

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019年12月10日

最終更新 : 2019年12月11日 13:06

- * 休み (大学院入学式) (10/1)
- 1 アルゴリズムの問題解決と計算複雑性 (10/8)
- 2 速習 P vs NP 問題 (10/15)
- * 休み (祝日) (10/22)
- 3 充足可能性問題とその変種 (10/29)
- 4 グラフに関する問題 (1) : 部分集合の選択 (11/5)
- 5 グラフに関する問題 (2) : 経路の選択 (11/12)
- 6 集合族に関する問題 (1) : グラフとの関連 (11/19)
- 7 集合族に関する問題 (2) : 発展 (11/26)

スケジュール 後半 (予定)

今日の目標

- 8 数値が関わる問題 (1) : 2分割問題 (12/3)
- 9 数値が関わる問題 (2) : 3分割問題 (12/10)
- 10 平面性が関わる問題 (12/17)
- * 冬期休業 (12/24, 31)
- 11 計算幾何学に関する問題 (1/7)
- 12 文字列に関する問題 (1/14)
- 13 アルゴリズム的問題解決 : 再考 (1/21)
- 14 予備 (1/28)
- * 休講 (2/4)
- * 祝日のため休み (2/11)

今日の目標

- ▶ 数値が関わる強 NP 完全問題を扱う
 - ▶ 基礎となる問題 : 3分割問題
 - ▶ スケジューリング問題
 - ▶ 3分割問題を用いた帰着

注意 : 予定の変更もありうる

自然数の入力法

弱多項式時間アルゴリズムと擬多項式時間アルゴリズム

自然数の符号化法 : 2種類

- ▶ 1進符号化 (unary encoding)
- ▶ 2進符号化 (binary encoding) ← 普通の入力法

10進	1進符号化	2進符号化
0	0	0
1	10	1
2	110	10
3	1110	11
4	11110	100
5	111110	101
6	1111110	110
7	11111110	111
8	111111110	1000

自然数 a を符号化するとき,
 ▶ 1進符号化のサイズ = $O(a)$
 ▶ 2進符号化のサイズ = $O(\log a)$
 つまり, 2つの符号化法の間で
 サイズが指数関数的に異なる

数値を入力 (の一部) とする問題に対して

- ▶ **弱多項式時間アルゴリズム** (weakly polynomial-time algorithm) とは, 入力数値が2進符号化されるとき, 多項式時間で実行できるアルゴリズム
- ▶ **擬多項式時間アルゴリズム** (pseudo-polynomial-time algorithm) とは, 入力数値が1進符号化されるとき, 多項式時間で実行できるアルゴリズム

例 : 入力数値が自然数 a_1, a_2, \dots, a_n であるとき,

- ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(\sum_{i=1}^n \log a_i\right)$: 弱多項式時間アルゴリズム
 - ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)$: 擬多項式時間アルゴリズム
- 2進符号化だと, 指数時間

強多項式時間アルゴリズム

3つの多項式時間アルゴリズムの比較

数値を入力 (の一部) とする問題に対して

- ▶ **強多項式時間アルゴリズム** (strongly polynomial-time algorithm) とは, 数値の総数の多項式時間で実行できるアルゴリズム

例 : 入力数値が自然数 a_1, a_2, \dots, a_n であるとき,

- ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(\sum_{i=1}^n \log a_i\right)$: 弱多項式時間アルゴリズム
- ▶ 最悪時実行時間 = $O(n^2)$: 強多項式時間アルゴリズム

例 : 入力数値が自然数 a_1, a_2, \dots, a_n であるとき,

- ▶ 最悪時実行時間 = $O(n^2)$: 強多項式時間アルゴリズム
- ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(\sum_{i=1}^n \log a_i\right)$: 弱多項式時間アルゴリズム
- ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)$: 擬多項式時間アルゴリズム

普通の入力法 (つまり, 2進符号化) において

- ▶ 強多項式時間アルゴリズム, 弱多項式時間アルゴリズムは 多項式時間アルゴリズム
- ▶ 擬多項式時間アルゴリズムは 指数時間アルゴリズム

速さの直感 : 強多項式時間 > 弱多項式時間 > 擬多項式時間

数値を入力 (の一部) とする問題 P に対して

- ▶ 問題 P が弱 NP 完全 (weakly NP-complete) であるとは、入力数値が 2 進符号化されるときに、NP 完全であること
- ▶ 問題 P が強 NP 完全 (strongly NP-complete) であるとは、入力数値が 1 進符号化されるときに、NP 完全であること

