離散最適化基礎論　第 10 回
平面性が関わる問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 12 月 17 日

最終更新：2019 年 12 月 17 日　16:13

スケジュール 前半

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

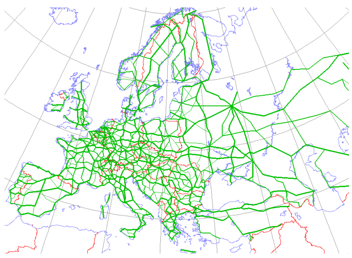
今日の目標

平面性が関わる問題の NP 完全性を扱う
- 平面的グラフに関する問題
- 平面的充足可能性問題

鍵となる概念：交差解消ガジェット

平面性

現実問題では,「任意の無向グラフ」が入力として与えられるわけではなく
「ある種の特徴を持つ無向グラフ」が入力として与えられることが多い
- 平面性はそのような特徴の 1 つ



http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

そのような「ある種の特徴」を問題解決に活かしたい

目次

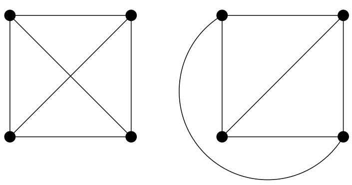
平面的グラフ とは？

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：平面的グラフとは？

G が平面的 (planar) であるとは,
G を平面上に辺交差なく描けること

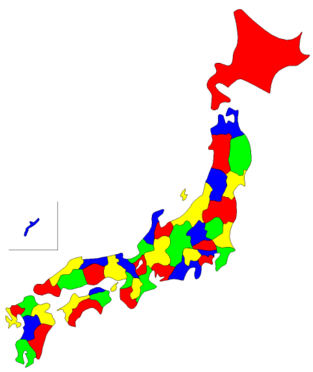
例：頂点数 4 の完全グラフは平面的



注：平面的ではないグラフが存在する

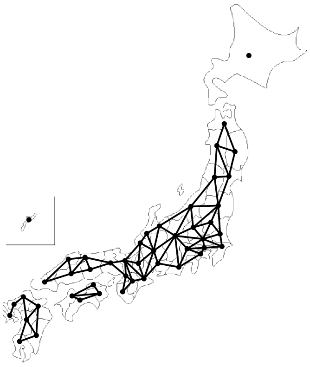
平面的グラフの現れる例 (1)

地図の彩色



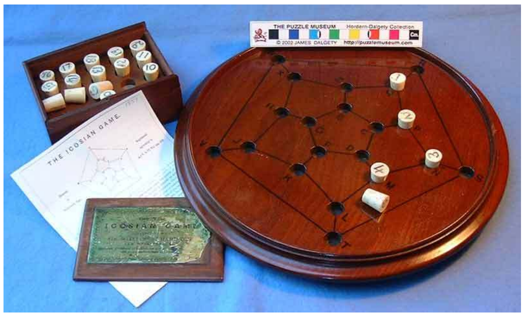
平面的グラフの現れる例 (1) 続き

地図からグラフへ ⇝ 平面的グラフにおける彩色問題



平面的グラフの現れる例 (2)

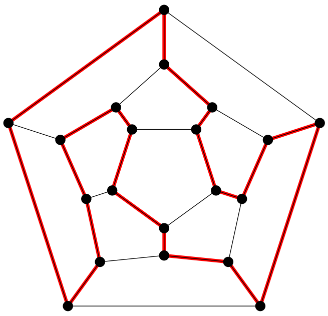
イコシアン・ゲーム (ハミルトン卿の問題)



https://godandmath.com/2012/03/29/christian-mathematicians-hamilton/

平面的グラフの現れる例 (2) 続き

イコシアン・ゲーム (ハミルトン卿の問題)



