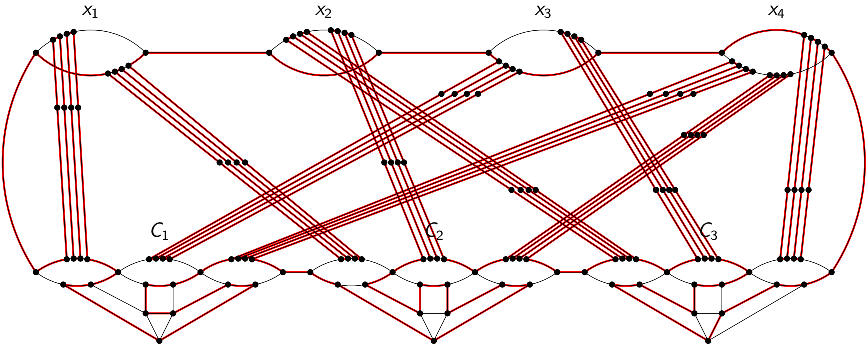
1. C が G のハミルトン閉路であるか，確認
   (つまり，すべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路であるか，確認)



$\boxed{\text{例}}$ ： $n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき

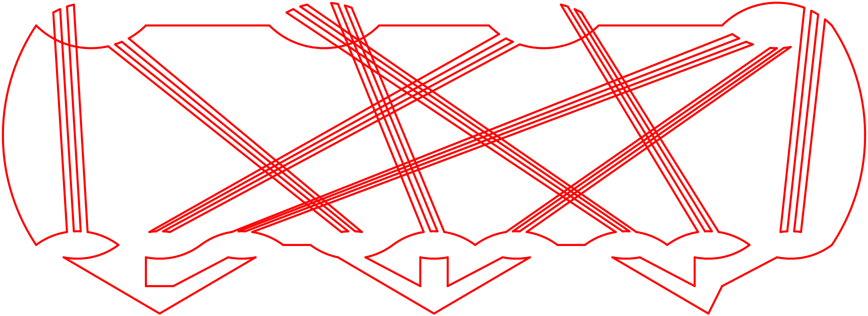


$\boxed{例}$ ：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



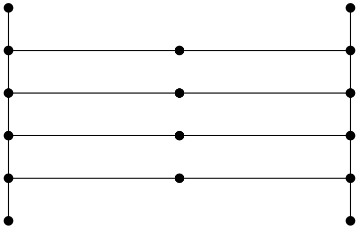
- ハミルトン閉路から得られる充足割当：
  $x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1$

$\boxed{\text{例}}$：$n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



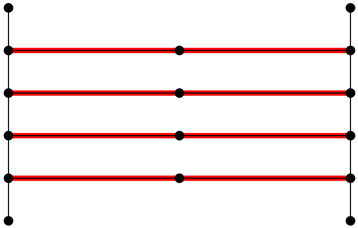
- ハミルトン閉路から得られる充足割当：
  $x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1$

まず，それぞれの部品を見て行く



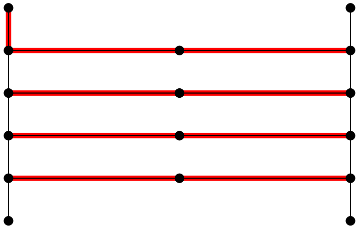
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



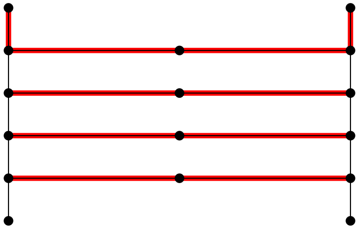
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



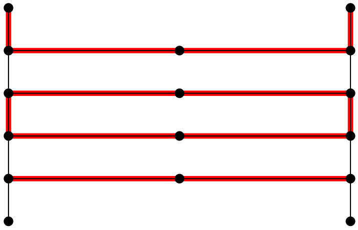
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



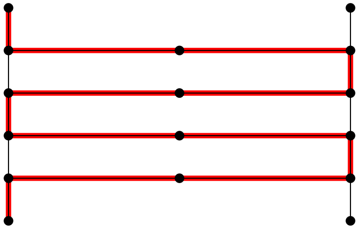
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



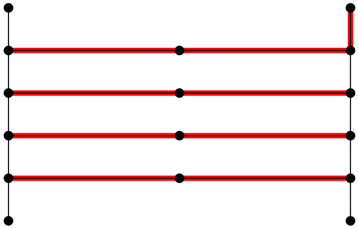
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



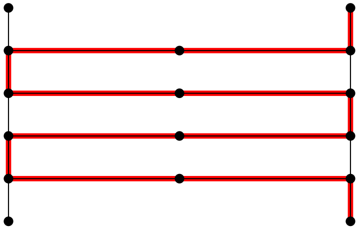
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