$P \neq NP$ であるとき、

- ▶ 問題 P が弱 NP 完全である \Rightarrow
 - ▶ P を解く弱多項式時間アルゴリズムは存在しない
 - ▶ (P を解く擬多項式時間アルゴリズムは存在するかもしれない)
- ▶ 問題 P が強 NP 完全である \Rightarrow
 - ▶ P を解く擬多項式時間アルゴリズムは存在しない
 - ▶ (つまり、P を解く弱多項式時間アルゴリズムも存在しない)

2 分割問題：再掲

2 分割問題 (2-partition problem, 分割問題とも呼ばれる)

- ▶ 入力: n 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力: Yes か No
- ▶ 条件: $\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \notin X} a_i$ となる $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ が存在する \Rightarrow Yes
- ▶ $\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \notin X} a_i$ となる $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ が存在しない \Rightarrow No

a_1 3
 a_2 7
 a_3 2
 a_4 4
 a_5 3
 a_6 2
 a_7 1
 和 22

これは Yes 入力: $X = \{1, 2, 7\}$ が解

- ▶ $\sum_{i \in X} a_i = a_1 + a_2 + a_7 = 3 + 7 + 1 = 11$
- ▶ $\sum_{i \notin X} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 4 + 3 + 2 = 11$

注: 2 分割問題は「同じ和をもつ 2 つの部分」に分割する

目次

- 1 前回の復習
- 2 数値に関わる問題：3 分割問題
- 3 強 NP 完全性の証明法
- 4 数値に関わらない問題への帰着
- 5 今日のまとめ と 次回予告

3 分割問題 (2)

3 分割問題 (3-partition problem)

- ▶ 入力: $3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
- ▶ ただし、各 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して、次を満たす

$$\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$$

$n = 4$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24

$$\sum_{i=1}^{3n} a_i = 248, \quad \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i = 15.5, \quad \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i = 31$$

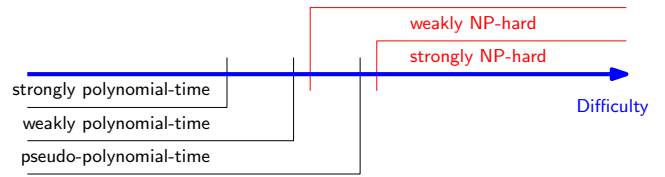
アルゴリズムの速さに対する直感

強多項式時間 > 弱多項式時間 > 擬多項式時間

問題の難しさに対する直感

弱 NP 完全 < 強 NP 完全

$P \neq NP$ であるとき



2 分割問題の弱 NP 完全性

定理

(Karp '72)

2 分割問題は弱 NP 完全

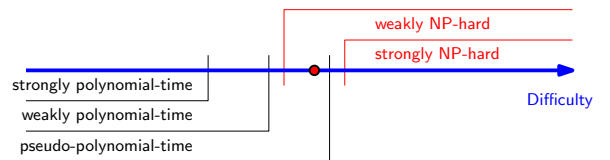
証明はややこしいので、省略

事実

(Bellman '56, Dantzig '57)

2 分割問題を解く擬多項式時間アルゴリズムが存在する

- ▶ 最悪時実行時間 = $O\left(n \sum_{i=1}^n a_i\right)$ (動的計画法の典型例)



3 分割問題 (1)

3 分割問題は、自然数の集合を要素数が 3 の集合に分割する問題

3 分割問題 (3-partition problem)

- ▶ 入力: $3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
- ▶ ただし、各 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して、次を満たす

$$\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$$

- ▶ 出力: Yes か No
- ▶ 条件: $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように、 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる \Rightarrow Yes
- ▶ $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できない \Rightarrow No

3 分割問題 (3)

3 分割問題 (3-partition problem)

- ▶ 出力: Yes か No
- ▶ 条件: $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように、 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる \Rightarrow Yes
- ▶ $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できない \Rightarrow No

