

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 1 月 7 日

最終更新：2020 年 1 月 13 日 11:48

スケジュール 後半 (予定)

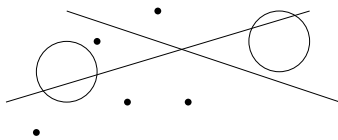
- 8 数値が関わる問題 (1) : 2 分割問題 (12/3)
- 9 数値が関わる問題 (2) : 3 分割問題 (12/10)
- 10 平面性が関わる問題 (12/17)
- ★ 冬期休業 (12/24, 31)
- 11 計算幾何学に関する問題 (1/7)
- 12 文字列に関する問題 (1/14)
- 13 アルゴリズム的問題解決 : 再考 (1/21)
- 14 予備 (1/28)
- ★ 休講 (2/4)
- ★ 祝日のため休み (2/11)

注意：予定の変更もありうる

計算幾何学 (Computational Geometry)

計算幾何学

「点」, 「直線」, 「平面」 などといった幾何学的対象に対する情報処理を探究する研究分野

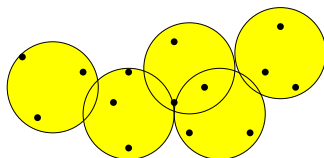


単位円被覆問題

単位円被覆問題：単位円を用いて点を覆う

単位円被覆問題 (最適化問題版)

- ▶ 入力：整数 $n \geq 1$, 平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- ▶ 出力：単位円の集合 $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ で,
 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : P_i \in D_j$
- ▶ 評価：単位円の総数 m の最小化



ここで「円」は「円板」を表すこととする

スケジュール 前半

- ★ 休み (大学院入学式) (10/1)
- 1 アルゴリズム的問題解決と計算複雑性 (10/8)
- 2 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- ★ 休み (祝日) (10/22)
- 3 充足可能性問題とその変種 (10/29)
- 4 グラフに関する問題 (1) : 部分集合の選択 (11/5)
- 5 グラフに関する問題 (2) : 経路の選択 (11/12)
- 6 集合族に関する問題 (1) : グラフとの関連 (11/19)
- 7 集合族に関する問題 (2) : 発展 (11/26)

今日の目標

今日の目標

計算幾何学に関する問題の NP 困難性を扱う

- ▶ 幾何的被覆問題
- ▶ 幾何的巡回セールスマン問題

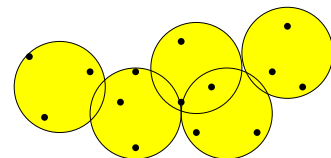
目次

- 1 単位円被覆問題
- 2 幾何的巡回セールスマン問題
- 3 今日のまとめ と 次回の予告

単位円被覆問題 (判定問題版)

単位円被覆問題 (判定問題版)

- ▶ 入力：整数 $n \geq 1$, 平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{Q}^2$, $m \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力：Yes または No
- ▶ 条件： m 個の単位円で P_1, \dots, P_n を覆える \Rightarrow Yes
 m 個の単位円で P_1, \dots, P_n を覆えない \Rightarrow No



ここで「円」は「円板」を表すこととする

定理 (Fowler, Paterson, Tanimoto '81)

単位円被覆問題 (判定問題版) は強 NP 完全

定理を証明するためには、次を証明すればよい

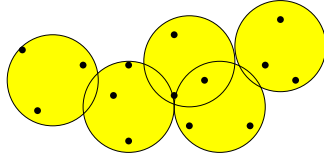
- ▶ 入力数値が 1 進符号化されるとき
単位円被覆問題 (判定問題版) が NP に所属すること
- ▶ 入力数値が 1 進符号化された単位円被覆問題 (判定問題版) に
平面的 3-SAT が多項式時間多対一帰着可能であること

単位円被覆問題の NP 完全性 : NP に所属すること (2)

注意すべきこと

単位円の中心の座標がどう表されるか?

