離散最適化基礎論　第 13 回
アルゴリズム的問題解決：再考

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 1 月 21 日

最終更新：2020 年 1 月 20 日　08:07

スケジュール 前半

スケジュール 後半

今日の目標

今日の目標

NP 完全問題の解決法を考える

- 制限アプローチ
- 厳密アプローチ
- 近似アプローチ

目次

問題解決の流れ

問題解決の流れ (ポリアによる)

(1)	問題を理解すること	(understand)
(2)	計画をたてること	(plan)
(3)	計画を実行すること	(carry out)
(4)	ふり返ってみること	(look back)

ポリアの射程： 数学的問題解決
本講義の射程： アルゴリズム的問題解決

目標

上の「問題解決の流れ」を「アルゴリズム的問題解決」で行う

(1) 問題を理解すること

アルゴリズム的問題解決における「問題を理解すること」

アルゴリズムがすべきことを定めること　(直感的な言い方)

入力 ：アルゴリズムが何を受け取るのか
出力 ：アルゴリズムが何をもたらすのか
条件 ：出力が満たすべき性質は何なのか
(評価)：出力の良さをどのように測るのか

注釈 1

分野によっては，次のような用語を使うことがある
条件 = 制約　　評価 = 目的，目標

注釈 2

「出力の評価」と「アルゴリズムの評価」は別概念なので，区別する

(2) 計画をたてること

アルゴリズム的問題解決における「計画をたてること」

1. アルゴリズム設計の方針を立てること
2. アルゴリズムを設計すること

アルゴリズム設計の方針 とは？

- 我々が目標とする「実行時間」と「メモリ消費量」の特定
- 我々が達成できる「実行時間」と「メモリ消費量」の特定
  ← この講義の内容

アルゴリズム設計の方針

現実問題の付帯条件を細かく検討する必要がある

スケジューリングのような問題にも様々

- 中学校の時間割作成
  教員数 30 名程度，学級数 15 程度，1 年に 1 回作成
  計算にかけられる時間：1 日程度 ← 目標とする実行時間
- 銀行 ATM の現金補充計画作成
  ATM 数 200 個程度，拠点数 20 個程度，1 年に 1 回程度作成
  計算にかけられる時間：1 週間程度 ← 目標とする実行時間
- 看護師の勤務表作成
  看護師数 25 名程度，3 交替制，1ヵ月に 1 回作成
  計算にかけられる時間：1 時間程度 ← 目標とする実行時間

「我々の目標とするもの」と「我々の達成できるもの」のギャップが重要

- 目標が達成できる　⇒ 達成すればよい
- 目標が達成できない ⇒ どうすれば？ (今日の内容)

(3) 計画を実行すること

アルゴリズム的問題解決における「計画を実行すること」

- アルゴリズムをプログラムとして実現 (実装) すること
- プログラムを実行すること

注意

「アルゴリズム」と「プログラム」は明確に区別される

アルゴリズム　手続きの抽象的記述　(主に数学による)
プログラム　　手続きの具体的記述　(主にプログラミング言語による)

つまり，

- 「速いアルゴリズム」と「速いプログラム」は区別しないといけない
- 「アルゴリズムがプログラムとして実現できるか」は分からない

(4) ふり返ってみること

アルゴリズム的問題解決における「ふり返ってみること」

- 問題が正しく理解できているか，評価する
- アルゴリズムとプログラムに満足できるか，評価する

評価ができたら，また (1) に戻って，繰り返す

- 解くべき問題が理解できてないと 判明することも多い

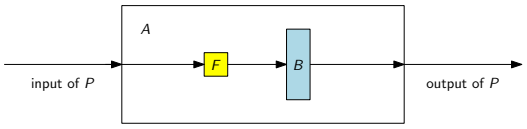
P vs NP 問題と NP 完全問題 (1)

性質

ある NP 完全問題が多項式時間で解ける　⇒　P = NP

証明：仮定にある「ある NP 完全問題」を Q とする

- Q を多項式時間で解くアルゴリズム B が存在　(仮定)
- NP に所属する任意の判定問題を P とすると，
  P は Q に多項式時間多対一帰着可能　(NP 完全性の定義)
- P を Q に帰着するアルゴリズムを F とする
- このとき，B と F から，P を解く多項式時間アルゴリズムが作れる