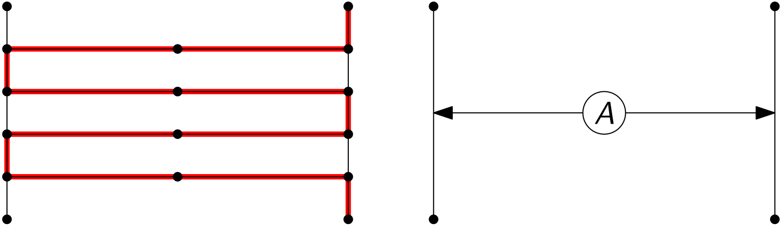
変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

まず，それぞれの部品を見て行く



変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

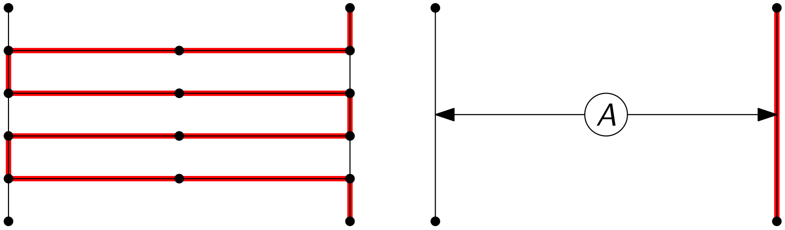
まず，それぞれの部品を見て行く



変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

- A を使って略記することにする

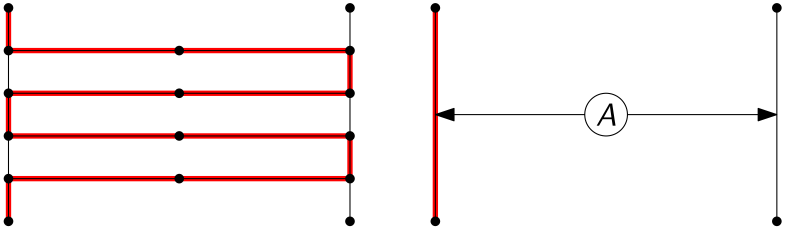
まず，それぞれの部品を見て行く



変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

- A を使って略記することにする
- ハミルトン閉路は
  A の指す 2 辺のどちらか 1 つだけを使わないといけない

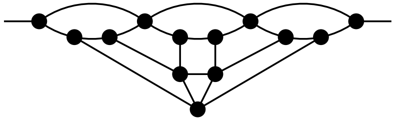
まず，それぞれの部品を見て行く



変数ガジェットと節ガジェットを結ぶ部分 (割当を伝搬するガジェット)

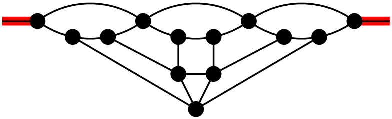
- A を使って略記することにする
- ハミルトン閉路は
  A の指す 2 辺のどちらか 1 つだけを使わないといけない

まず，それぞれの部品を見て行く



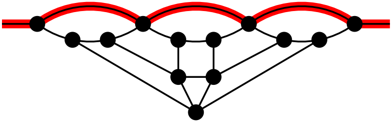
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



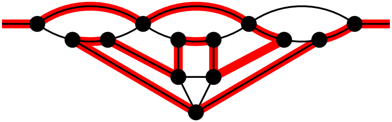
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



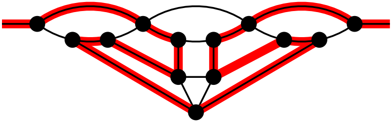
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



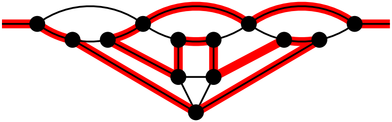
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



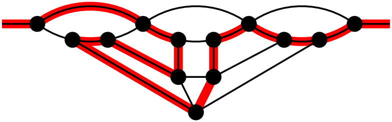
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



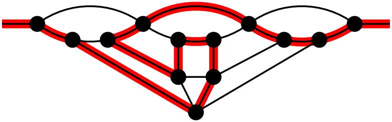
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



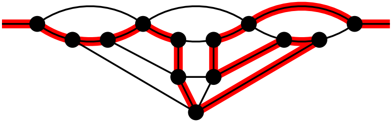
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



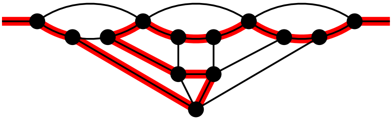
節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く



