グラフとネットワーク　第 13 回
平面グラフ：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 7 月 26 日

最終更新：2019 年 7 月 26 日　14:03

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)

* 休み (5/3)
* 休講 (5/10)

4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)

- 中間試験 (6/7)

スケジュール 後半

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) ← 行わない (8/2)

- 期末試験 (8/9)

期末試験

- 日時，教室：8 月 9 日 (金) 13:00–14:30 @ 西 2 号館 101 教室
- 出題範囲
  - 第 6 回講義スライドの最初から第 13 回講義スライドの最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の目標

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- 地図の彩色
- 美術館の監視

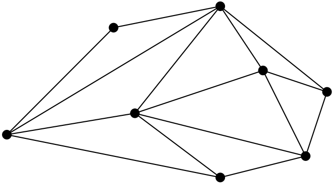
目次

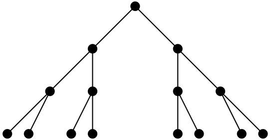
グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは，G の描画で，
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと





平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

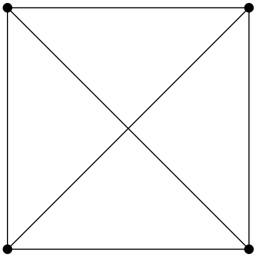
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

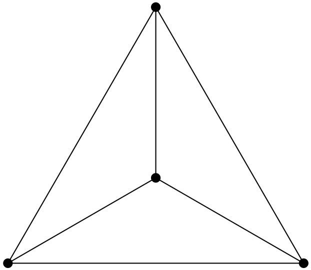
定義：平面的グラフとは？

G が平面的グラフであるとは，G が平面描画を持つこと

例：K_4 は平面的グラフである



K_4 の非平面描画



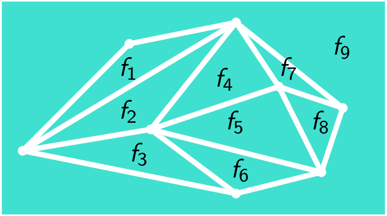
K_4 の平面描画

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

定義：平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

オイラーの公式

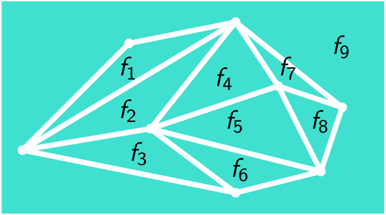
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

性質：オイラーの公式

G の頂点数が n，辺数が m，面数が f，連結成分数が k のとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

特に，G が連結ならば，$k = 1$ なので，$n - m + f = 2$



- $n = 8$
- $m = 15$
- $f = 9$
- $k = 1$
- $n - m + f = 2$

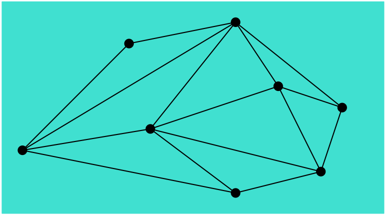
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

性質：平面的グラフの辺数は小さい

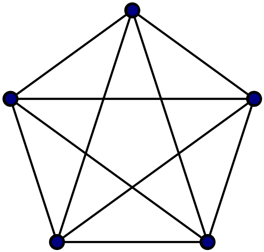
G が平面的で，$|V| \geq 3$ ならば，

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- $|V| = 8$
- $3|V| - 6 = 18$
- $|E| = 15$