単位円の中心の座標を入力の多項式長で表せないかもしれない



- 単位円の中心の座標 C_j が入力多項式長で表せない
- ⇒ P_i と C_j の距離の 2 乗が多項式時間で計算できない
- ⇒ 検証アルゴリズムが多項式時間で終了しない

2 点を通る単位円の中心 (1)

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を境界を持つ単位円の中心の座標 (x, y) を計算する

- ▶ (x, y) は次を満たす

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 1 \quad (式 1)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = 1 \quad (式 2)$$

- ▶ 「(式 1) - (式 2)」より次が得られる

$$(x - x_1)^2 - (x - x_2)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_2)^2 = 0$$

$$\therefore (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 2y) = 0 \quad (式 3)$$

2 点を通る単位円の中心との距離 (1)

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を境界を持つ単位円 D が点 (x_3, y_3) を覆う

$$\Leftrightarrow (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 \leq 1 \quad (\text{ただし, } (x, y) \text{ は単位円 } D \text{ の中心})$$

$$\Leftrightarrow \left(x_3 - \frac{(x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2} \right)^2 + \left(y_3 - \frac{(y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2} \right)^2 \leq 1$$

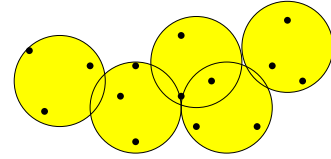
$$\Leftrightarrow \left(2x_3d^2 - \left((x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)} \right) \right)^2 + \left(2y_3d^2 - \left((y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)} \right) \right)^2 \leq 4d^4$$

つまり、任意の有理数 $A, B, C \geq 0$ に対して
「 $A - B\sqrt{C} \leq 0$ 」であることが判定できれば
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を境界を持つ単位円が点 (x_3, y_3) を覆うか分かる

Yes 入力の証拠 : n 個の点を覆う単位円 D_1, D_2, \dots, D_m ???

多項式時間検証アルゴリズム ???

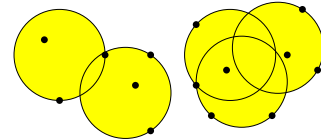
- 1 各点 P_i と各円 D_j の中心 C_j の距離の 2 乗を計算して、それが 1 以下かどうか、調べる
- 2 すべての点 P_i に対して、ある円 D_j の中心との距離の 2 乗が 1 以下であれば、よい



単位円被覆問題の NP 完全性 : NP に所属すること (3)

観察

与えられた n 個の点を m 個の単位円で覆える ⇒
 m 個の単位円として、与えられた点の中の 2 つを境界に持つものを使うことができる



2 点を通る単位円の中心 (2)

- ▶ 式 (1) と式 (3) より、次が得られる (復号同順)

$$x = \frac{(x_1 + x_2)d^2 \pm (y_1 - y_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2}$$

$$y = \frac{(y_1 + y_2)d^2 \pm (x_1 - x_2)\sqrt{d^2(4 - d^2)}}{2d^2}$$

$$\text{ただし, } d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

2 点を通る単位円の中心との距離 (2)

解ければよい問題

任意の有理数 $A, B, C \geq 0$ に対して「 $A \leq B\sqrt{C}$ 」かの判定

場合分け

- 1 $A \leq 0 \leq B$ の場合 : $A \leq B\sqrt{C}$ となる
- 2 $B < 0 \leq A$ の場合 : $A \leq B\sqrt{C}$ とならない
- 3 $0 \leq A$ かつ $0 \leq B$ の場合 : 「 $A^2 \leq B^2C$ 」を判定する
- 4 $A \leq 0$ かつ $B \leq 0$ の場合 : 「 $A^2 \geq B^2C$ 」を判定する

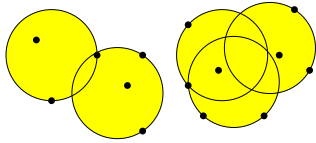
結論

3 点 P_1, P_2, P_3 に対して、
 P_1, P_2 を境界に持つ単位円 D が P_3 を覆うことの判定は
 P_1, P_2, P_3 の座標の値の多項式時間でなえる

Yes 入力の証拠: n 個の点を覆う単位円 D_1, D_2, \dots, D_m
 (各 D_j はその境界上の 2 点と復号の符号で定める)

多項式時間検証アルゴリズム

- 各点 P_i と各円 D_j の中心 C_j の距離の 2 乗を計算して、それが 1 以下かどうか、調べる
- すべての点 P_i に対して、ある円 D_j の中心との距離の 2 乗が 1 以下であれば、よい

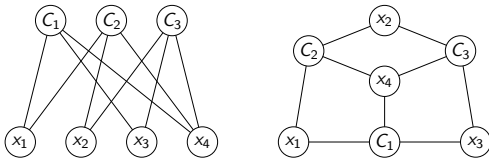


平面的 3-SAT

平面的 3-SAT

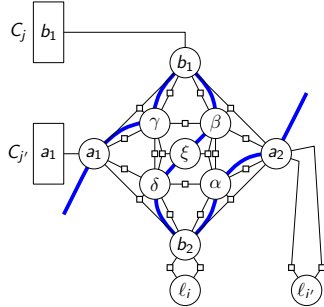
- 入力: 整数 $n \geq 1$, 3-CNF 論理式 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 ただし, f の接続グラフは平面的グラフ
- 出力: Yes または No
- 条件: f が充足可能である \Rightarrow Yes
 f が充足可能でない \Rightarrow No