P vs NP 問題と NP 完全問題 (2)

性質

ある NP 完全問題が多項式時間で解ける　⇒　P = NP

直感

NP 完全問題はクラス NP の中で最も難しい問題

未解決問題

NP 完全問題は多項式時間で解けるか？

性質の対偶

P ≠ NP　⇒　どの NP 完全問題も多項式時間で解けない

アルゴリズム的問題解決との関係

(2) 計画をたてること

アルゴリズム的問題解決における「計画をたてること」

1. アルゴリズム設計の方針を立てること
2. アルゴリズムを設計すること

アルゴリズム設計の方針 とは？ (再)

- 我々が目標とする「実行時間」と「メモリ消費量」の特定
- 我々が達成できる「実行時間」と「メモリ消費量」の特定
  ← この講義の内容

NP 完全性の使い方

対象とする問題が NP 完全問題であると分かれば
P ≠ NP という仮定の下で，　(←落とせない仮定)
「多項式時間で解くこと」が達成できないと分かる

目次

NP 完全問題を解くことは諦めるのか？

NP 完全性の使い方

対象とする問題が NP 完全問題であると分かれば
P ≠ NP という仮定の下で，　(←落とせない仮定)
「多項式時間で解くこと」が達成できないと分かる

しかし，問題を解かないといけない！ (←社会的要請)

どうすればよいのか？

- P = NP であることを証明する
- 全面的に諦める
- 妥協する
  - 全面的に諦めるわけではなく，部分的に諦める

考えるべきこと

何を諦めて，何を諦めないのか？

妥協点を探る

アルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

これらの中の，1 つだけを諦めることを考える
- 「すべての入力に対して」を諦める ⇝ 制限アプローチ
- 「素早く」 を諦める ⇝ 厳密アプローチ
- 「正しい出力を行うこと」を諦める ⇝ 近似アプローチ

妥協法 1：制限アプローチ

アルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

制限アプローチでアルゴリズムに求められていること
- 一部分の入力に対して (入力の普遍性を緩和)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

妥協法 2：厳密アプローチ

アルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

厳密アプローチでアルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- ある程度の時間で (処理の効率性を妥協)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

妥協法 3：近似アプローチ

アルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

近似アプローチでアルゴリズムに求められていること
- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力に近い出力を行うこと (出力の正当性を妥協)

なぜ 3 つのアプローチは正当化されるか？

なぜ 3 つのアプローチは正当化されるか？

立場 1：理論的 (数学的) 立場

P = NP を証明することが難しい

立場 2：実践的立場

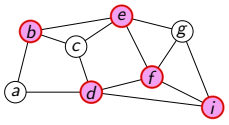
現実問題の解決において，
「すべての入力において，素早く，正しい出力を行うこと」
が必要とされるわけではない

現実問題の解決において
- 現れる入力は限られるかもしれない ⇝ 制限アプローチ
- 時間はたっぷりあるかもしれない ⇝ 厳密アプローチ
- 少々の間違いは許されるかもしれない ⇝ 近似アプローチ

この 3 つのアプローチを例題を通して考える

最小頂点被覆問題
- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の頂点被覆 S
- 評価：要素数 $|S|$ の最小化

無向グラフ G の頂点被覆とは，G の頂点部分集合 S で
G のどの辺も S に端点を持つもの

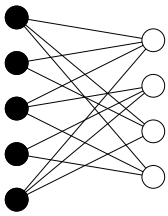


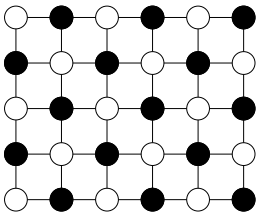
復習：最小頂点被覆問題の判定問題版は NP 完全 (第 4 回講義)

目次

二部グラフ

二部グラフとは，頂点集合を 2 つの独立集合に分割できるグラフ
(2 彩色を持つグラフ と言い換えることもできる)