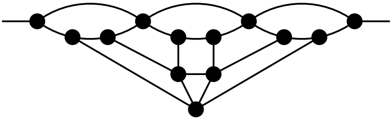
節ガジェット

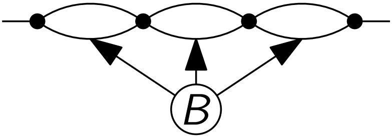
まず，それぞれの部品を見て行く



節ガジェット

まず，それぞれの部品を見て行く

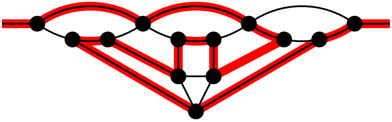


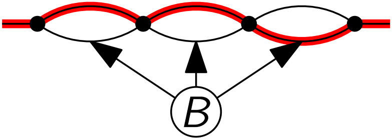


節ガジェット

- B を使って略記することにする

まず，それぞれの部品を見て行く

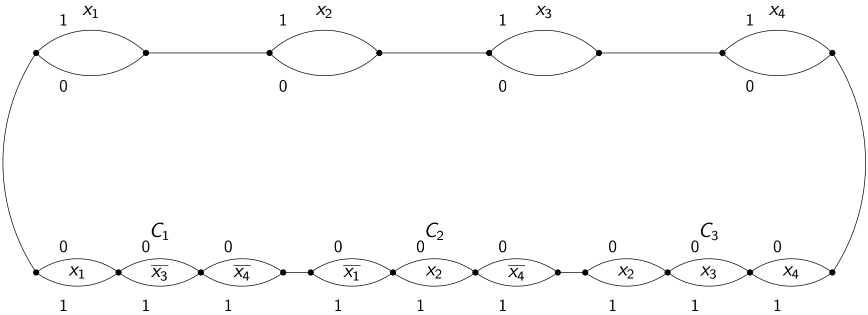




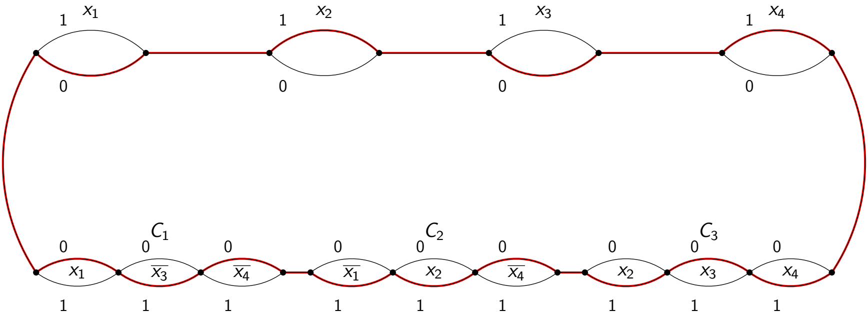
節ガジェット

- B を使って略記することにする
- ハミルトン閉路は
  B の指す 3 辺の少なくとも 1 つを使わないといけない

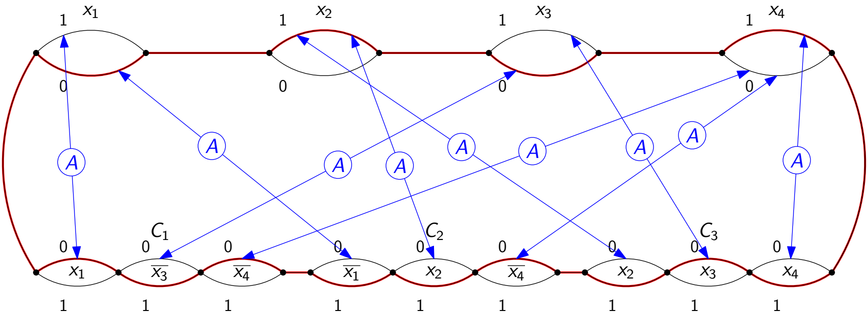
$\boxed{例}$：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$\boxed{\text{例}}$：$n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき

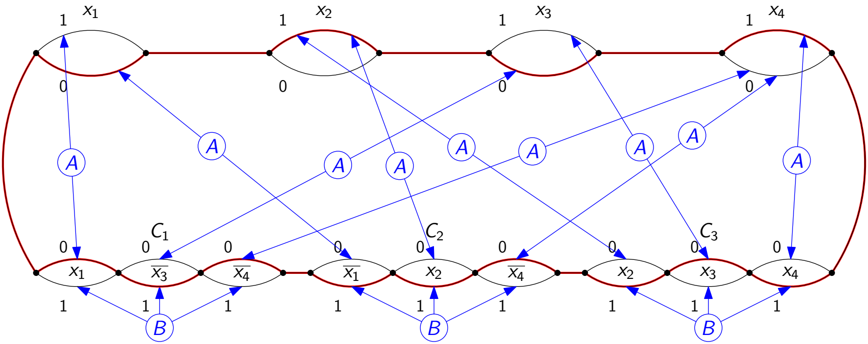


$\boxed{\text{例}}$: $n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



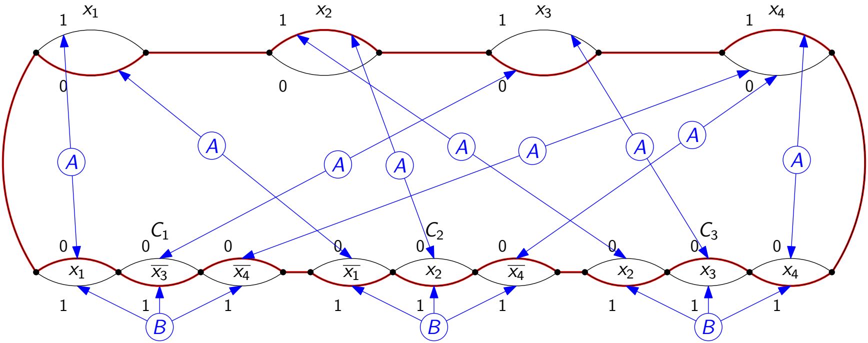
- A : 矢印の指す 2 辺のどちらか 1 つだけを使う

$\boxed{例}$: $n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



- A：矢印の指す 2 辺のどちらか 1 つだけを使う
- B：矢印の指す 3 辺の少なくとも 1 つを使う

$\boxed{\text{例}}$: $n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき

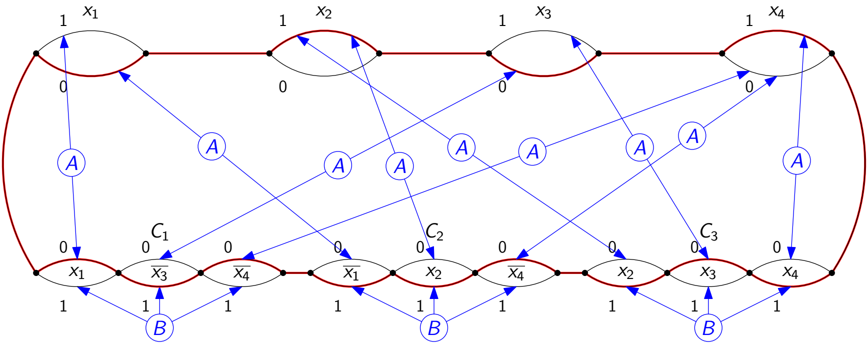


この構成でできたグラフを G とする　　　　　　　　(m は f の節数)

- グラフ G の頂点数 $= 2n + (4 + 9 + 12 \cdot 3)m = 2n + 49m$
- $\therefore$ G の構成は多項式時間でできる

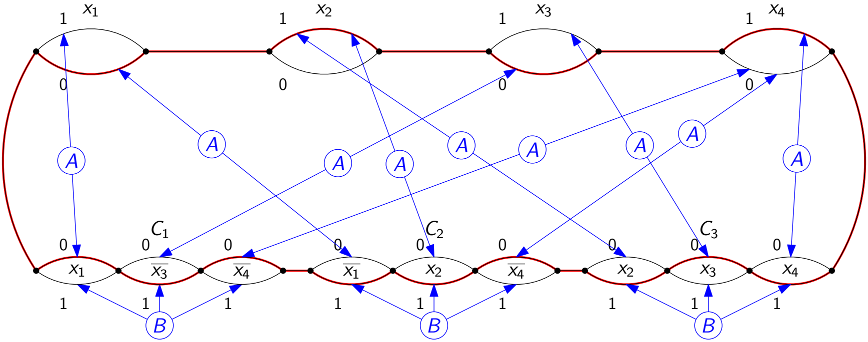
証明したいこと

1. f が充足可能 $\Rightarrow$ G がハミルトン閉路を持つ
2. G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能