このグラフは平面的グラフか?: 証明

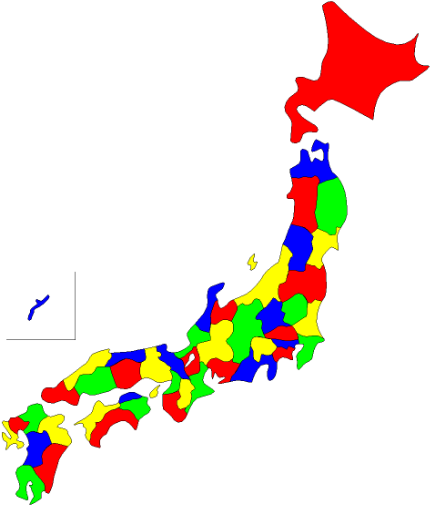


平面的ではない

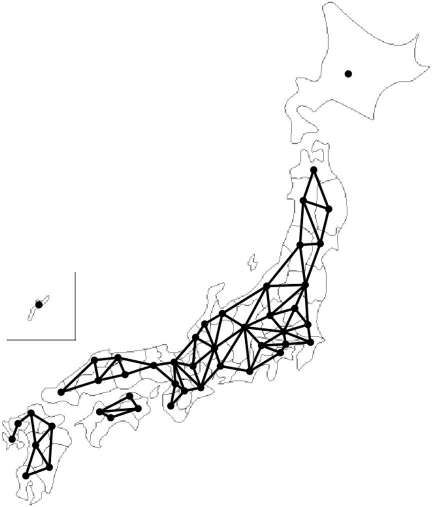
- 頂点数 $|V|$ は 5，辺数 $|E|$ は 10
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- $\therefore$ $|E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので，平面的グラフではない $\square$

目次

地図の彩色

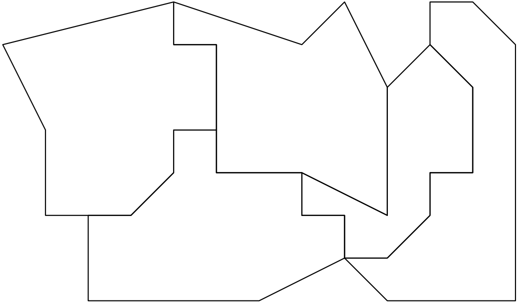


地図からグラフへ



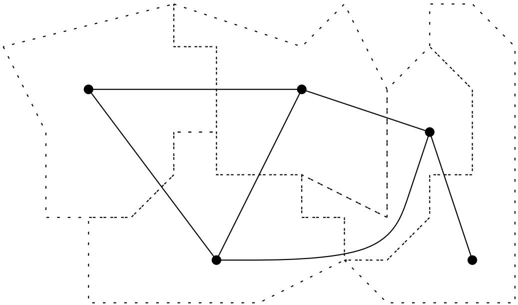
地図の数学的モデル化

地図は，平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



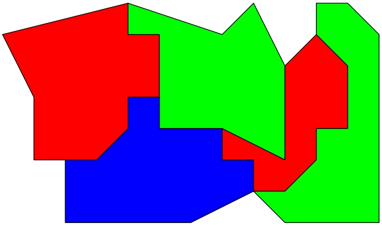
双対グラフ

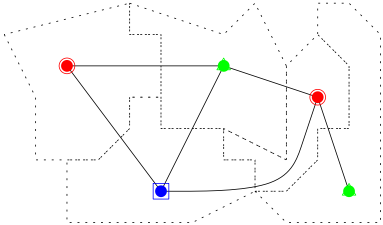
領域分割の双対グラフとは，無向グラフで
各頂点が分割された部分領域に対応し，
各辺が境界を (1 次元的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの



地図の彩色

地図の彩色 = その双対グラフの彩色

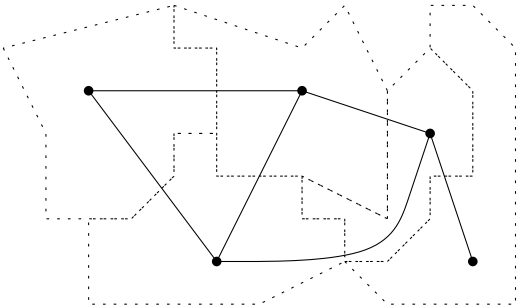




双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

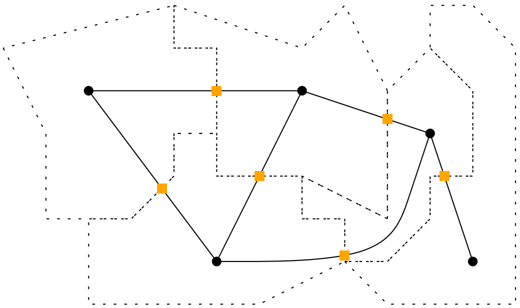


つまり，平面的グラフの彩色ができれば，地図の彩色もできる

双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

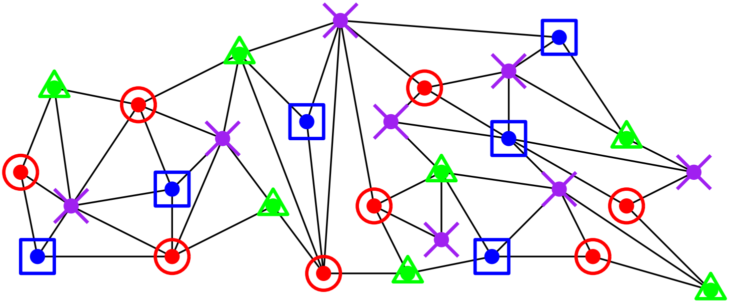


つまり，平面的グラフの彩色ができれば，地図の彩色もできる

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

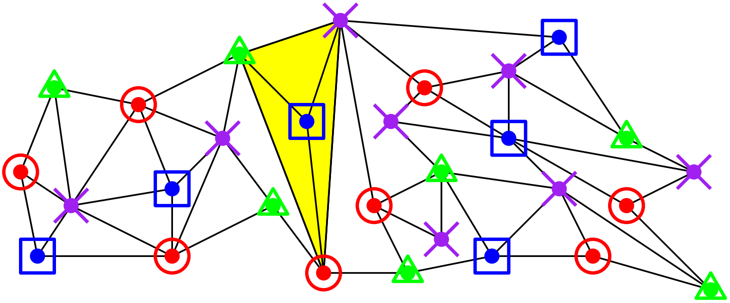


4 色必要とする平面的グラフは存在

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

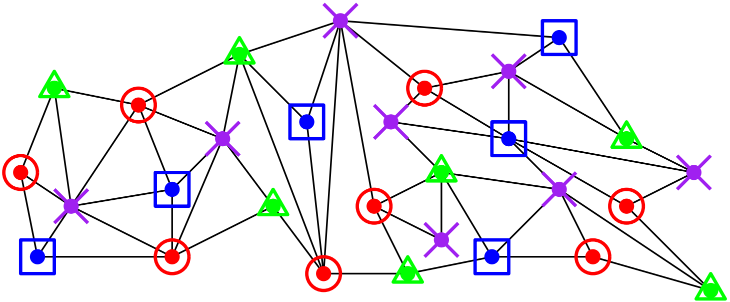


4 色必要とする平面的グラフは存在

四色定理

四色定理 (Appel, Haken ’77)

任意の平面的グラフは 4 彩色可能

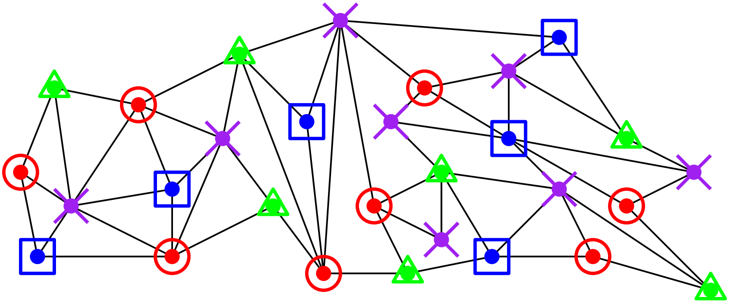


証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

四色定理はこの講義で証明できないので…

今から証明すること：六色定理

任意の平面的グラフは 6 彩色可能



使用する道具は，オイラーの公式と帰納法のみ

六色定理：証明 (1)