定理

二部グラフに入力を限定した最小頂点被覆問題は
多項式時間で解ける

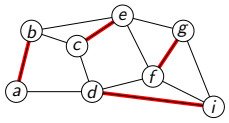
多項式時間で解ける仕組みを説明したい

マッチング問題 (第 5 回講義の復習)

マッチング問題

- 入力：無向グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上のマッチングを持つ $\Rightarrow$ Yes
  G が要素数 k 以上のマッチングを持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G のマッチングとは，G の辺部分集合 S で
S のどの 2 辺も端点を共有しないもの



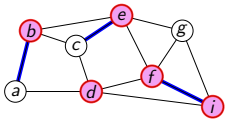
多項式時間で解ける (Edmonds '65)

マッチングと頂点被覆の関係

事実

任意のグラフに対して

任意のマッチングの要素数 $\leq$ 任意の頂点被覆の要素数



特に，任意のグラフに対して

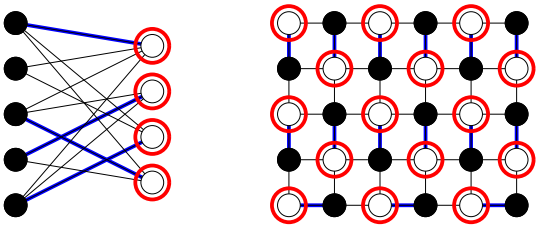
マッチングの最大要素数 $\leq$ 頂点被覆の最小要素数

Kőnig–Egerváry の定理

事実 (Kőnig '31; Egerváry '31)

二部グラフに対して，

マッチングの最大要素数 $=$ 頂点被覆の最小要素数



Kőnig–Egerváry の定理

事実 (Kőnig '31; Egerváry '31)

二部グラフに対して，

マッチングの最大要素数 $=$ 頂点被覆の最小要素数

つまり，二部グラフに対しては

- マッチングの最大要素数が分かれば，頂点被覆の最小要素数も分かる

どんなグラフに対しても

- マッチングの最大要素数は多項式時間で計算できる

$\therefore$ 二部グラフに対しては

- 頂点被覆の最小要素数が多項式時間で計算できる

要素数から頂点被覆自体も多項式時間で計算できる (第 1 回講義参照) □

制限アプローチの着眼点

制限アプローチの利点

- 入力を制限すると，多項式時間で解ける可能性が上がる

制限アプローチの欠点

- 入力を制限すると，扱える入力の種類が小さくなる
- 入力を制限しても，多項式時間で解けないかもしれない

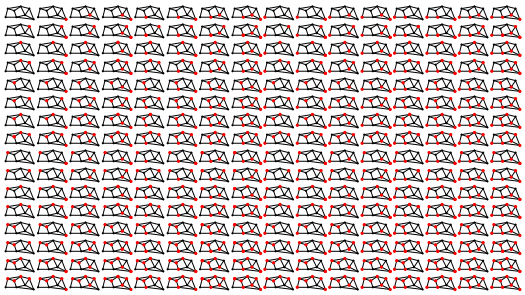
例：平面的グラフに対する最小頂点被覆問題 (判定問題版) は NP 完全
(第 10 回講義参照)

目次

最小頂点被覆問題：単純な厳密アルゴリズム

単純な厳密アルゴリズム (正しい出力をするアルゴリズム)

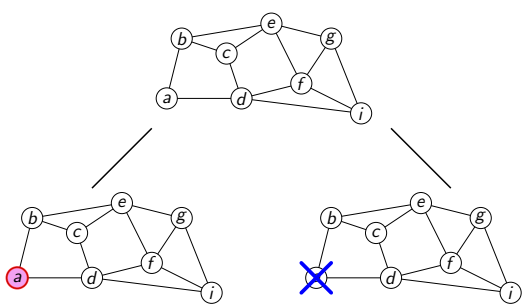
すべての頂点部分集合を見ていく



頂点部分集合の総数 $= 2^n$ (n は頂点の総数)