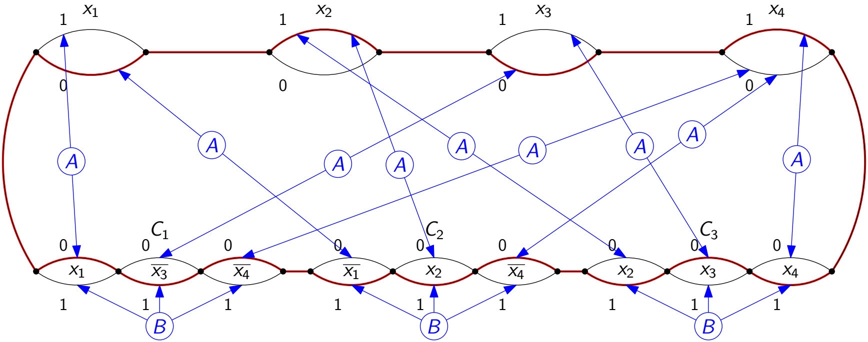
f が充足割当 a を持つとする

- a から G のハミルトン閉路を構成する
- 変数 x_i に対応するガジェット
  - $x_i \mapsto 1$ のとき,「1 の辺」をハミルトン閉路に含める
  - $x_i \mapsto 0$ のとき,「0 の辺」をハミルトン閉路に含める



充足割当 a: $x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 1, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1$

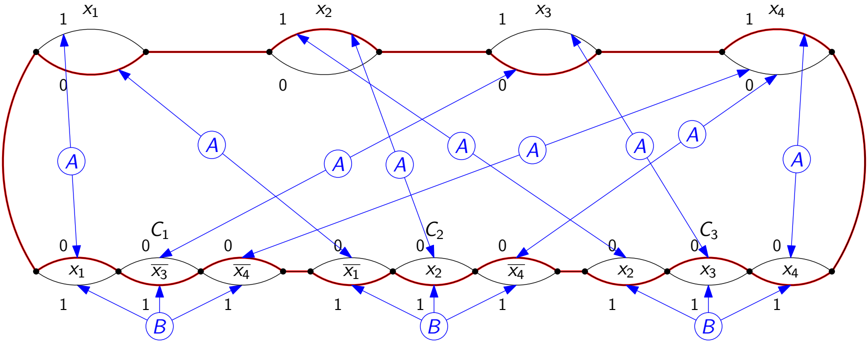
- ガジェット A が，
  節ガジェットのどの辺がハミルトン閉路に含まれるか定める
- a は充足割当なので，ガジェット B の制約はすべて満たされる
- つまり，ハミルトン閉路が確かに存在する　　　　(1 の証明終)



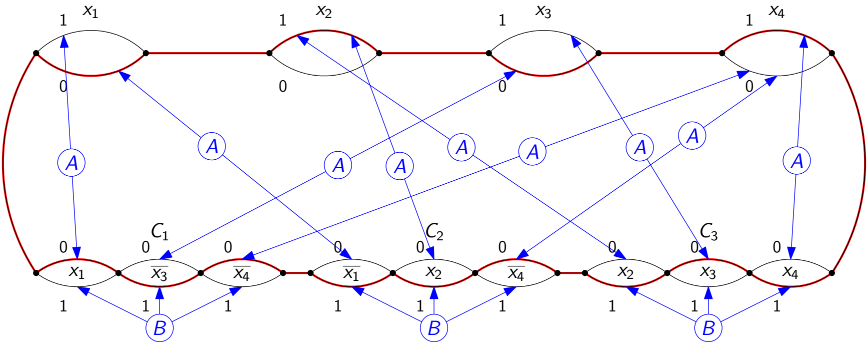
充足割当 a: $x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 1, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1$

G がハミルトン閉路 C を持つとする

- 各変数 x_i のガジェットにおいて，「1 の辺」と「0 の辺」の一方だけ C で使われる
  - 「1 の辺」が使われる $\Rightarrow$ x_i に 1 を割り当てる
  - 「0 の辺」が使われる $\Rightarrow$ x_i に 0 を割り当てる
- ガジェット B から，各節に対応するガジェットにおいて，「1 の辺」が少なくとも 1 つは C で使われる



- ガジェット A から，
  変数ガジェットと節ガジェットから得られる割当は整合している
- $\therefore$ 得られた割当は充足割当 □



定理 (Karp '72)

ハミルトン閉路問題は NP 完全

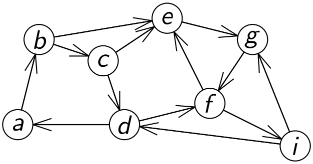
これを使うと，次が分かる

- 有向グラフのハミルトン閉路問題は NP 完全
- 巡回セールスマン問題 (の判定問題版) は NP 完全

有向グラフのハミルトン閉路問題

- 入力：有向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がハミルトン閉路を持たない $\Rightarrow$ No

有向グラフ G のハミルトン閉路とは，G のすべての頂点をちょうど一度ずつ通る有向閉路のこと

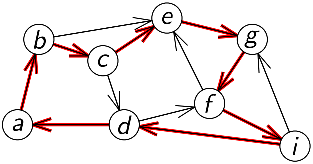


$\boxed{\text{注}}$：有向グラフも隣接行列や隣接リストで表現できる

有向グラフのハミルトン閉路問題

- 入力：有向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がハミルトン閉路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がハミルトン閉路を持たない $\Rightarrow$ No

