離散最適化基礎論　第 4 回
グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 11 月 5 日

最終更新：2019 年 11 月 24 日　11:39

スケジュール 前半 (予定)

⋆	休み (大学院入学式)	(10/1)
1	アルゴリズム的問題解決と計算複雑性	(10/8)
2	速習 P vs NP 問題	(10/15)
⋆	休み (祝日)	(10/22)
3	充足可能性問題とその変種	(10/29)
4	グラフに関する問題 (1)：部分集合の選択	(11/5)
5	グラフに関する問題 (2)：経路の選択	(11/12)
6	集合族に関する問題 (1)：グラフとの関連	(11/19)
7	集合族に関する問題 (2)：発展	(11/26)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 数値が関わる問題 (1)：2 分割問題 (12/3)
9. 数値が関わる問題 (2)：3 分割問題 (12/10)
10. 平面性が関わる問題 (12/17)

- ⋆ 冬期休業 (12/24, 31)

11. 計算幾何学に関する問題 (1/7)
12. 文字列に関する問題 (1/14)
13. アルゴリズム的問題解決：再考 (1/21)
14. 予備 (1/28)

- ⋆ 休講 (2/4)
- ⋆ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 独立集合問題
  - クリーク問題，頂点被覆問題
  - 3 彩色問題

目次

自然数 $k \geq 1$

定義：k 連言標準形 (k 乗法標準形，k 和積標準形)

論理式が k 連言標準形 (k-CNF) にあるとは，
それが連言標準形にあり，各節が含むリテラルの数がちょうど k であること

2-CNF の例：$(x \vee \overline{y}) \wedge (y \vee z) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})$

3-CNF の例：$(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee z \vee w) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee w)$

$\boxed{\text{注}}$：「リテラルの数がちょうど k」ではなく「リテラルの数が k 以下」とする流儀もある

自然数 $k \geq 1$

定義：k 充足可能性問題 (k-CNF 充足可能性問題，k-SAT) とは？

- 入力：整数 $n \geq 1$，k-CNF 論理式 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- 出力：Yes または No
- 条件：$f(a) = 1$ となる $a \in \{0,1\}^n$ が存在すれば，Yes
  そうでなければ，No

$\boxed{\text{注意}}$：k は入力の一部ではない (k の値によって，異なる問題ができる)

- $k = 1$ のとき $\rightsquigarrow$ 1-SAT
- $k = 2$ のとき $\rightsquigarrow$ 2-SAT
- $k = 3$ のとき $\rightsquigarrow$ 3-SAT
- ……

定理 (Karp '72)

3-SAT は NP 完全

証明の流れ

1. 3-SAT が NP に所属することを証明する (済)
2. CNF-SAT が 3-SAT に多項式時間多対一帰着可能であることを証明する

定理 (Karp '72)

3-SAT は NP 完全

証明の流れ

1. 3-SAT が NP に所属することを証明する (済)
2. CNF-SAT が 3-SAT に多項式時間多対一帰着可能であることを証明する

なぜ，これが NP 完全性の証明になるのか？

- NP に所属するすべての問題は，CNF-SAT に多項式時間多対一帰着可能 (CNF-SAT の NP 完全性と，NP 完全性の定義より)
- CNF-SAT は，3-SAT に多項式時間多対一帰着可能 (上の 2 より)
- 多項式時間多対一帰着可能性は推移性を持つ (前回)
- ∴ NP に所属するすべての問題は，3-SAT に多項式時間多対一帰着可能

CNF-SAT の入力して与えられた
整数 $n \geq 1$ と CNF 論理式 $f \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を考える

行うこと

f から 3-CNF 論理式 f' を構成する

- f の変数は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であるとする
- f の節 C を 1 つずつ見て行き，C のリテラル数で場合分け
- C のリテラルの数が 3 $\Rightarrow$ 何もしない
- C のリテラルの数が 2 $\Rightarrow$
  - C を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ に置き換える (y は新しい変数)
  - $C \vee y$ と $C \vee \overline{y}$ のリテラル数は 3

このとき，C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

(証明は次のページ)

証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

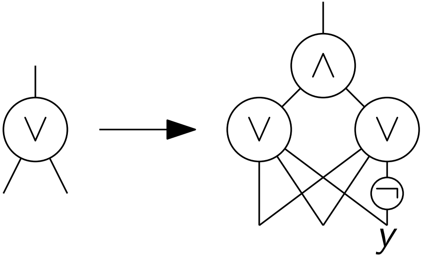
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

□



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

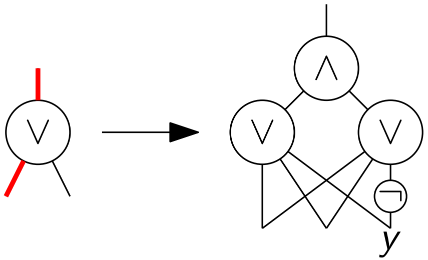
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \lor y) \land (C \lor \overline{y})$ が充足可能

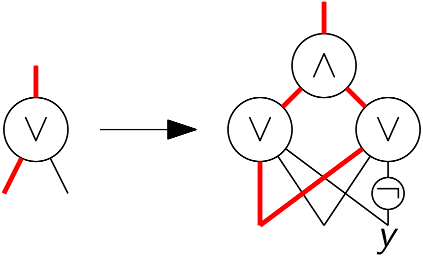
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \lor y$ も $C \lor \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \lor y) \land (C \lor \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \lor \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \lor y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

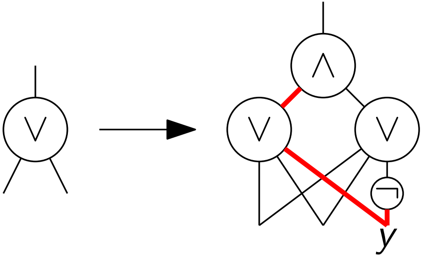
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

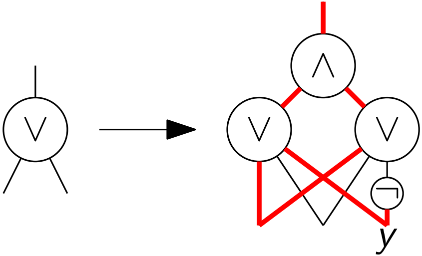
<u>$\Rightarrow$ の証明</u>：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

<u>$\Leftarrow$ の証明</u>：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

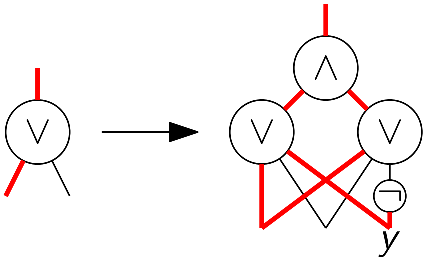
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \lor y) \land (C \lor \overline{y})$ が充足可能

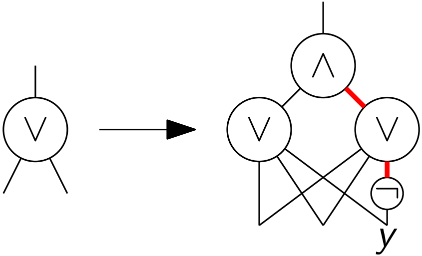
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \lor y$ も $C \lor \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \lor y) \land (C \lor \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \lor \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \lor y$ を充足するので，a' は C も充足する

□



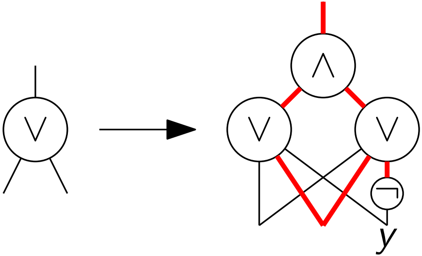
証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする
- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする
- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