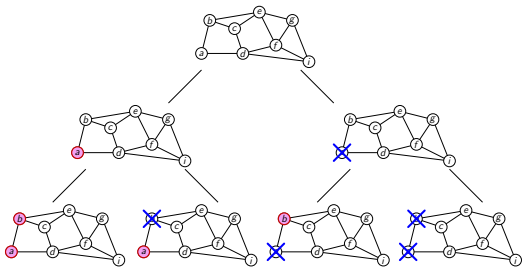
最小頂点被覆問題：単純な厳密アルゴリズム — 別の見方 (1)

場合分けの木を通して，アルゴリズムを見直す



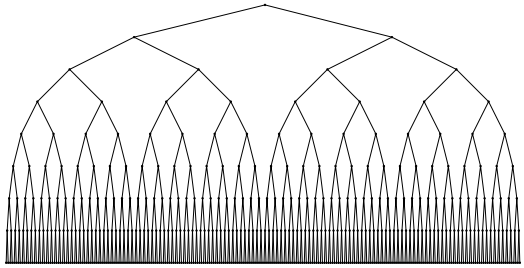
最小頂点被覆問題：単純な厳密アルゴリズム — 別の見方 (2)

場合分けの木を通して，アルゴリズムを見直す



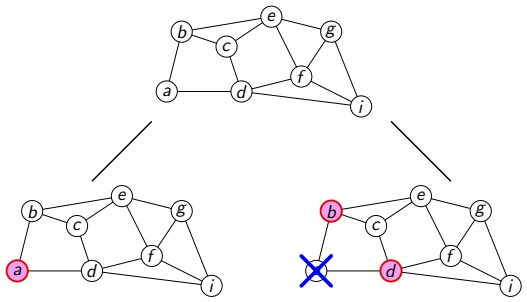
最小頂点被覆問題：単純な厳密アルゴリズム — 別の見方 (3)

場合分けの木を通して，アルゴリズムを見直す

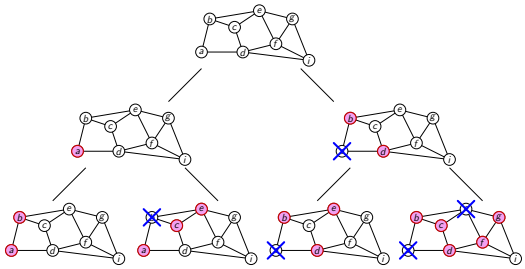


この木の葉 $\leftarrow$ 1 対 1 対応 $\rightarrow$ 頂点部分集合

最小頂点被覆問題：少し頭を使う (1)

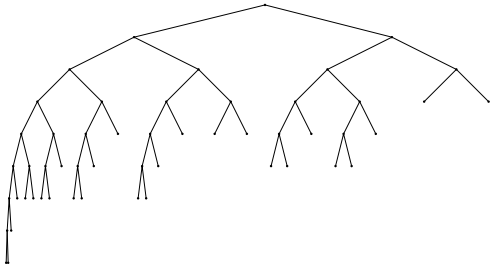


最小頂点被覆問題：少し頭を使う (2)



最小頂点被覆問題：少し頭を使う (3)

場合分けの木を通して，アルゴリズムを見直す



木の葉の数がかなり減った $\rightsquigarrow$ アルゴリズムの効率がよくなった

最小頂点被覆問題：少し頭を使う — 理論的解析

再帰として考える

1. G の頂点 v を頂点被覆に含めるとき
   $\rightsquigarrow$ $G - v$ の頂点被覆を考えればよい
2. G の頂点 v を頂点被覆に含めるとき
   v に隣接する端点 u を頂点被覆に含めないといけない
   $\rightsquigarrow$ $G - v - u$ の頂点被覆を考えればよい

頂点数 n のグラフに対する最悪時実行時間を $t(n)$ とすれば，次が成立

$$t(n) \begin{cases} = O(1) & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \leq t(n-1) + t(n-2) + O(1) & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解くと，$t(n) = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = O(1.618^n)$ が得られる