有向グラフ G のハミルトン閉路とは，G のすべての頂点をちょうど一度ずつ通る有向閉路のこと



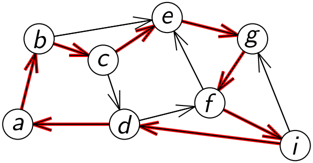
$\boxed{注}$：有向グラフも隣接行列や隣接リストで表現できる

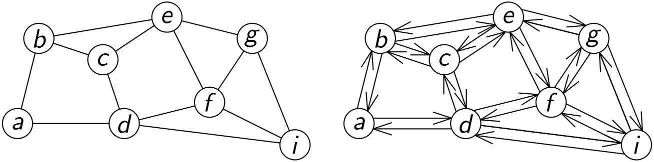
定理 (Karp '72)

有向グラフのハミルトン閉路問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 有向グラフのハミルトン閉路問題が NP に所属すること
  (これは ハミルトン閉路問題 の場合と同様に証明できる)
- ハミルトン閉路問題が有向グラフのハミルトン閉路問題に
  多項式時間多対一帰着可能であること

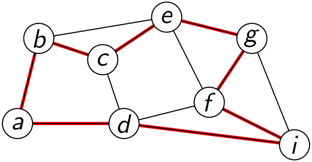


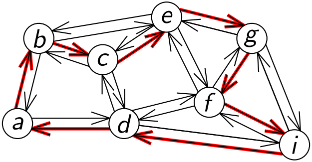


- 無向グラフの各辺 $\{u, v\}$ を
  2 つの弧 (u, v) と (v, u) に置き換えたグラフを構成する
- このとき，グラフの頂点数が 2 でないならば，

無向グラフが ハミルトン閉路 を持つ	$\Leftrightarrow$	有向グラフが ハミルトン閉路 を持つ

□





- 無向グラフの各辺 $\{u, v\}$ を 2 つの弧 (u, v) と (v, u) に置き換えたグラフを構成する
- このとき，グラフの頂点数が 2 でないならば，

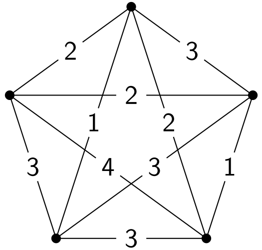
無向グラフが ハミルトン閉路 を持つ $\Leftrightarrow$ 有向グラフが ハミルトン閉路 を持つ

□

巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，非負整数の辺重み $w\colon E \to \mathbb{Z}_+$
- 出力：K_n のハミルトン閉路
- 評価：辺重み和の最小化

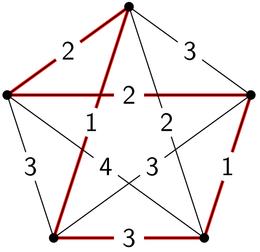
完全グラフ：すべての 2 頂点間に辺がある無向グラフ



巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

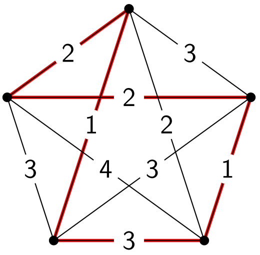
- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，非負整数の辺重み $w\colon E \to \mathbb{Z}_+$
- 出力：K_n のハミルトン閉路
- 評価：辺重み和の最小化

完全グラフ：すべての 2 頂点間に辺がある無向グラフ



巡回セールスマン問題 (判定問題版)

- 入力：完全グラフ $K_n = (V, E)$，非負整数の辺重み $w \colon E \to \mathbb{Z}_+$
  非負整数 k
- 出力：Yes か No
- 条件：辺重み和 k 以下のハミルトン閉路がある $\Rightarrow$ Yes
  辺重み和 k 以下のハミルトン閉路がない $\Rightarrow$ No

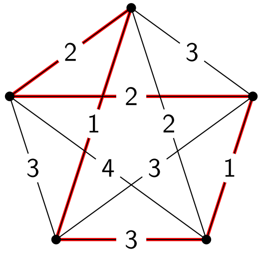


定理 (Karp '72)

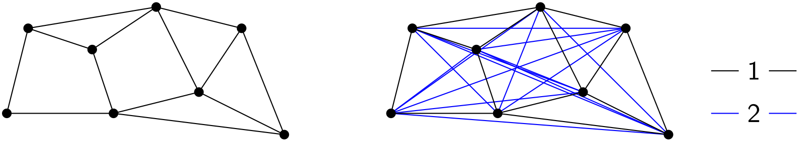
巡回セールスマン問題 (判定問題版) は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 巡回セールスマン問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは ハミルトン閉路問題 の場合と同様に証明できる)
- ハミルトン閉路問題が巡回セールスマン問題 (判定問題版) に多項式時間多対一帰着可能であること