□



証明したいこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ が充足可能

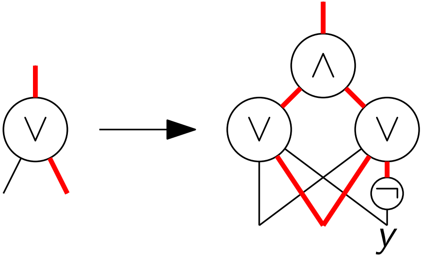
$\Rightarrow$ の証明：a を C の充足割当とする

- このとき，a は $C \vee y$ も $C \vee \overline{y}$ も充足する

$\Leftarrow$ の証明：a' を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ の充足割当とする

- $a' : y \mapsto 1$ のとき：a' が $C \vee \overline{y}$ を充足するので，a' は C も充足する
- $a' : y \mapsto 0$ のとき：a' が $C \vee y$ を充足するので，a' は C も充足する

$\square$



- C のリテラルの数が 1 のとき
  - C を $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ に置き換える (y は新しい変数)
  - $C \vee y$ と $C \vee \overline{y}$ のリテラル数は 2
  - C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C \vee y) \wedge (C \vee \overline{y})$ も充足可能
- C のリテラル数が 4 以上のとき
  - C に含まれるリテラルの 2 つを ℓ, ℓ' とする
  - つまり，ある節 C' を用いて，$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ と書ける

$C = C' \vee \ell \vee \ell'$

- C を以下の CNF 論理式に置き換える　　　(y は新しい論理変数)

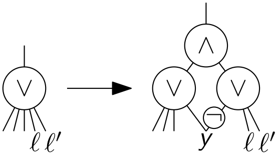
$$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$$

- このとき,「C のリテラル数」 $>$ 「$C' \vee y$ のリテラル数」

この操作を繰り返すと，最終的に，3-CNF 論理式 f' が得られる

証明すべきこと

C が充足可能 $\Leftrightarrow$ $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能

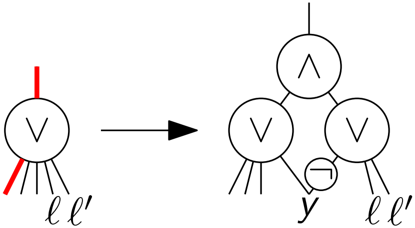


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 □

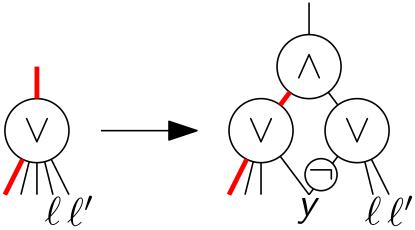


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 □

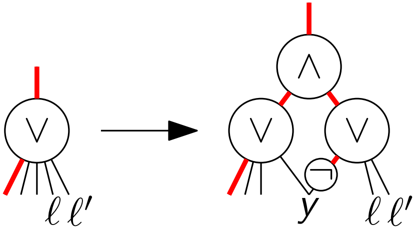


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 $\square$

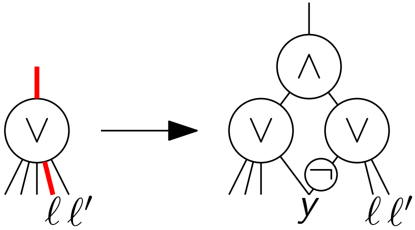


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 □

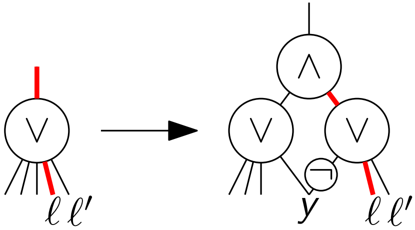


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 □

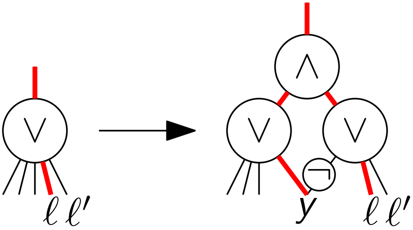


$\boxed{\Rightarrow \text{の証明}}$：$C = C' \vee \ell \vee \ell'$ が充足可能であると仮定する

- C の充足割当 a が存在する

1. a が C' を充足する場合
   - a は $C' \vee y$ も充足する
   - $y \mapsto 0$ とすれば，$\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
2. a が $\ell \vee \ell'$ を充足する場合
   - a は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ も充足する
   - $y \mapsto 1$ とすれば，$C' \vee y$ も充足する

- どちらの場合でも，$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ は充足可能 □

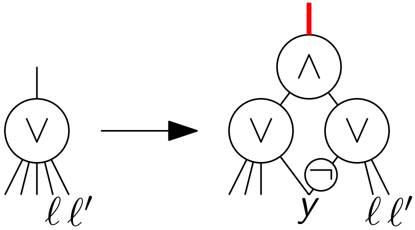


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$: $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \vee y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ を充足するので，$\ell \vee \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \vee \ell \vee \ell'$ も充足する □

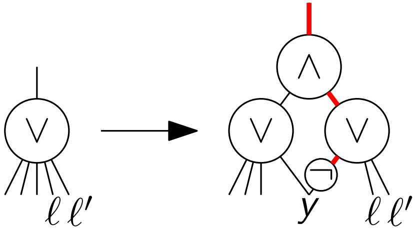


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$：$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \vee y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ を充足するので，$\ell \vee \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \vee \ell \vee \ell'$ も充足する □

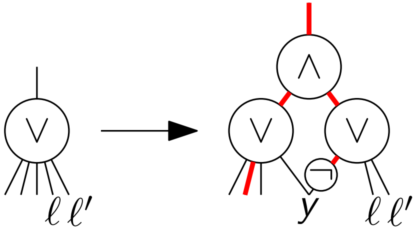


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$：$(C' \lor y) \land (\overline{y} \lor \ell \lor \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \lor y) \land (\overline{y} \lor \ell \lor \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \lor y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \lor \ell \lor \ell'$ を充足するので，$\ell \lor \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \lor \ell \lor \ell'$ も充足する □

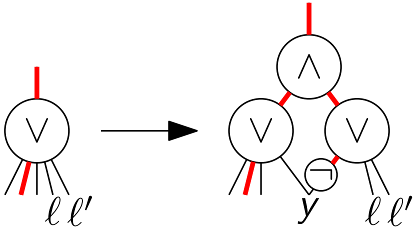


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$：$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
    - a' は $C' \vee y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
    - a' は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ を充足するので，$\ell \vee \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \vee \ell \vee \ell'$ も充足する □

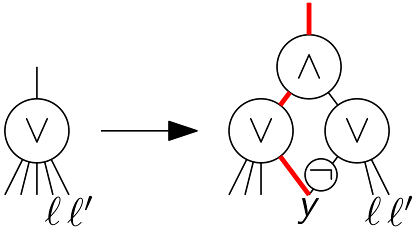


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$：$(C' \lor y) \land (\overline{y} \lor \ell \lor \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \lor y) \land (\overline{y} \lor \ell \lor \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \lor y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \lor \ell \lor \ell'$ を充足するので，$\ell \lor \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \lor \ell \lor \ell'$ も充足する □

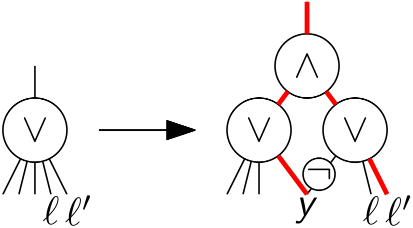


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$：$(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \vee y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ を充足するので，$\ell \vee \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \vee \ell \vee \ell'$ も充足する □