$n = 4$

これは Yes 入力

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24

- ▶ $X_1 = \{1, 3, 4\}$ $a_1 + a_3 + a_4 = 19 + 25 + 18 = 62$
- ▶ $X_2 = \{2, 7, 11\}$ $a_2 + a_7 + a_{11} = 22 + 19 + 21 = 62$
- ▶ $X_3 = \{5, 6, 8\}$ $a_5 + a_6 + a_8 = 17 + 21 + 24 = 62$
- ▶ $X_4 = \{9, 10, 12\}$ $a_9 + a_{10} + a_{12} = 20 + 18 + 24 = 62$

3分割問題 (3-partition problem)

- ▶ 入力: $3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
ただし, 各 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して, 次を満たす

$$\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$$

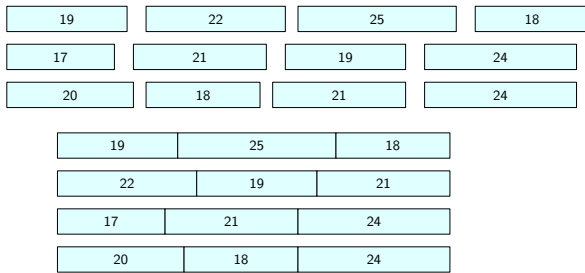
- ▶ 条件: $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように, ...

注: X_1, X_2, \dots, X_n の要素数はどれも 3

- ▶ X_j の要素数が 2 以下だと, $\sum_{i \in X_j} a_i < 2 \cdot \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$

3分割問題: イメージ

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	19	22	25	18	17	21	19	24	20	18	21	24



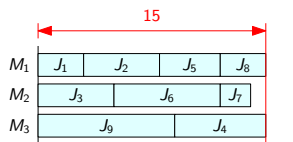
目次

- 1 前回の復習
- 2 数値が関わる問題: 3分割問題
- 3 強 NP 完全性の証明法
- 4 数値が関わらない問題への帰着
- 5 今日のまとめ と 次回の予告

スケジューリング問題: 最終完了時刻最小化

よくある目的: 最小完了時刻 (makespan) の最小化

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4, \\ p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



3分割問題 (3-partition problem)

- ▶ 入力: $3n$ 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{3n} \in \mathbb{N}$
ただし, 各 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して, 次を満たす

$$\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i < a_j < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$$

- ▶ 条件: $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように, ...

注: X_1, X_2, \dots, X_n の要素数はどれも 3

- ▶ X_j の要素数が 4 以上だと, $\sum_{i \in X_j} a_i > 4 \cdot \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{3n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$

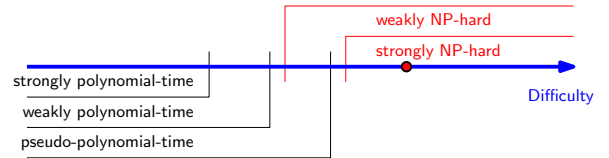
3分割問題の強 NP 完全性

定理

(Garey, Johnson '75)

3分割問題は強 NP 完全

証明はややこしいので, 省略



スケジューリング問題: イメージ

このような図をガント・チャート (Gantt chart) と呼ぶことがある

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 6, \quad p_5 = 4, \\ p_6 = 7, \quad p_7 = 2, \quad p_8 = 3, \quad p_9 = 9$$



最終完了時刻最小化問題

同一機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題

- ▶ 入力: 自然数 $m \in \mathbb{N}$, m 個の同一機械, n 個のジョブ J_1, \dots, J_n 各ジョブ J_i の処理時間 $p_i \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力: m 個の機械へのスケジューリング (割り込みなし)
- ▶ 評価: 最終完了時刻の最小化

同一機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題

(判定問題版)

- ▶ 入力: 自然数 $m \in \mathbb{N}$, m 個の同一機械, n 個のジョブ J_1, \dots, J_n 各ジョブ J_i の処理時間 $p_i \in \mathbb{N}$, 期限 $T \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: 最終完了時刻が T 以下のスケジューリングがある \Rightarrow Yes
最終完了時刻が T 以下のスケジューリングがない \Rightarrow No

定理 (Garey, Johnson '75)