ハミルトン閉路問題の入力として，無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられる



- 巡回セールスマン問題の入力を構成するために，辺重みを次で定義

$$w(\{u, v\}) = \begin{cases} 1 & (\{u, v\} \in E \text{ のとき}) \\ 2 & (\{u, v\} \notin E \text{ のとき}) \end{cases}$$

- このとき

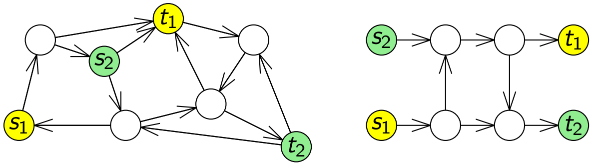
G がハミルトン閉路を持つ $\Leftrightarrow$ 構成した巡回セールスマン問題の入力が辺重み和 $|V|$ のハミルトン閉路を持つ

□

目次

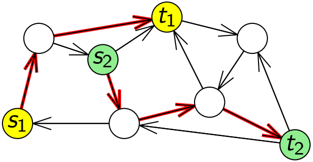
有向グラフの点素パス問題

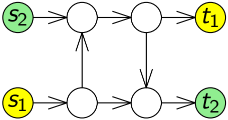
- 入力：有向グラフ $G = (V, E)$，4 頂点 $s_1, t_1, s_2, t_2 \in V$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が次の性質を持つ有向道 P_1 と P_2 を持つならば Yes
  そうでなければ No
  - P_i は s_i から t_i に至る有向道 $(i = 1, 2)$
  - P_1 と P_2 は頂点を共有しない



有向グラフの点素パス問題

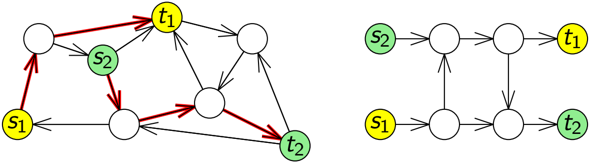
- 入力：有向グラフ $G = (V, E)$，4 頂点 $s_1, t_1, s_2, t_2 \in V$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が次の性質を持つ有向道 P_1 と P_2 を持つならば Yes
  そうでなければ No
  - P_i は s_i から t_i に至る有向道 $(i = 1, 2)$
  - P_1 と P_2 は頂点を共有しない





定理 (Fortune, Hopcroft, Wyllie '80)

有向グラフの点素パス問題は NP 完全



これを証明するためには，次を証明すればよい

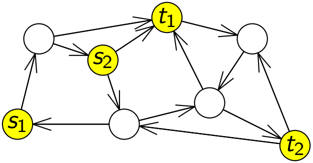
- 有向グラフの点素パス問題が NP に所属すること
- 3-SAT が有向グラフの点素パス問題に多項式時間多対一帰着可能であること

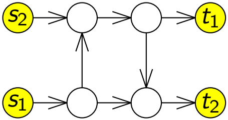
この講義では，証明省略

次の問題は多項式時間で解ける

有向グラフの局所 2 連結性問題

- 入力：有向グラフ $G=(V,E)$，4 頂点 $s_1,t_1,s_2,t_2 \in V$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が次の性質を持つ有向道 P_1 と P_2 を持つならば Yes
  そうでなければ No
  - P_i は s_i から t_i に至る有向道 $(i=1,2)$ であるか，
    P_i は s_i から t_{1-i} に至る有向道 $(i=1,2)$
  - P_1 と P_2 は頂点を共有しない

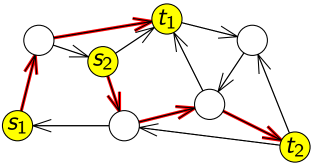


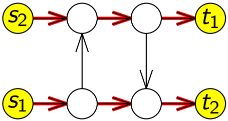


次の問題は多項式時間で解ける

有向グラフの局所 2 連結性問題

- 入力：有向グラフ $G = (V, E)$，4 頂点 $s_1, t_1, s_2, t_2 \in V$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が次の性質を持つ有向道 P_1 と P_2 を持つならば Yes
  そうでなければ No
  - P_i は s_i から t_i に至る有向道 $(i = 1, 2)$ であるか，
    P_i は s_i から t_{1-i} に至る有向道 $(i = 1, 2)$
  - P_1 と P_2 は頂点を共有しない