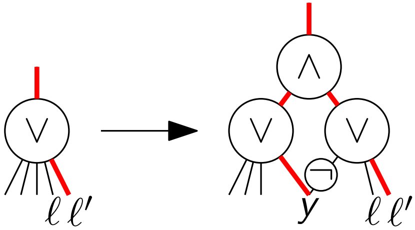


$\boxed{\Leftarrow \text{の証明}}$: $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ が充足可能であると仮定する

- $(C' \vee y) \wedge (\overline{y} \vee \ell \vee \ell')$ の充足割当 a' が存在する

1. $a' : y \mapsto 0$ のとき
   - a' は $C' \vee y$ を充足するので，C' も充足する
2. $a' : y \mapsto 1$ のとき
   - a' は $\overline{y} \vee \ell \vee \ell'$ を充足するので，$\ell \vee \ell'$ も充足する

- どちらの場合でも，a' は $C = C' \vee \ell \vee \ell'$ も充足する □



3-SAT は NP 完全：証明全体の構造

- 3-SAT が NP に所属することの証明
- CNF-SAT を 3-SAT に多項式時間多対一帰着可能であることの証明
  - CNF-SAT の入力 f から 3-SAT の入力 f' の構成
  - 構成が多項式時間でできることの確認
  - 「f が Yes 入力 $\Rightarrow$ f' が Yes 入力」の証明
  - 「f' が Yes 入力 $\Rightarrow$ f が Yes 入力」の証明

この証明構造は，他の NP 完全性証明でも見られる (ことになる)

重要な事実 (Cook '71, Levin '73)

NP 完全問題は存在する (CNF 充足可能性問題は NP 完全)

- 疑問：NP 完全問題は稀にしか存在しないのか？
- 回答：NP 完全問題は数多に存在！ 重要な多くの問題も NP 完全！

リチャード・カープ
(1935–)

https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_M._Karp

Karp ('72) の論文

- 組合せ最適化に関わる重要な問題が NP 完全であることを証明した
- 証明のために多項式時間多対一帰着を用いるという技法を導入した

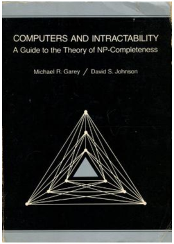
Michael Garey と David Johnson

マイケル・ギャリー
(1945–)

デヴィッド・ジョンソン
(1945–2016)

http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-bins2

NP 完全性の重要性を広く知らしめた

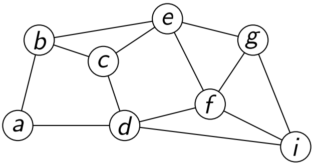


Most Cited Computer Science Citations 第 1 位
(2015 年 3 月 19 日までの集計) https://citeseerx.ist.psu.edu/stats/citations

1. Garey, Johnson, "Computers and Intractability" (1979)
2. Sambrook, et al., "Molecular Cloning, Vol. 1, 2nd edn" (1989)
3. Vapnik, "Statistical Learning Theory" (1998)
4. Cover, Thomas, "Elements of Information Theory" (1991)

目次

通常の方法は，次のどちらか



隣接行列 (adjacency matrix)

	a	b	c	d	e	f	g	i
a	0	1	0	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	1	0	0	0
d	1	0	1	0	0	1	0	1
e	0	1	1	0	0	1	1	0
f	0	0	0	1	1	0	1	1
g	0	0	0	0	1	1	0	1
i	0	0	0	1	0	1	1	0

隣接リスト (adjacency list)

a	b, d
b	a, c, e
c	b, d, e
d	a, c, f, i
e	b, c, f, g
f	d, e, g, i
g	e, f, i
i	d, f, g

隣接行列 (adjacency matrix)

	a	b	c	d	e	f	g	i
a	0	1	0	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	1	0	0	0
d	1	0	1	0	0	1	0	0
e	0	1	1	0	0	1	1	0
f	0	0	0	1	1	0	1	1
g	0	0	0	0	1	1	0	1
i	0	0	0	1	0	1	1	0

隣接リスト (adjacency list)

a	b, d
b	a, c, e
c	b, d, e
d	a, c, f, i
e	b, c, f, g
f	d, e, g, i
g	e, f, i
i	d, f, g

サイズ ($n =$ 頂点数，$m =$ 辺数 として)

- 隣接行列：$O(n^2)$ ビット
- 隣接リスト：$O(n + m \log n)$ ビット

→ どちらにしても，入力サイズは n, m の多項式
どちらを入力しても，多項式時間で解けるかどうか，は変わらない

ここからの目標

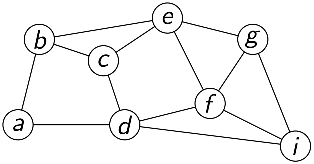
次の 3 つの問題が NP 完全であることを証明する

- 独立集合問題
- クリーク問題
- 頂点被覆問題

独立集合問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

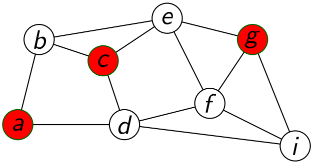
無向グラフ G の独立集合とは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの



独立集合問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の独立集合とは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの

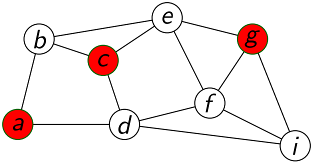


定理 (Karp '72)

独立集合問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 独立集合問題が NP に所属すること
- 3-SAT が独立集合問題に多項式時間多対一帰着可能であること



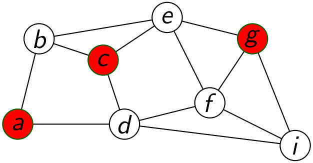
独立集合問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上の独立集合を持たない $\Rightarrow$ No

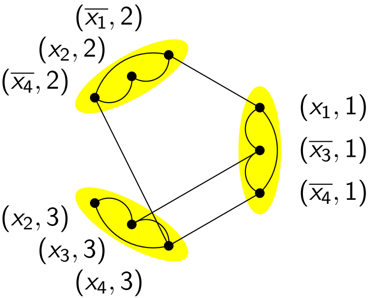
Yes 入力の証拠：要素数 k 以上の独立集合 S

多項式時間検証アルゴリズム

1. S の要素数が k 以上であるか，確認
2. S のどの 2 要素も辺で結ばれていないか，確認

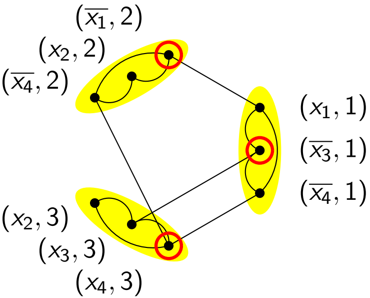


$\boxed{\text{例}}$：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$k =$ 節の数 $= 3$

$\boxed{\text{例}}$: $n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$k =$ 節の数 $= 3$

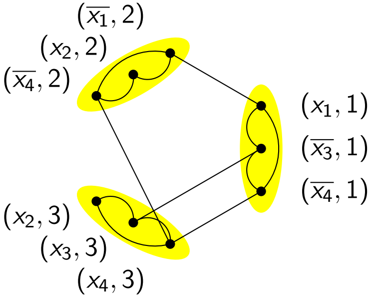
- 要素数 3 の独立集合 $= \{(\overline{x_3}, 1), (\overline{x_1}, 2), (x_4, 3)\}$
- $\rightsquigarrow$ 充足割当：$x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto *, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1$ が得られる