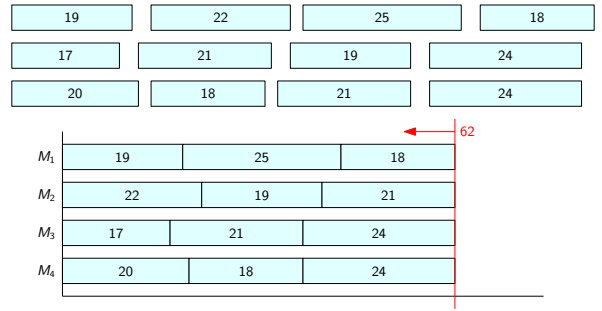
同一機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) は強 NP 完全

参考: 定理 (Garey, Johnson '79)

$m \geq 2$ のとき, 同一 m 機械スケジューリングにおける最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) は弱 NP 完全

定理を証明するためには, 次を証明すればよい

- ▶ 入力数値が 1 進符号化されるとき, 最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは 部分和問題と同様に 証明できる)
- ▶ 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が 入力数値が 1 進符号化された最終完了時刻最小化問題 (判定問題版) に 多項式時間多対一帰着可能であること



最終完了時刻最小化問題の強 NP 完全性: 多項式時間多対一帰着 (2)

3 分割問題の入力から最大完了時刻最小化問題の入力を構成

- ▶ 機械の数は n
- ▶ ジョブの数は $3n$ で, すべての $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して, $p_i = a_i$
- ▶ $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ (この構成は多項式時間で可能)

このとき, 次の 2 つは同値

- ▶ $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように, $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる
- ▶ 各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して 機械 M_j に $\{J_i \mid i \in X_j\}$ を割り当てると最大完了時刻が T となる □

箱詰め問題 (ビン・パッキング問題)

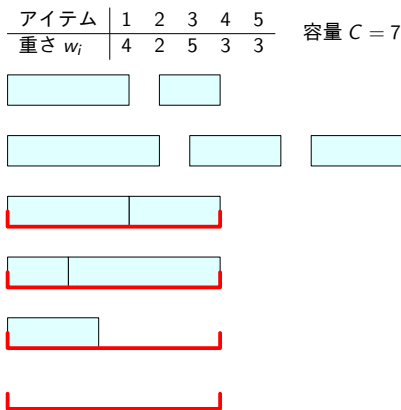
箱詰め問題: ナップサック問題に似ているが, すべて詰める そのため, ナップサックの個数を最小化

箱詰め問題 (bin packing problem)

- ▶ 入力: n 個のアイテム $\{1, 2, \dots, n\}$ 各アイテム i の重さ $w_i \in \mathbb{N}$, 箱の容量 $C \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力: $\sum_{i \in X_j} w_i \leq C$ を満たす $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割 X_1, X_2, \dots, X_k
- ▶ 評価: k の最小化

アイテム	1	2	3	4	5	最適解は $k = 3$
重さ w_i	4	2	5	3	3	

箱詰め問題: イメージ



箱詰め問題 (判定問題版)

箱詰め問題 (判定問題版)

- ▶ 入力: n 個のアイテム $\{1, 2, \dots, n\}$ 各アイテム i の重さ $w_i \in \mathbb{N}$, 箱の容量 $C \in \mathbb{N}$, 箱の総数 $k \in \mathbb{N}$
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: $\sum_{i \in X_j} w_i \leq C$ を満たす $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割 X_1, X_2, \dots, X_k がある \Rightarrow Yes
ない \Rightarrow No

アイテム	1	2	3	4	5	これは Yes 入力
重さ w_i	4	2	5	3	3	

箱詰め問題の強 NP 完全性

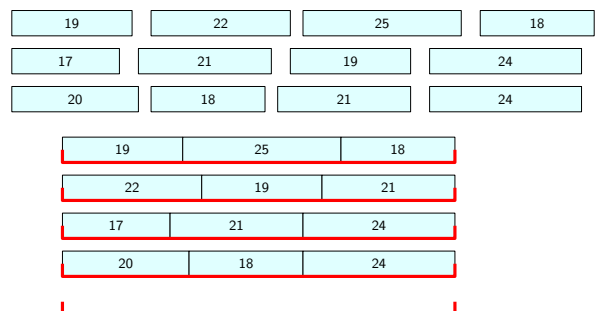
定理 (Garey, Johnson '79)