⇝ 平面的グラフにおけるハミルトン閉路問題

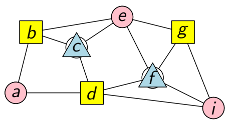
目次

平面的グラフにおける 3 彩色問題

平面的グラフにおける 3 彩色問題

- 入力：平面的グラフ G
- 出力：Yes か No
- 条件：G が 3 彩色を持つ　$\Rightarrow$ Yes
  G が 3 彩色を持たない $\Rightarrow$ No

無向グラフ G の 3 彩色とは，頂点を 3 色で塗る方法で，
どの辺の両端点も同じ色にならないもの



注：平面的グラフは必ず 4 彩色を持つ (四色定理 (Appel, Haken '77))

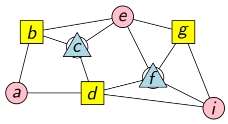
平面的グラフにおける 3 彩色問題の NP 完全性

定理 (Garey, Johnson, Stockmeyer '76)

平面的グラフにおける 3 彩色問題は NP 完全

これを証明するためには，次を証明すればよい

- 平面的グラフにおける 3 彩色問題が NP に所属すること
- 3 彩色問題が 平面的グラフにおける 3 彩色問題に
  多項式時間多対一帰着可能であること



平面的グラフにおける 3 彩色問題の NP 完全性：NP に所属すること

- 既に知っていること：
  入力を平面的グラフに限定しない 3 彩色問題は NP に所属する
- 事実：
  平面的グラフはグラフ
- この 2 つを組み合わせると：
  平面的グラフに入力を限定しても，3 彩色問題は NP に所属する

平面的グラフにおける 3 彩色問題の NP 完全性：帰着 (1)

3 彩色問題の入力は平面的グラフではないかもしれない

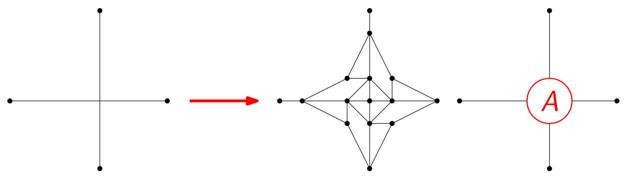
基本的な考え方

平面的ではないグラフ を 平面的グラフ に 変換する

⇝ 交差解消ガジェット (crossover gadget)

平面的グラフにおける 3 彩色問題：交差解消ガジェット (1)

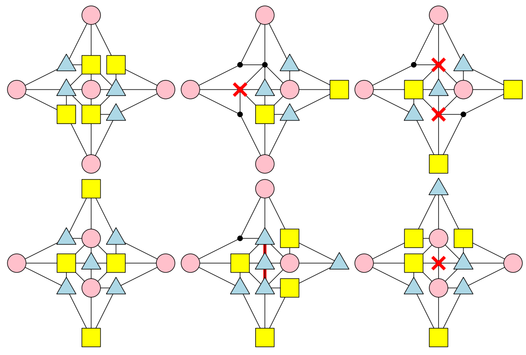
グラフの中に交差があったら，それを次のように置き換える



右のように「A」を使って，略記する

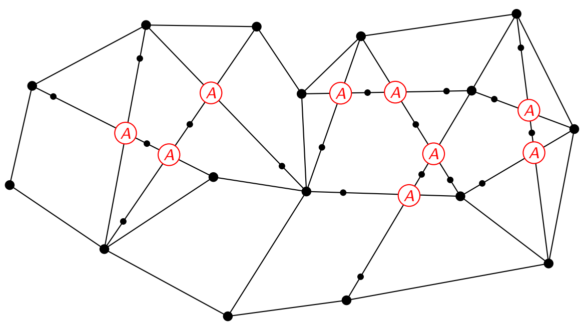
平面的グラフにおける 3 彩色問題：交差解消ガジェット (2)

置き換えた部分を 3 色でどのように塗れるか，考える



⇝ 「上と下」と「左と右」の色が同じでないと，3 色で塗れない

平面的グラフにおける 3 彩色問題：帰着 (2)



