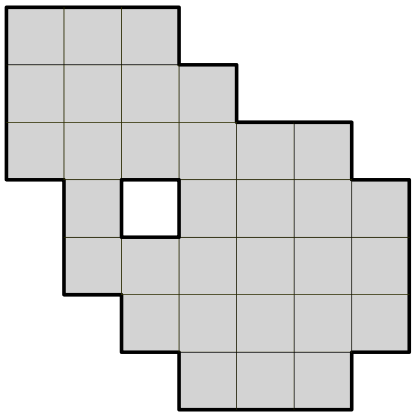
グラフとネットワーク　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2019 年 6 月 7 日
中間試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

13:00–14:30．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　次の灰色の部分で表された盤面に 1×2 の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで，この盤面全体を敷き詰めることができるだろうか？ 理由も付けて答えよ．



問題 2　連結無向グラフ $G = (V, E)$ において，すべての頂点の次数は 1 か 4 であるとする．次数が 1 である頂点の総数を n，次数が 4 である頂点の総数を m とする (n と m は 0 以上の整数である)．以下の問いに答えよ．

1. G が木であるとき，$|V| = 3m + 2$ が成り立つことを証明せよ．
2. 連結無向グラフ G が木ではないとき，$|V| < 3m + 2$ が成り立つことを証明せよ．

問題 3　頂点数が有限である任意の無向グラフ G と任意の自然数 $k \geq 2$ を考える．問題中，$\delta(G)$ は G の最小次数を表す．

1. $\delta(G) \geq k$ ならば，G が頂点数 $k + 1$ 以上の閉路を含むことを証明せよ．(ヒント：G における長さ最大の<u>道</u>を考えよ．)
2. 「$\delta(G) \geq k$ ならば，G が頂点数 $k + 2$ 以上の閉路を含む」という命題は成り立たない．任意の $k \geq 2$ に対して，反例を挙げよ．(それが，なぜ反例であるのかも説明せよ．)

問題 4　すべての頂点の次数が偶数であるような連結無向グラフ G を考える．このとき，G が切断辺を持たないことを証明せよ．

以上