箱詰め問題 (判定問題版) は強 NP 完全

定理を証明するためには, 次を証明すればよい

- ▶ 入力数値が 1 進符号化されるとき, 箱詰め問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは 部分和問題と同様に 証明できる)
- ▶ 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が 入力数値が 1 進符号化された箱詰め問題 (判定問題版) に 多項式時間多対一帰着可能であること

箱詰め問題の強 NP 完全性: 多項式時間多対一帰着 (1)



3 分割問題の入力から箱詰め問題の入力を構成

- ▶ アイテムの数は $3n$ で、すべての $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ に対して、 $w_i = a_i$
- ▶ $C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i, k = n$ (この構成は多項式時間で可能)

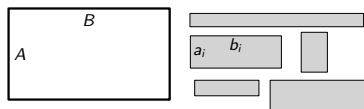
このとき、次の 2 つは同値

- ▶ $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように、 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる
- ▶ k 個の箱にすべてのアイテムを詰められる □

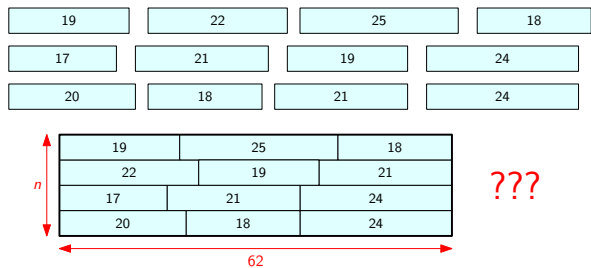
長方形への長方形の充填問題

長方形への長方形の充填問題 (rectangle packing problem into a rectangle)

- ▶ 入力: $2(n+1)$ 個の正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, A, B$
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: $a_i \times b_i$ の長方形 ($i = 1, 2, \dots, n$) を $A \times B$ の長方形の中に重なりなく配置できる \Rightarrow Yes
重なりなく配置できない \Rightarrow No



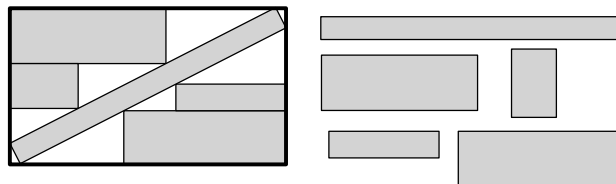
長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (1)



回転を許さないように、長方形の幅を伸ばす

目次

- 1 前回の復習
- 2 数値に関わる問題：3 分割問題
- 3 強 NP 完全性の証明法
- 4 数値に関わらない問題への帰着
- 5 今日のまとめ と 次回の予告

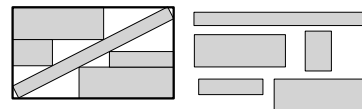


長方形への長方形の充填問題：NP 困難性

定理 (Demaine, Demaine '07)

長方形への長方形の充填問題は強 NP 困難

注: 「NP 完全」であるかどうかは未解決



定理を証明するためには、次を証明すればよい

- ▶ 入力数値が 1 進符号化された 3 分割問題が
入力数値が 1 進符号化された長方形への長方形の充填問題に多項式時間多対一帰着可能であること

長方形への長方形の充填問題：多項式時間多対一帰着 (2)

3 分割問題の入力から長方形への長方形の充填問題の入力を構成

- ▶ $a_i = a'_i + n, b_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$
- ▶ $A = 3n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a'_i, B = n$ (この構成は多項式時間でできる)

このとき、次の 2 つは同値

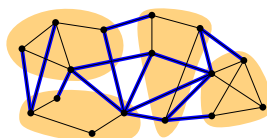
- ▶ $\sum_{i \in X_j} a'_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a'_i$ となるように、 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる
- ▶ $a_i \times b_i$ の長方形 ($i = 1, 2, \dots, n$) を $A \times B$ の長方形の中に重なりなく配置できる □

グラフの最小 k 等分割問題

グラフの最小 k 等分割問題 (最適化問題)