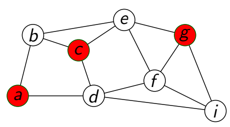
目次

平面的グラフにおける独立集合問題

平面的グラフにおける独立集合問題

- 入力：平面的グラフ G，自然数 $k \in \mathbb{N}$
- 出力：Yes か No
- 条件：G が要素数 k 以上の独立集合を持つ ⇒ Yes
  G が要素数 k 以上の独立集合を持たない ⇒ No

無向グラフ G の独立集合とは，G の頂点部分集合 S で
S のどの 2 頂点間にも辺が存在しないもの



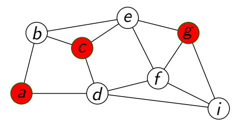
平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性

定理 (Garey, Johnson, Stockmeyer '76)

平面的グラフにおける独立集合問題は NP 完全

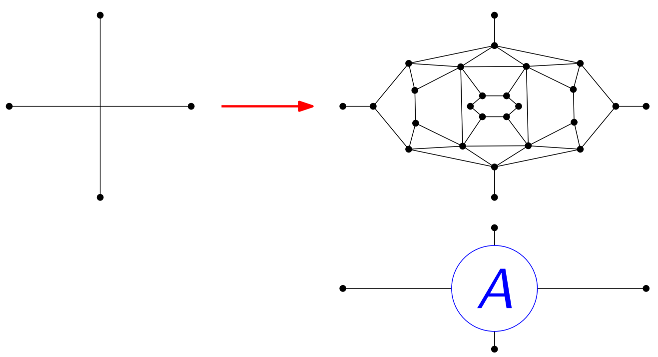
これを証明するためには，次を証明すればよい

- 平面的グラフにおける独立集合問題が NP に所属すること
  (平面的グラフにおける 3 彩色問題 と同様に証明できる)
- 独立集合問題が 平面的グラフにおける独立集合問題に
  多項式時間多対一帰着可能であること

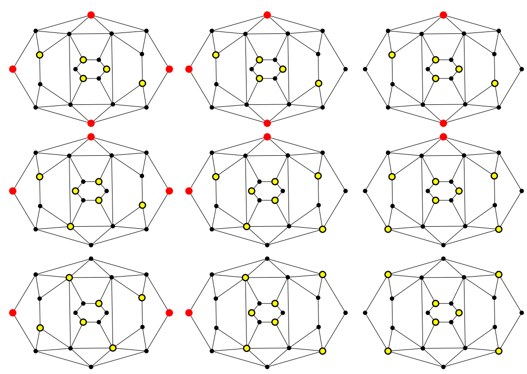


平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性：交差解消ガジェット (1)

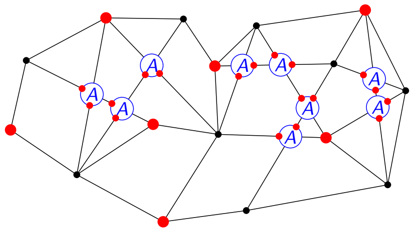
交差解消ガジェット



平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性：交差解消ガジェット (2)



平面的グラフにおける独立集合問題の NP 完全性：帰着



元のグラフに 要素数 k の独立集合が 存在する	$\Leftrightarrow$	構成した平面的グラフに 要素数 $k + 9c$ の独立集合が 存在する

(c は挿入した交差解消ガジェットの総数)

目次

平面的グラフに対する問題の NP 完全性を証明する方法

1. 交差解消ガジェットを用いて
   辺交差のある問題を辺交差のない問題に帰着する
2. 平面的充足可能性問題を用いて
   元々の帰着を辺交差のないものにする

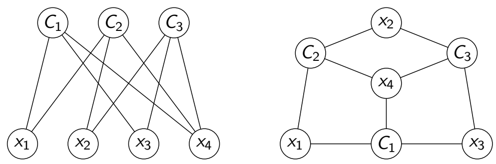
$$\begin{array}{ccc} \text{3-SAT} & \rightarrow & \text{平面的 3-SAT} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{独立集合問題} & \rightarrow & \text{平面的グラフにおける独立集合問題} \end{array}$$