3CNF 論理式 f の節が $C_1, C_2, \ldots, C_m$ であるとする

G の頂点

- 各節 C_i とそれに含まれる各リテラル ℓ に対して，頂点 (ℓ, i) を用意する

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

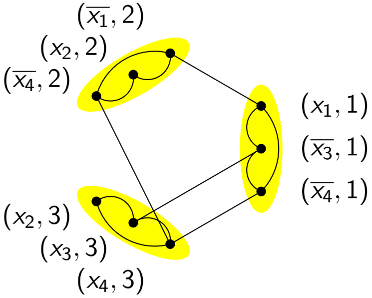


3CNF 論理式 f の節が $C_1, C_2, \ldots, C_m$ であるとする

G の辺

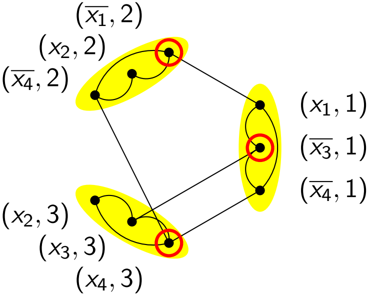
- 各節 C_i に含まれるリテラル ℓ, ℓ' に対して，
  頂点 (ℓ, i) と頂点 (ℓ', i) を辺で結ぶ
- リテラル ℓ が節 C_i に含まれ，その否定 $\overline{\ell}$ が節 $C_{i'}$ に含まれるとき，
  頂点 (ℓ, i) と頂点 $(\overline{\ell}, i')$ を辺で結ぶ

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4}) \land \\
& (\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4}) \land \\
& (x_2 \lor x_3 \lor x_4)
\end{aligned}
$$



- これで無向グラフ G の構成は終了
- k を $m =$ 節の数 とする
  つまり，G に頂点数 m 以上の独立集合があるか，問う

$$
\begin{aligned}
f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) &\wedge \\
(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) &\wedge \\
(x_2 \vee x_3 \vee x_4)&
\end{aligned}
$$



証明すればよいこと

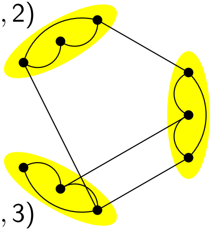
- f が充足可能 $\Rightarrow$ G が要素数 m 以上の独立集合を持つ
- G が要素数 m 以上の独立集合を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能

f が充足割当 a を持つとする (つまり，f の各節 C_i を a は充足する)

- a が充足する C_i のリテラルを 1 つ持って来て，ℓ とする
- このとき，頂点 (ℓ, i) を集合 S に含める

$$
\begin{aligned}
f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge \\
(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge \\
(x_2 \vee x_3 \vee x_4)
\end{aligned}
$$

充足割当： $x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1$ $x_3 \mapsto 0,\ x_4 \mapsto 1$



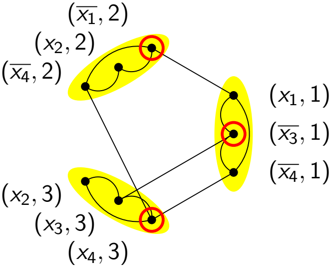
このようにして作った集合 S について，次を証明する

1. S の要素数が m 以上
2. S が独立集合

1. S の要素数が m 以上
   - S は，各節 C_i に由来する頂点を 1 つ含んでいる
   - $\therefore$ S の要素数 $=$ f の節数 $= m$
2. S が独立集合
   - S は各節に由来する頂点を 1 つしか含まない
   - S の 2 頂点を結ぶ辺があるならば，その 2 頂点は
     あるリテラル ℓ と添え字 i, i' に対して (ℓ, i) と $(\bar{\ell}, i')$ と書ける
   - しかし，ℓ と $\bar{\ell}$ が同時に 1 となることはないので，
     この 2 頂点がともに S に含まれることはない

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

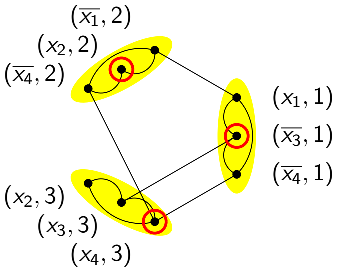
充足割当： $x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1$
$x_3 \mapsto 0,\ x_4 \mapsto 1$



1. S の要素数が m 以上
   - S は，各節 C_i に由来する頂点を 1 つ含んでいる
   - $\therefore$ S の要素数 $=$ f の節数 $=$ m
2. S が独立集合
   - S は各節に由来する頂点を 1 つしか含まない
   - S の 2 頂点を結ぶ辺があるならば，その 2 頂点は あるリテラル ℓ と添え字 i, i' に対して (ℓ, i) と $(\bar{\ell}, i')$ と書ける
   - しかし，ℓ と $\bar{\ell}$ が同時に 1 となることはないので，この 2 頂点がともに S に含まれることはない

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

充足割当： $x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1$
$x_3 \mapsto 0,\ x_4 \mapsto 1$



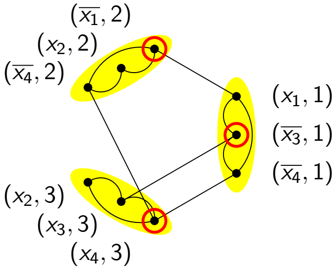
S が G の要素数 m 以上の独立集合であるとする

- 仮定から，S は各節に対応する頂点をちょうど 1 つ含む
- 各変数 x に対する割当を次のように定める

$$\begin{array}{lcl} \text{ある } i \text{ に対して，} (x,i) \in S & \Rightarrow & x \mapsto 1 \\ \text{ある } i \text{ に対して，} (\overline{x},i) \in S & \Rightarrow & x \mapsto 0 \\ \text{どの } i \text{ に対しても，} (x,i),(\overline{x},i) \notin S & \Rightarrow & x \mapsto 1 \ (\mapsto 0 \text{ でもよい}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f = {} & (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge \\ & (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge \\ & (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \end{aligned}$$

割当： $x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1\ (0)$
$x_3 \mapsto 0,\ x_4 \mapsto 1$

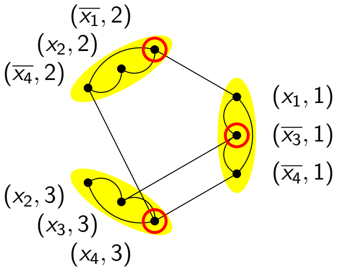


証明すべきこと

1. この定め方で，割当が矛盾なく定義できていること
   - ある変数 x と添え字 i, j に対して，$(x, i), (\overline{x}, j) \in S$ であると x に対する割当を定義できない
   - しかし，$(x, i), (\overline{x}, j)$ は辺で結ばれているので，$(x, i), (\overline{x}, j) \in S$ であると，S が独立集合であることに矛盾

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge \\
& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3 \vee x_4)
\end{aligned}
$$

割当： $x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1\ (0)$
$x_3 \mapsto 0,\ x_4 \mapsto 1$

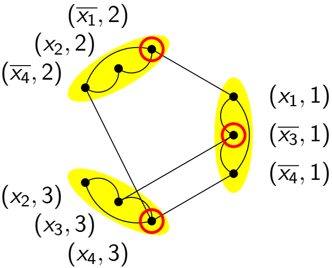


証明すべきこと

2. この割当が f の充足割当であること
   - S の要素数が m 以上なので，
     各節 C_i に対して，あるリテラル ℓ が存在して，$(\ell, i) \in S$
   - この割当は $\ell \mapsto 1$ とするので，C_i は充足される
   - $\therefore f = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ は充足される $\square$

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge \\
& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3 \vee x_4)
\end{aligned}
$$