- ▶ 入力: 自然数 $k \in \mathbb{N}$, 無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし, k は $|V|$ の約数)
- ▶ 出力: V の k 等分割 $V_1, V_2, \dots, V_k (|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|)$
- ▶ 評価: $\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)|$ の最小化

ここで, $E(V_i, V_j) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V_i, v \in V_j\}$



- ▶ $|V| = 16, k = 4$
- ▶ $\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| = 15$

グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版)

- ▶ 入力: 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$
無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし, k は $|V|$ の約数)
- ▶ 出力: Yes または No
- ▶ 条件: $\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| \leq \ell$ となる V の k 等分割 V_1, V_2, \dots, V_k が存在する \Rightarrow Yes
存在しない \Rightarrow No

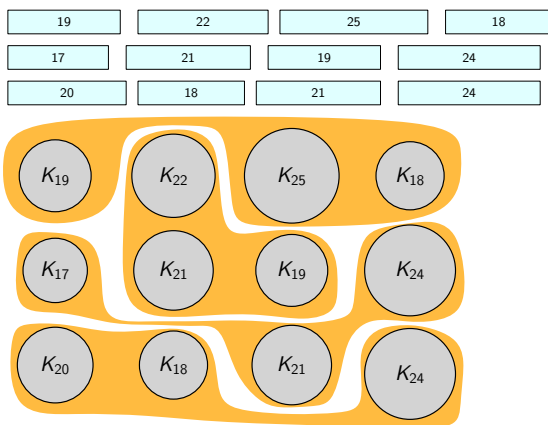
定理 (Eppstein, Feigenbaum, Li '91)

グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) は NP 完全

定理を証明するためには, 次を証明すればよい

- ▶ グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) が NP に所属すること (これは 独立集合問題 と同様に証明できる)
- ▶ 入力数値が **1 進符号化された** 3 分割問題が グラフの最小 k 等分割問題 (判定問題版) に 多項式時間多対一帰着可能であること

グラフの最小 k 等分割問題の NP 完全性: 多項式時間多対一帰着 (1)



グラフの最小 k 等分割問題の NP 完全性: 多項式時間多対一帰着 (2)

3 分割問題の入力から最小 k 等分割問題の入力を構成

- ▶ 頂点数は $\sum_{i=1}^{3n} a_i$ で, $3n$ 個の連結成分を持つ
 - ▶ i 個目の連結成分は 完全グラフ K_{a_i}
 - ▶ $k = n$, $\ell = 0$ (この構成は多項式時間で行える)
- このとき, 次の 2 つは同値
- ▶ $\sum_{i \in X_j} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} a_i$ となるように, $\{1, 2, \dots, 3n\}$ を X_1, X_2, \dots, X_n に分割できる
 - ▶ $\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} |E(V_i, V_j)| \leq 0$ となる V の k 等分割 V_1, V_2, \dots, V_k が存在する □

目次

- 1 前回の復習
- 2 数値が関わる問題: 3 分割問題
- 3 強 NP 完全性の証明法
- 4 数値が関わらない問題への帰着
- 5 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

- ▶ 数値が関わる強 NP 完全問題を扱う
 - ▶ 基礎となる問題: 3 分割問題
 - ▶ スケジューリング問題
 - ▶ 3 分割問題を用いた帰着

ここまでで, 基礎的な部分が終了

次回の予告

平面性が関わる問題の NP 完全性を扱う

- ▶ 平面的グラフに関する問題
- ▶ 平面的充足可能性問題

鍵となる概念: 交差解消ガジェット

文献案内

- ▶ E. D. Demaine, M. L. Demaine, Jigsaw puzzles, edge matching, and polyomino packing: connections and complexity. *Graphs and Combinatorics* 23, Supplement (2007) pp. 195–208.
- ▶ D. Eppstein, J. Feigenbaum, C.-L. Li, Equipartitions of graphs. *Discrete Mathematics* 91 (1991) pp. 239–248.
- ▶ M. Garey, D. Johnson, Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints. *SIAM Journal on Computing* 4 (1975) pp. 397–411.
- ▶ M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., 1979.
- ▶ R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. In: R. E. Miller, J. W. Thatcher, J. D. Bohlinger (eds.), *Complexity of Computer Computations*. New York, Plenum (1972) pp. 85–103.