平面的 3-SAT

平面的 3-SAT

- 入力：整数 $n \geq 1$，3-CNF 論理式 $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
  ただし，f の接続グラフは平面的グラフ
- 出力：Yes または No
- 条件：f が充足可能である $\Rightarrow$ Yes
  f が充足可能でない $\Rightarrow$ No

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$



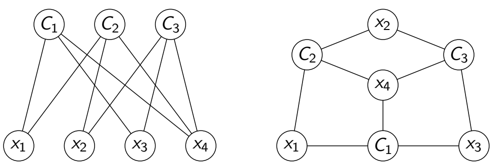
平面的 3-SAT の NP 完全性

定理 (Lichtenstein '82)

平面的 3-SAT は NP 完全

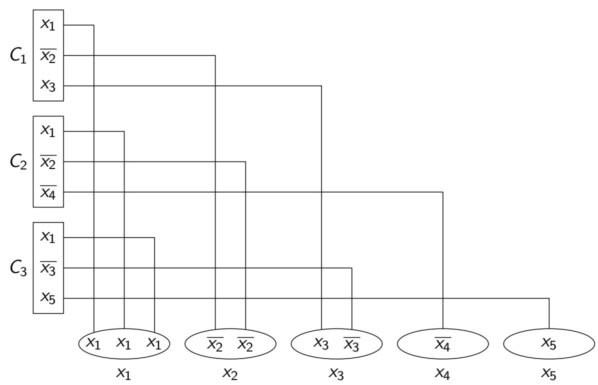
これを証明するためには，次を証明すればよい

- 平面的 3-SAT が NP に所属すること
  (平面的グラフにおける 3 彩色問題 と同様に証明できる)
- 3-SAT が 平面的 3-SAT に多項式時間多対一帰着可能であること

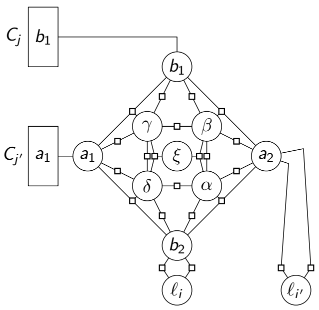


平面的 3-SAT の NP 完全性：帰着 (1)

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_5)}_{=C_3}$$

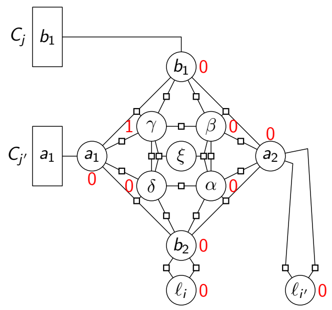


平面的 3-SAT の NP 完全性：交差解消ガジェット (1)



平面的 3-SAT の NP 完全性：交差解消ガジェット (2)

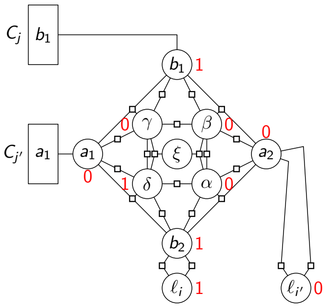
$\ell_i = 0$，$\ell_{i'} = 0$ のとき



- $b_2 \leftrightarrow \ell_i$，$a_2 \leftrightarrow \ell_{i'}$
- $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

平面的 3-SAT の NP 完全性：交差解消ガジェット (3)

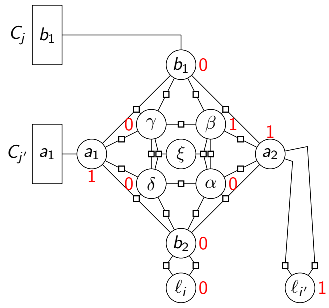
$\ell_i = 1$, $\ell_{i'} = 0$ のとき



- $b_2 \leftrightarrow \ell_i$, $a_2 \leftrightarrow \ell_{i'}$
- $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