割当： $x_1 \mapsto 0$, $x_2 \mapsto 1$ (0)
$x_3 \mapsto 0$, $x_4 \mapsto 1$

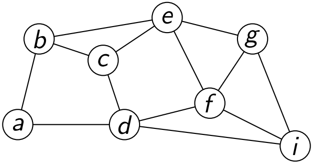


目次

クリーク問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のクリークを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のクリークを持たない $\Rightarrow$ No

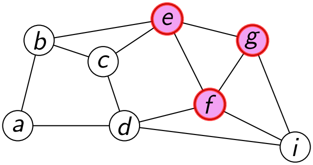
無向グラフ G の**クリーク**とは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在するもの



クリーク問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のクリークを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のクリークを持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G のクリークとは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在するもの

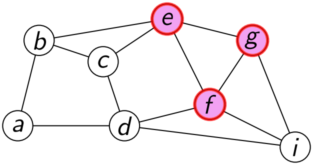


定理 (Karp '72)

クリーク問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- クリーク問題が NP に所属すること
- 独立集合問題がクリーク問題に多項式時間多対一帰着可能であること



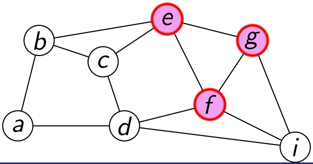
クリーク問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のクリークを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のクリークを持たない $\Rightarrow$ No

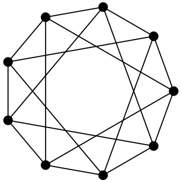
$\boxed{\text{Yes 入力の証拠}}$：要素数 k 以上のクリーク S

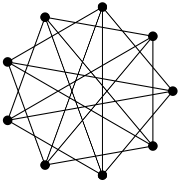
多項式時間検証アルゴリズム

1. S の要素数が k 以上であるか，確認
2. S のどの 2 要素も辺で結ばれているか，確認



$\boxed{\text{例}}$：

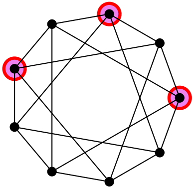


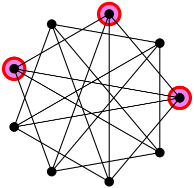


S が独立集合 $\Leftrightarrow$
S のどの 2 頂点も
辺で結ばれない

S がクリーク $\Leftrightarrow$
S のどの 2 頂点も
辺で結ばれる

$\boxed{\text{例}}$:





S が独立集合 $\Leftrightarrow$
S のどの 2 頂点も
辺で結ばれない

S がクリーク $\Leftrightarrow$
S のどの 2 頂点も
辺で結ばれる

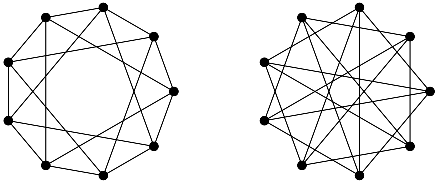
独立集合問題の入力 G, k から，クリーク問題の入力 G', k' を構成する

- G' の頂点集合 $=$ G の頂点集合
- G' の辺集合 $=$ G の非辺集合

$$G' \text{ の辺集合} = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \text{ は } G \text{ の辺ではない}\}$$

- $k' = k$

つまり，G' において，要素数 k' 以上のクリークを見つけたい



G', k' の構成は多項式時間でできる

証明すべきこと

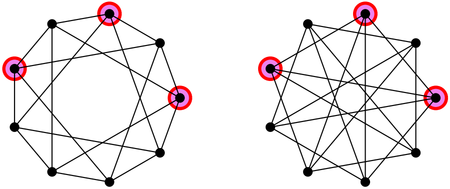
G が要素数 k 以上の独立集合を持つ	$\Leftrightarrow$	G' が要素数 k 以上のクリークを持つ

S が G における独立集合

$\Leftrightarrow$ S のどの 2 頂点も G において辺で結ばれない

$\Leftrightarrow$ S のどの 2 頂点も G' において辺で結ばれる

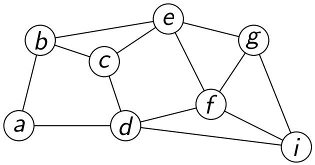
$\Leftrightarrow$ S が G' におけるクリーク $\square$



頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

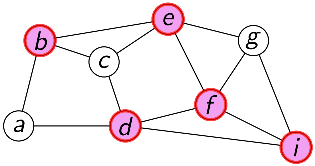
無向グラフ G の頂点被覆とは，G の頂点部分集合 S で
G のどの辺も S に端点を持つもの



頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の頂点被覆とは，G の頂点部分集合 S で
G のどの辺も S に端点を持つもの

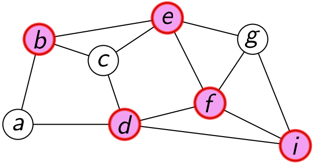


定理 (Karp '72)

頂点被覆問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 頂点被覆問題が NP に所属すること
- 独立集合問題が頂点被覆問題に多項式時間多対一帰着可能であること



頂点被覆問題の NP 完全性：NP に所属すること

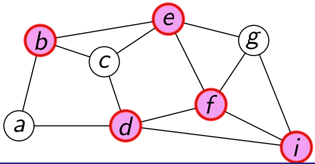
頂点被覆問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以下の頂点被覆を持たない $\Rightarrow$ No

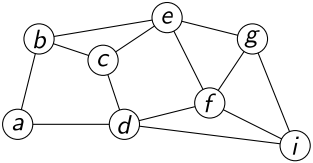
Yes 入力の証拠：要素数 k 以下の頂点被覆 S

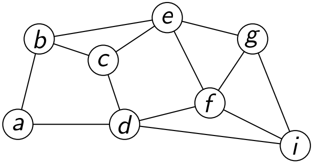
多項式時間検証アルゴリズム

1. S の要素数が k 以下であるか，確認
2. G のどの辺も S に端点を持つか，確認



例 ：

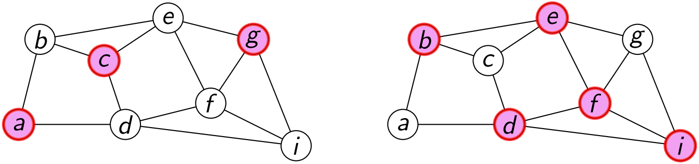




重要な性質 ：無向グラフ $G = (V, E)$ において

$$S \text{ が独立集合} \quad \Leftrightarrow \quad V - S \text{ が頂点被覆}$$

例：



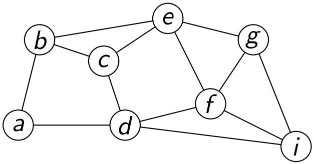
重要な性質：無向グラフ $G = (V, E)$ において

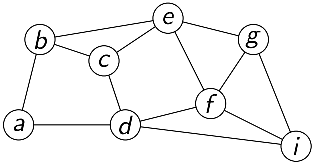
$$S \text{ が独立集合} \quad \Leftrightarrow \quad V - S \text{ が頂点被覆}$$

独立集合問題の入力 G, k から，頂点被覆問題の入力 G', k' を構成する

- $G' = G$
- $k' = n - k$ (ただし，n は G の頂点数)

つまり，G において，要素数 $n - k$ 以下の頂点被覆を見つけたい





G', k' の構成は多項式時間でできる

G の頂点集合 V，その要素数 $= n$

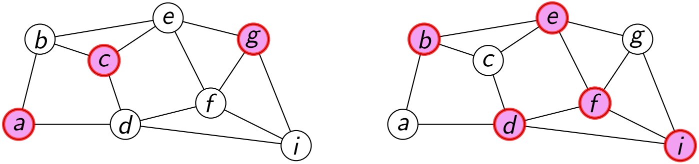
証明すべきこと

G が要素数 k 以上の独立集合を持つ	$\Leftrightarrow$	G が要素数 $n-k$ 以下の頂点被覆を持つ

S が G における独立集合

$\Leftrightarrow$ $V-S$ が G における頂点被覆 (なぜ？)