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (2)

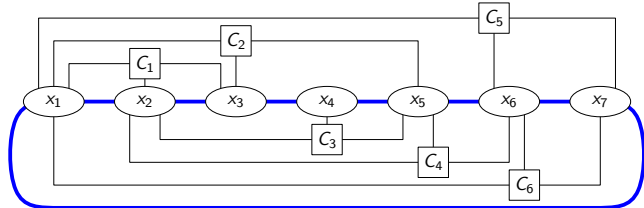
交差解消ガジェット



追加した変数頂点のみを通過し、辺と交差しな曲線を描ける

平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (4)

描き方を連続的に変形させることで、次のように描ける



- 変数頂点が水平線上に並ぶ
- 節頂点はその水平線の上と下に辺交差なく並ぶ
- 辺は軸平行な線分で構成される

つまり、このように描ける接続グラフを持つ 3-SAT に限っても NP 完全 (Knuth, Raghunathan '92; 詳しい説明は Tippenhauer '16)

定理 (Fowler, Paterson, Tanimoto '81)

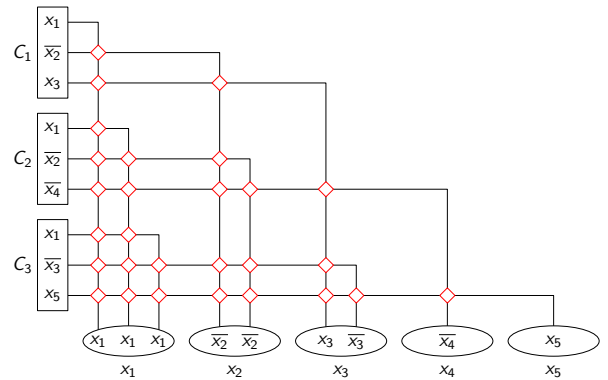
単位円被覆問題 (判定問題版) は強 NP 完全

定理を証明するためには、次を証明すればよい

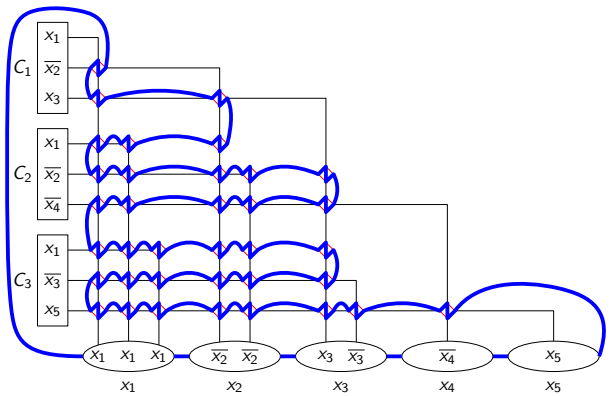
- ▶ 入力数値が 1 進符号化される時 単位円被覆問題 (判定問題版) が NP に所属すること (済)
- ▶ 入力数値が 1 進符号化された単位円被覆問題 (判定問題版) に 平面的 3-SAT が多項式時間多対一帰着可能であること

平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (1)

前回の講義では、3-SAT を平面的 3-SAT に帰着した



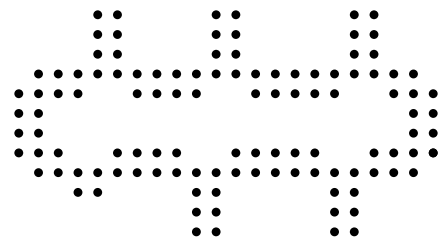
平面的 3-SAT における接続グラフの特徴 (3)



変数頂点のみを通過し、辺と交差しな閉曲線を描ける

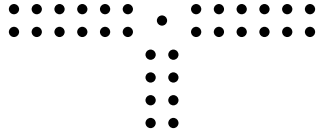
単位円被覆問題の NP 完全性: 帰着 (1)