平面的 3-SAT の NP 完全性：交差解消ガジェット (4)

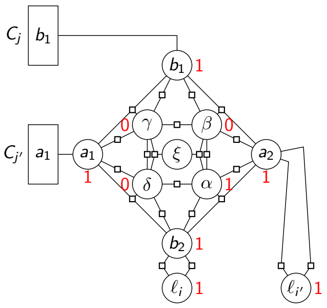
$\ell_i = 0$, $\ell_{i'} = 1$ のとき



- $b_2 \leftrightarrow \ell_i$, $a_2 \leftrightarrow \ell_{i'}$
- $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

平面的 3-SAT の NP 完全性：交差解消ガジェット (5)

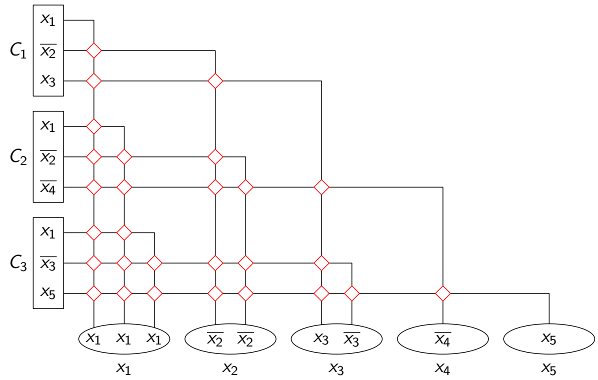
$\ell_i = 1$, $\ell_{i'} = 1$ のとき



- $b_2 \leftrightarrow \ell_i$, $a_2 \leftrightarrow \ell_{i'}$
- $\alpha \leftrightarrow (a_2 \wedge b_2)$
- $\beta \leftrightarrow (a_2 \wedge \overline{b_1})$
- $\gamma \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge \overline{b_1})$
- $\delta \leftrightarrow (\overline{a_1} \wedge b_2)$
- $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
- $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
- $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$
- $\overline{\gamma} \vee \overline{\delta}$
- $\overline{\delta} \vee \overline{\alpha}$

平面的 3-SAT の NP 完全性：帰着 (2)

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)}_{=C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_5)}_{=C_3}$$



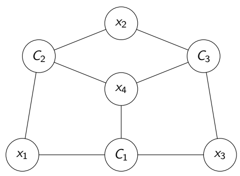
平面的グラフに対する問題の NP 完全性を証明する方法

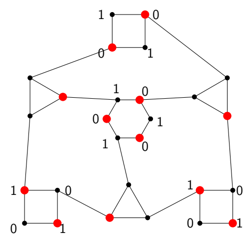
1. 交差解消ガジェットを用いて
   辺交差のある問題を辺交差のない問題に帰着する
2. 平面的充足可能性問題を用いて
   元々の帰着を辺交差のないものにする

3-SAT	→	平面的 3-SAT
↓		↓
独立集合問題	→	平面的グラフにおける独立集合問題

接続グラフを使って，3-SAT を独立集合問題に帰着する

$$f = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{=C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4})}_{=C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{=C_3}$$





f の節の数が m であるとき

f が充足可能 $\Leftrightarrow$ 要素数 $4m$ の独立集合がある

目次

今日の目標

今日の目標

平面性が関わる問題の NP 完全性を扱う
- 平面的グラフに関する問題
- 平面的充足可能性問題

鍵となる概念：交差解消ガジェット

次回の予告

計算幾何に関わる問題の NP 完全性 (NP 困難性) を扱う
- 平面的充足可能性問題 を帰着に用いる

文献案内

- M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified *NP*-complete graph problems. Theoretical Computer Science 1 (1976) pp. 237–267.
- D. Lichtenstein, Planar formulae and their uses. SIAM Journal on Computing 11 (1982) pp. 329–343.