ここで，S の要素数が k 以上 $\Leftrightarrow$ $V-S$ の要素数が $n-k$ 以下 $\square$

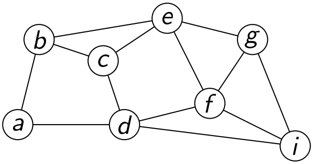


目次

3 彩色問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が 3 彩色を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の 3 彩色とは，頂点を 3 色で塗る方法で，
どの辺の両端点も同じ色にならないもの

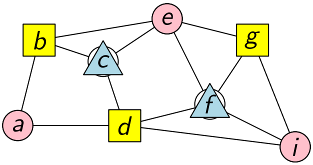


同様に，k 彩色も定義できる

3 彩色問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が 3 彩色を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の 3 彩色とは，頂点を 3 色で塗る方法で，
どの辺の両端点も同じ色にならないもの



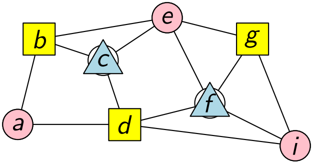
同様に，k 彩色も定義できる

定理 (Garey, Johnson, Stockmeyer '76)

3 彩色問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 3 彩色問題が NP に所属すること
- 3-SAT が 3 彩色問題に多項式時間多対一帰着可能であること



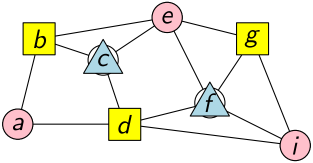
3 彩色問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が 3 彩色を持たない $\Rightarrow$ No

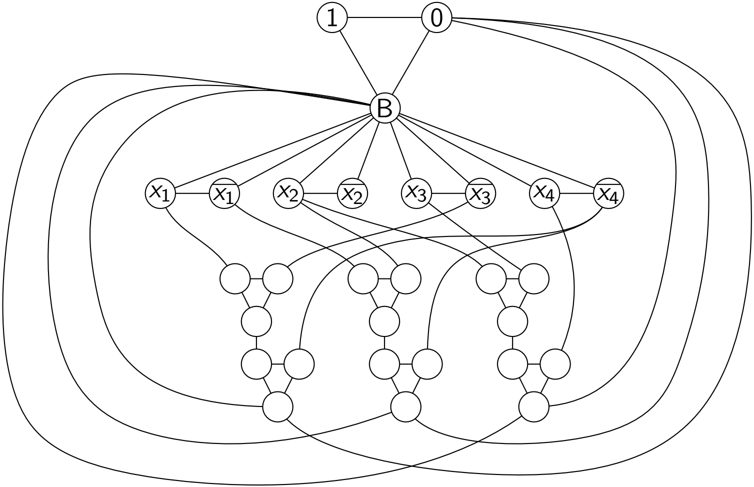
Yes 入力の証拠：G の 3 彩色 c

多項式時間検証アルゴリズム

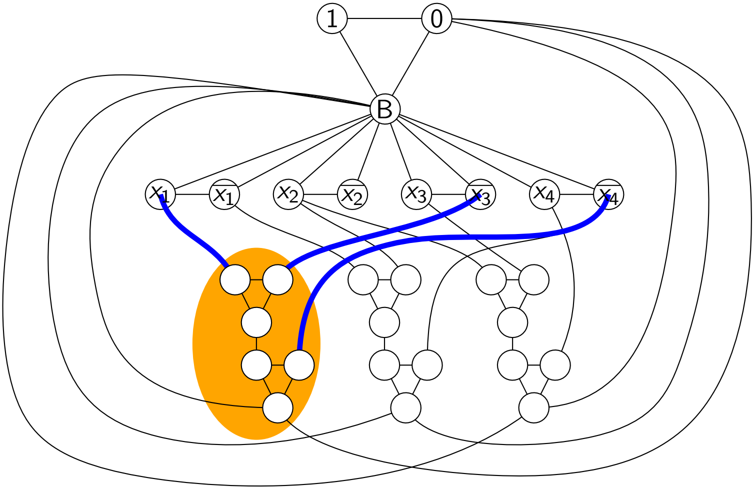
1. c が 3 色しか使っていないか，確認
2. G のどの辺の端点も c で違う色に塗られているか，確認



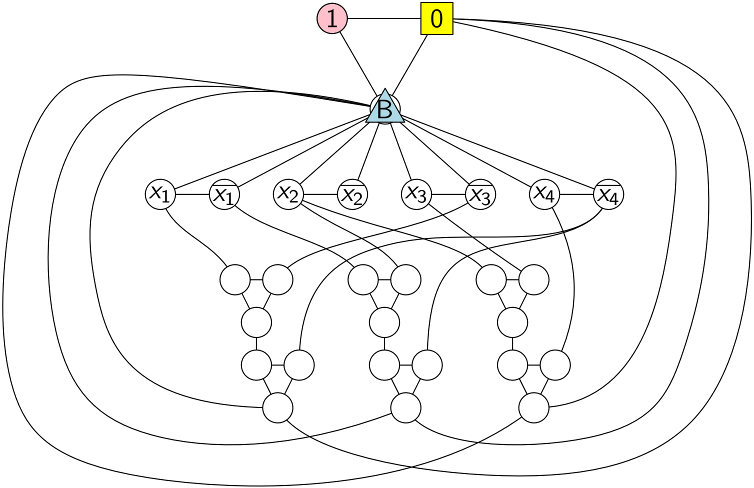
$\boxed{例}$：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$\boxed{\text{例}}$：$n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{=C_1} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4})}_{=C_2} \land \underbrace{(x_2 \lor x_3 \lor x_4)}_{=C_3}$ のとき

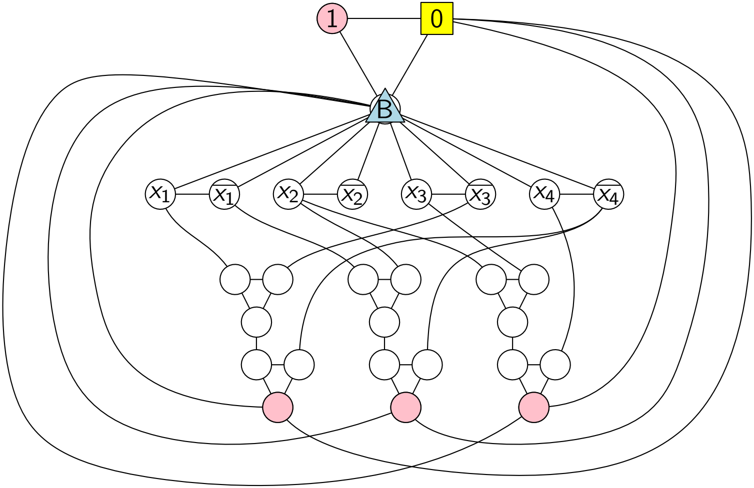


$\boxed{例}$：$n = 4$，$f = \underbrace{(x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{=C_1} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4})}_{=C_2} \land \underbrace{(x_2 \lor x_3 \lor x_4)}_{=C_3}$ のとき