目次

直感 1

「頂点に対する問題」は「辺に対する問題」と同じ程度以上に難しい

難しさを不等号で表すと

$$\text{頂点に対する問題} \geq \text{辺に対する問題}$$

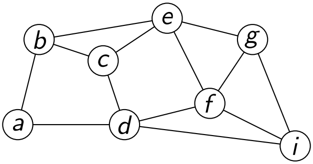
例：

頂点に対する問題	辺に対する問題
独立集合問題 (NP 完全)	マッチング問題 (多項式時間で解ける)
ハミルトン閉路問題 (NP 完全)	オイラー回路問題 (多項式時間で解ける)
3 彩色問題 (NP 完全)	3 辺彩色問題 (NP 完全)

マッチング問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のマッチングを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のマッチングを持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の**マッチング**とは，G の辺部分集合 S で
S のどの 2 辺も端点を共有しないもの

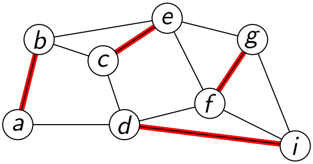


多項式時間で解ける (Edmonds '65)

マッチング問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のマッチングを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のマッチングを持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G のマッチングとは，G の辺部分集合 S で
S のどの 2 辺も端点を共有しないもの

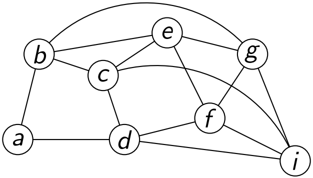


多項式時間で解ける (Edmonds '65)

オイラー回路問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がオイラー回路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がオイラー回路を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の**オイラー回路**とは，G のすべての辺をちょうど一度ずつ辿る経路のこと

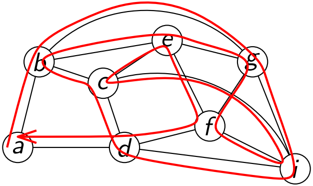


多項式時間で解ける (Hierholzer 1873, Fleury 1883)

オイラー回路問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G がオイラー回路を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G がオイラー回路を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G のオイラー回路とは，G のすべての辺を
ちょうど一度ずつ辿る経路のこと

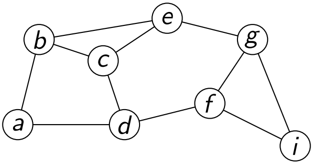


多項式時間で解ける (Hierholzer 1873, Fleury 1883)

3 辺彩色問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 辺彩色を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が 3 辺彩色を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の 3 辺彩色とは，辺を 3 色で塗る方法で，
どの頂点も同じ色の辺の端点にならないもの

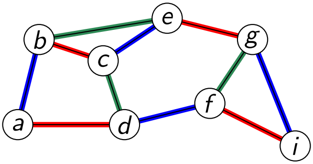


NP 完全 (Holyer '81)

3 辺彩色問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 辺彩色を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が 3 辺彩色を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の 3 辺彩色とは，辺を 3 色で塗る方法で，
どの頂点も同じ色の辺の端点にならないもの



NP 完全 (Holyer '81)

直感 2

「有向グラフに対する問題」は「無向グラフに対する問題」と同じ程度以上に難しい

難しさを不等号で表すと

$$\text{有向グラフに対する問題} \geq \text{無向グラフに対する問題}$$

例：

有向グラフに対する問題	無向グラフに対する問題
有向グラフに対する ハミルトン閉路問題 (NP 完全)	無向グラフに対する ハミルトン閉路問題 (NP 完全)
有向グラフの点素パス問題 (NP 完全)	無向グラフの点素パス問題 (多項式時間で解ける) (Robertson, Seymour '95)

目次

1. 前回までの復習
2. ハミルトン閉路問題
3. 点素パス問題
4. グラフに対する問題の困難性：直感
5. 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - ハミルトン閉路問題
- グラフに関する問題について，難しさの直感を養う
  - 頂点問題 vs 辺問題
  - 有向問題 vs 無向問題

次回の予告

集合に関する問題について，NP 完全性の証明を行う

- 集合被覆問題，集合充填問題 など

- J. Edmonds, Path, trees, and flowers. Canadian Journal of Mathematics 17 (1965) 449–467.
- S. Fortune, J. Hopcroft, J. Willie, The directed subgraph homeomorphism problem. Theoretical Computer Science 10 (1980) pp. 111–121.
- I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, SIAM Journal on Computing 10 (1981) 718–720.
- R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J.D. Bohlinger (eds.), Complexity of Computer Computations. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.
- C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- N. Robertson, P. D. Seymour, Graph minors XIII. The disjoint paths problem. Journal of Combinatorial Theory Series B 63 (1995) pp. 65–110.