変数ガジェット



変数 x_i に対応するガジェット: 入力の論理式に x_i が 2 回, \bar{x}_i が 3 回出現する場合

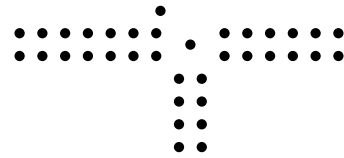
節ガジェット



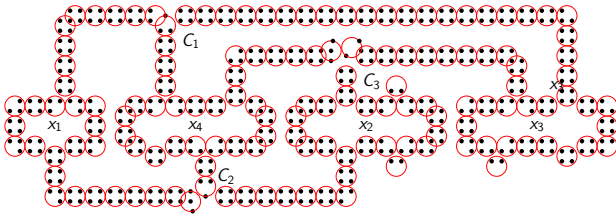
節 C_j に対応するガジェット

- ▶ C_j に含まれるリテラルにすべて 0 が割り当てられると中央の点を覆うために、もう 1 つ単位円が必要となる
- ▶ C_j に含まれるリテラルの中に 1 が割り当てられるのがあると中央の点を覆うために、もう 1 つ単位円を必要としない

節ガジェット：偶奇が合わないとき



全体像



$$f = \underbrace{(x_1 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$

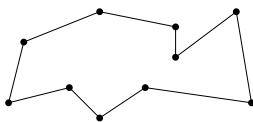
- ▶ 充足割当: $x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 1, x_4 \mapsto 0$

これは多項式時間帰着

- ① 単位円被覆問題
- ② 幾何的巡回セールスマン問題
- ③ 今日のまとめ と 次回の予告

幾何的巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

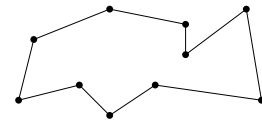
- ▶ 入力: 整数 $n \geq 1$, 平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- ▶ 出力: P_1, P_2, \dots, P_n をちょうど一度ずつ通り, 戻る経路
- ▶ 評価: 経路長の最小化



出力条件を満たす経路を巡回路 (tour) と呼ぶことがある

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版)

- ▶ 入力: 整数 $n \geq 1$, 平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
 $k \in \mathbb{Q}$
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: 長さが k 以下の巡回路がある \Rightarrow Yes
長さが k 以下の巡回路がない \Rightarrow No



定理 (Garey, Graham, Johnson '76; Papadimitriou '77)

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版) は強 NP 困難

証明は省略

- ▶ 原論文では, 集合分割問題を帰着している

未解決問題

幾何的巡回セールスマン問題 (判定問題版) は NP に所属するか?

なぜ, 幾何的巡回セールスマン問題が NP に所属するか, 分からないのか?

未解決: 次の判定問題が多項式時間で解けるか

- ▶ 入力: 自然数 $n \geq 1$, 正の整数列 a_1, \dots, a_n と b_1, \dots, b_n
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: 次の式が成立する \Rightarrow Yes
次の式が成立しない \Rightarrow No

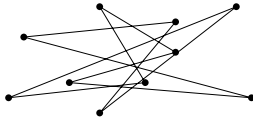
$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}$$

これは「2つの巡回路の長さの比較」に対応

- ▶ つまり, 「2つの巡回路から, 長さの小さい方を選ぶ」ことが多項式時間でできるかどうか, 分かっていない

幾何的最大巡回セールスマン問題 (最適化問題版)

- ▶ 入力：整数 $n \geq 1$, 平面上の n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{Q}^2$
- ▶ 出力： P_1, P_2, \dots, P_n をちょうど一度ずつ通り, 戻る経路
- ▶ 評価：経路長の**最大化**



未解決問題

幾何的最大巡回セールスマン問題は多項式時間で解けるか？

NP 困難であるかも, 分かっていない

① 単位円被覆問題

② 幾何的巡回セールスマン問題

③ 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

今日の目標

計算幾何学に関する問題の NP 困難性を扱う

- ▶ 幾何的被覆問題
- ▶ 幾何的巡回セールスマン問題

文献案内

- ▶ R. J. Fowler, M. S. Paterson, S. L. Tanimoto, Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. Information Processing Letters 12 (1981) pp. 133–137.
- ▶ M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, Some NP-complete geometric problems. Proceedings of 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1976) pp. 10–22.
- ▶ D. E. Knuth, A. Raghunathan, The problem of compatible representatives. SIAM Journal on Discrete Mathematics 5 (1992) pp. 422–427.
- ▶ C. Papadimitriou, The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete. Theoretical Computer Science 4 (1977) pp. 237–244.
- ▶ S. Tippenhauer, On planar 3-SAT and its variants. Masterarbeit, Freien Universität Berlin, 2016.