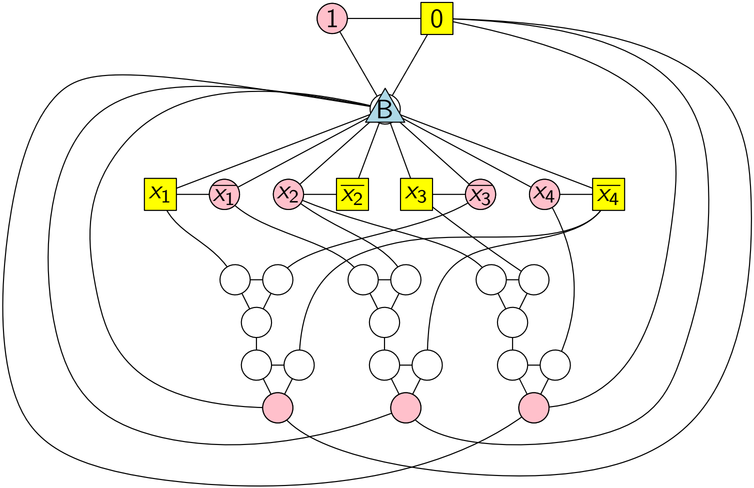


3 彩色問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (1)

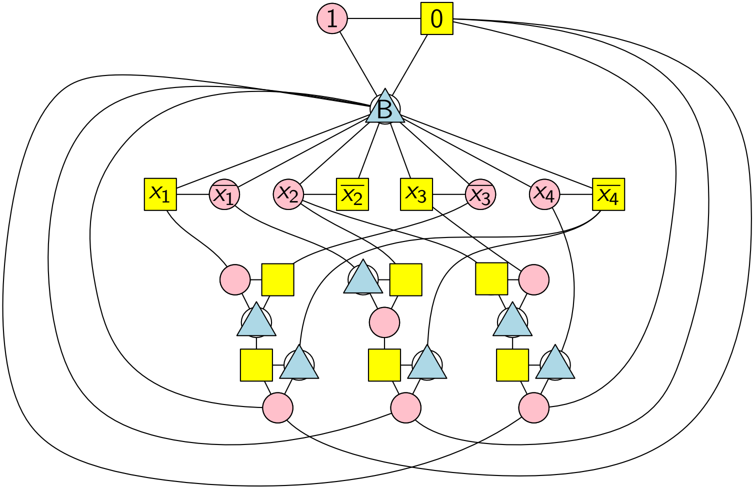
$\boxed{例}$: $n = 4$, $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$\boxed{例}$ ：$n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



$\boxed{例}$：$n = 4$， $f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$ のとき



3 彩色問題の NP 完全性：多対一多項式時間帰着 (2)

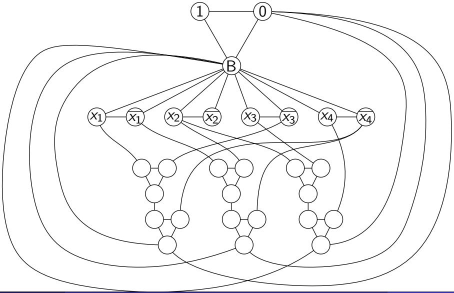
3-SAT の入力 (3CNF 論理式) f から，3 彩色問題の入力 G を構成する

- f の変数が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であるとする
- f の節が $C_1, C_2, \ldots, C_m$ であるとする

グラフ G はいくつかの部品 (ガジェット) から構成されている

色決定部

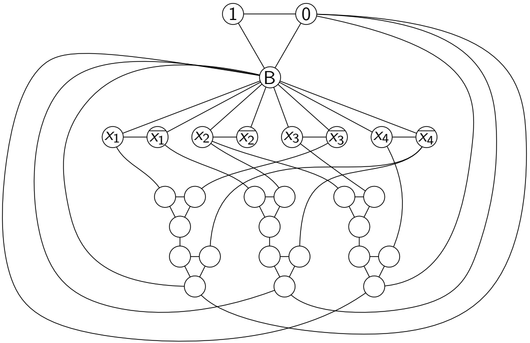
- 頂点：1, 0, B
- 辺：$\{1, 0\}$, $\{1, \mathrm{B}\}$, $\{0, \mathrm{B}\}$



グラフ G はいくつかの部品から構成されている

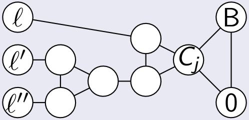
変数部：各変数 x_i に対して

- 頂点：x_i, $\overline{x_i}$
- 辺：$\{x_i, \overline{x_i}\}$, $\{x_i, \mathrm{B}\}$, $\{\overline{x_i}, \mathrm{B}\}$



グラフ G はいくつかの部品から構成されている

節部：各節 $C_j = \ell \vee \ell' \vee \ell''$ に対して



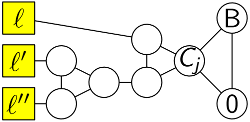
これらを組み合わせて，G が作られる

- G の頂点数 $= 3 + 2n + 6m$
- G の辺数 $= 3 + 3n + 12m$

3CNF 論理式 f から G は多項式時間で構成できる

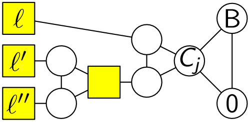
節部の性質 (1)

ℓ, ℓ', ℓ'' が同じ色で塗られる $\Rightarrow$ 節部の右端 C_j もその色で塗られる



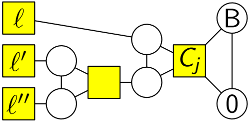
節部の性質 (1)

ℓ, ℓ', ℓ'' が同じ色で塗られる $\Rightarrow$ 節部の右端 C_j もその色で塗られる



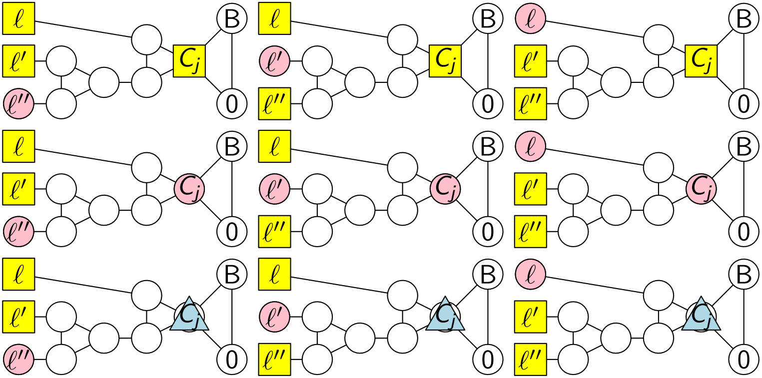
節部の性質 (1)

ℓ, ℓ', ℓ'' が同じ色で塗られる $\Rightarrow$ 節部の右端 C_j もその色で塗られる



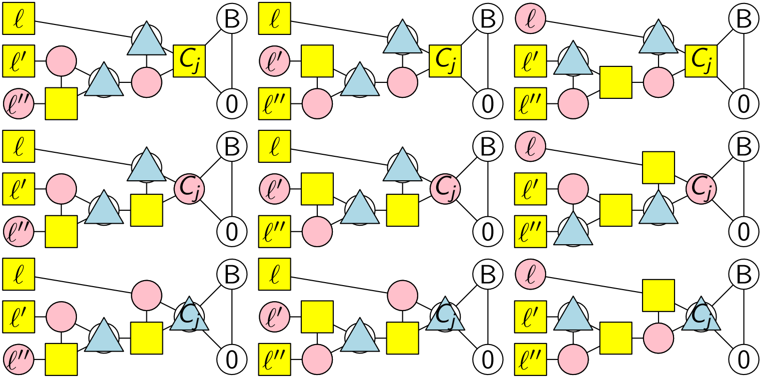
節部の性質 (2)