教訓

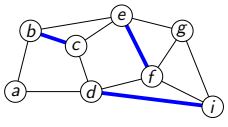
厳密アプローチであっても，工夫をすると，理論的にも実践的にも
「単純なアルゴリズム」より効率のよいアルゴリズムを作れる

目次

よさそうな頂点被覆を作る (1)

よさそうな頂点被覆を高速に作るアルゴリズム

(1) 極大マッチング M を 1 つ見つける

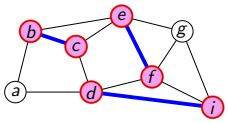


M が極大マッチング：
M に属さない辺 e に対して，$M \cup \{e\}$ がマッチングではない

よさそうな頂点被覆を作る (2)

よさそうな頂点被覆を高速に作るアルゴリズム

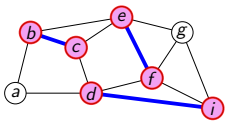
(2) M の辺の端点である頂点をすべて集めて，出力する



よさそうな頂点被覆を作る：考えるべき事項

考えるべき事項

1. この方法で，頂点被覆が必ず出力されるのか？
2. この方法が出力する頂点被覆は，どれぐらいよいのか？



よい ＝ 要素数が最小頂点被覆の要素数に近い

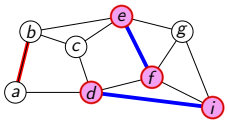
よさそうな頂点被覆を作る：頂点被覆を必ず出力すること

証明すること

先ほどの方法は，頂点被覆を必ず出力する

証明：

- (背理法) 出力が頂点被覆ではないとする
- このとき，両端点が出力に含まれない辺 e が存在する
- しかし，このとき，$M \cup \{e\}$ はマッチングなので，
  M が極大マッチングであることに矛盾 □



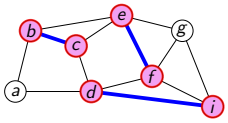
よさそうな頂点被覆を作る：よさの評価

証明すること

先ほどの方法が出力する頂点被覆の要素数は
最小頂点被覆の要素数の 2 倍以下

証明：先ほどの方法の出力を S，任意の最小頂点被覆を S^* とする

- S を作るために使った極大マッチングを M とする
- M はマッチングなので，$|S| = 2|M|$
- M はマッチング，S^* は頂点被覆なので，$|M| \leq |S^*|$
- $\therefore |S| = 2|M| \leq 2|S^*|$ □



目次

今日のまとめ (1)

NP 完全問題を解くことは諦めるのか？

全面的に諦めるわけではなく，部分的に諦める (妥協する)

アルゴリズムに求められていること

- すべての入力に対して (入力の普遍性)
- 素早く (処理の効率性)
- 正しい出力を行うこと (出力の正当性)

これらの中の，1 つだけを諦めることを考える

- 「すべての入力に対して」を諦める $\rightsquigarrow$ 制限アプローチ
- 「素早く」を諦める $\rightsquigarrow$ 厳密アプローチ
- 「正しい出力を行うこと」を諦める $\rightsquigarrow$ 近似アプローチ

例として，最小頂点被覆問題を考察対象とした

今日のまとめ (2)

これらの中の，1 つだけを諦めることを考える

- 「すべての入力に対して」を諦める $\rightsquigarrow$ 制限アプローチ
- 「素早く」を諦める $\rightsquigarrow$ 厳密アプローチ
- 「正しい出力を行うこと」を諦める $\rightsquigarrow$ 近似アプローチ

例として，最小頂点被覆問題を考察対象とした

疑問

これら 3 つのアプローチには限界があるのか？

答：あると思われている

- 次の記事に (少し古い内容であるが) 解説がある
  岡本吉央,「組合せ最適化理論の三次元描像」，第 21 回回路とシステム軽井沢ワークショップ，2008 年.
  http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/PDF/2008/comb3d.pdf

全体のまとめ

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして離散最適化における計算困難性を取り上げ，計算困難性の考え方が離散最適化にどう応用されるのか，理解する

なぜ講義で取り扱う？

- 重要な概念であるから
- アルゴリズム設計の根幹を成すから
- まとまって講義として取り扱われることが，あまりないから