ℓ, ℓ', ℓ'' が 2 色で塗られる ⇒ 節部の右端 C_j を塗る色は自由に決められる



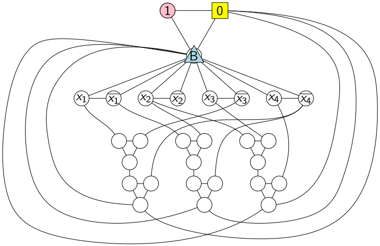
節部の性質 (2)

ℓ, ℓ', ℓ'' が 2 色で塗られる $\Rightarrow$ 節部の右端 C_j を塗る色は自由に決められる



「f が充足可能 $\Rightarrow$ G が 3 彩色を持つ」の証明：充足割当を a とする

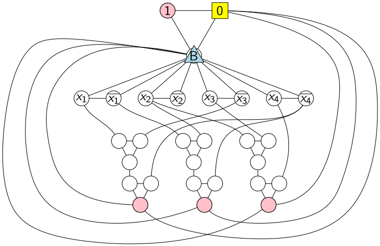
- 次のように，色決定部と変数部の色を決める
  - 1 $\mapsto$ 赤，0 $\mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青
  - 各変数 x_i に対して，
    a: $x_i \mapsto 1$ のとき，$x_i \mapsto$ 赤, $\overline{x_i} \mapsto$ 黄
    a: $x_i \mapsto 0$ のとき，$x_i \mapsto$ 黄, $\overline{x_i} \mapsto$ 赤



節部の性質 (2) より，節部も矛盾なく 3 色で塗れる

「f が充足可能 $\Rightarrow$ G が 3 彩色を持つ」の証明：充足割当を a とする

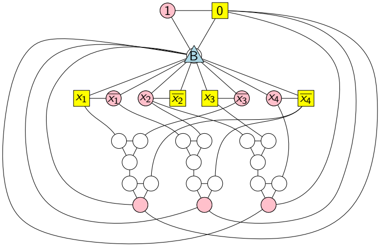
- 次のように，色決定部と変数部の色を決める
  - $1 \mapsto$ 赤，$0 \mapsto$ 黄，$\mathrm{B} \mapsto$ 青
  - 各変数 x_i に対して，
    a: $x_i \mapsto 1$ のとき，$x_i \mapsto$ 赤, $\overline{x_i} \mapsto$ 黄
    a: $x_i \mapsto 0$ のとき，$x_i \mapsto$ 黄, $\overline{x_i} \mapsto$ 赤



節部の性質 (2) より，節部も矛盾なく 3 色で塗れる

「f が充足可能 $\Rightarrow$ G が 3 彩色を持つ」の証明：充足割当を a とする

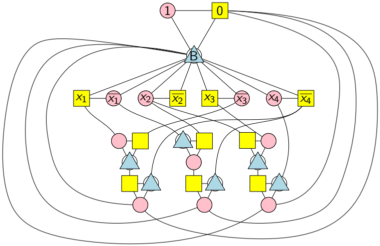
- 次のように，色決定部と変数部の色を決める
  - 1 $\mapsto$ 赤，0 $\mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青
  - 各変数 x_i に対して，
    a: $x_i \mapsto 1$ のとき，$x_i \mapsto$ 赤, $\overline{x_i} \mapsto$ 黄
    a: $x_i \mapsto 0$ のとき，$x_i \mapsto$ 黄, $\overline{x_i} \mapsto$ 赤



節部の性質 (2) より，節部も矛盾なく 3 色で塗れる

「f が充足可能 $\Rightarrow$ G が 3 彩色を持つ」の証明：充足割当を a とする

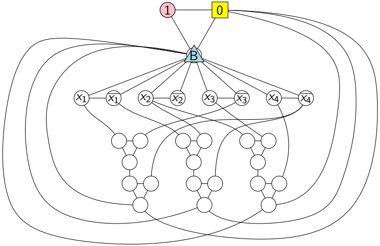
- 次のように，色決定部と変数部の色を決める
  - $1 \mapsto$ 赤，$0 \mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青
  - 各変数 x_i に対して，
    a: $x_i \mapsto 1$ のとき，$x_i \mapsto$ 赤, $\overline{x_i} \mapsto$ 黄
    a: $x_i \mapsto 0$ のとき，$x_i \mapsto$ 黄, $\overline{x_i} \mapsto$ 赤



節部の性質 (2) より，節部も矛盾なく 3 色で塗れる

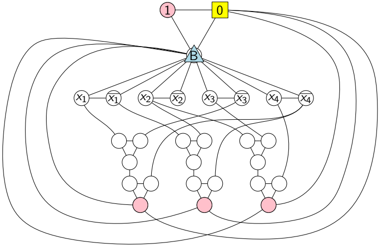
「G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能」の証明：G の 3 彩色を 1 つ固定

- 色決定部は「1 $\mapsto$ 赤，0 $\mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青」と塗られるとしてよい
- 節部の端 C_j は赤で塗られていないといけない
- 変数部の $x_i, \overline{x_i}$ は赤と黄で塗られていないといけない



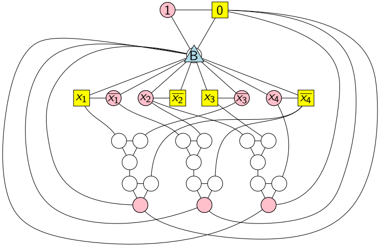
「G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能」の証明：G の 3 彩色を 1 つ固定

- 色決定部は「1 $\mapsto$ 赤，0 $\mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青」と塗られるとしてよい
- 節部の端 C_j は赤で塗られていないといけない
- 変数部の $x_i, \overline{x_i}$ は赤と黄で塗られていないといけない



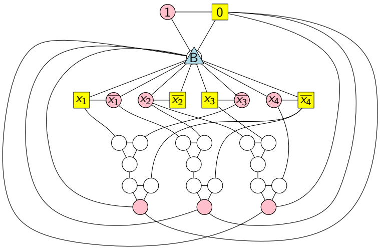
「G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能」の証明：G の 3 彩色を 1 つ固定

- 色決定部は「1 $\mapsto$ 赤，0 $\mapsto$ 黄，B $\mapsto$ 青」と塗られるとしてよい
- 節部の端 C_j は赤で塗られていないといけない
- 変数部の $x_i, \overline{x_i}$ は赤と黄で塗られていないといけない



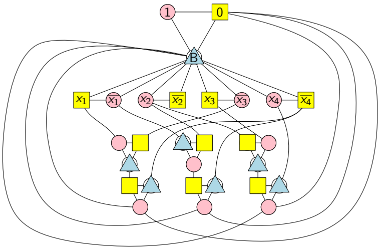
「G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能」の証明：G の 3 彩色を 1 つ固定

- ある節部に隣接するリテラル 3 頂点がすべて黄で塗られていると，節部の性質 (1) に矛盾
- $\therefore$ どの節部も，赤で塗られたリテラルを持つ
- 赤で塗られたリテラルから f の充足割当が得られる □



「G が 3 彩色を持つ $\Rightarrow$ f が充足可能」の証明：G の 3 彩色を 1 つ固定

- ある節部に隣接するリテラル 3 頂点がすべて黄で塗られていると，節部の性質 (1) に矛盾
- ∴ どの節部も，赤で塗られたリテラルを持つ
- 赤で塗られたリテラルから f の充足割当が得られる □



目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

- グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う
  - 独立集合問題
  - クリーク問題，頂点被覆問題
  - 3 彩色問題

次回の予告

グラフに関する問題について，NP 完全性の証明を行う

- ハミルトン閉路問題 など

文献案内

- M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman & Co., 1979.
- M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified *NP*-complete graph problems. Theoretical Computer Science 1 (1976) pp. 237–267.
- R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J.D. Bohlinger (eds.), Complexity of Computer Computations. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.