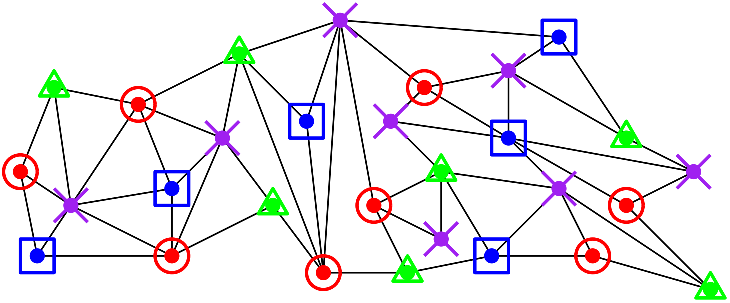
証明：頂点数 n に関する帰納法

- 頂点数が 6 以下のとき，頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- 頂点数 $n \geq 6$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- このとき，頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

六色定理：証明 (2) — 補題

補題

平面的グラフには，必ず次数が 5 以下の頂点が存在する



六色定理：証明 (3) — 補題

補題

平面的グラフには，必ず次数が 5 以下の頂点が存在する

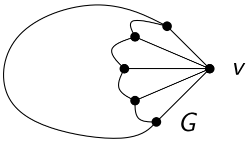
補題の証明：

- 頂点数が 3 未満のとき，すべての頂点の次数は 2 以下なので，正しい
- 頂点数が 3 以上である任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ を考える
- $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (オイラーの公式の帰結)
- G の平均次数 $= \dfrac{2|E|}{|V|}$ (握手補題の帰結)
- $\therefore$ G の平均次数 $\leq \dfrac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \dfrac{12}{|V|} < 6$
- $\therefore$ ある頂点の次数 < 6
- $\therefore$ ある頂点の次数 ≤ 5 □

六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G=(V,E)$ とする

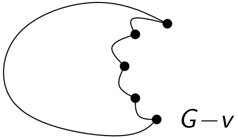
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G=(V,E)$ とする

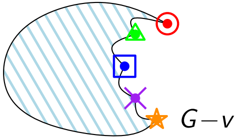
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G=(V,E)$ とする

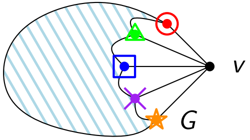
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える
- $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能 ($\because$ 帰納法の仮定)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

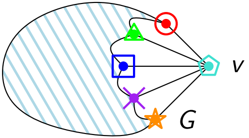
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える
- $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能 ($\because$ 帰納法の仮定)
- $G-v$ の 6 彩色において，v の (G における) 隣接頂点を見ると高々5 色しか使われてない ($\because$ v の次数 ≤ 5)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

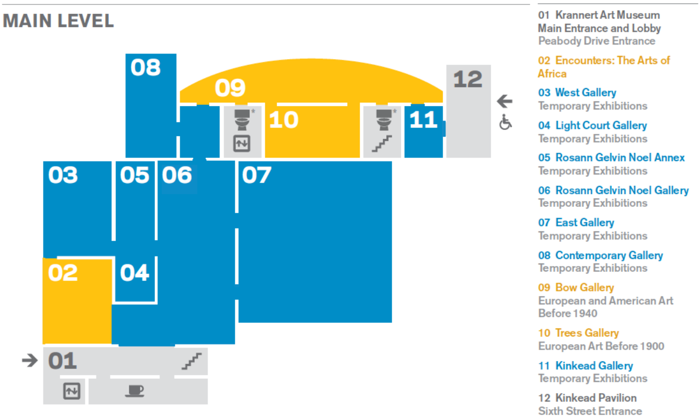
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G - v$ を考える
- $G - v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能
  (∵ 帰納法の仮定)
- $G - v$ の 6 彩色において，v の (G における) 隣接頂点を見ると
  高々5 色しか使われてない (∵ v の次数 ≤ 5)
- すなわち，$G - v$ の 6 彩色に，v を付け加えて，
  v の隣接頂点で使われていない色を
  $G - v$ の 6 彩色で使ったパレットから選び
  その色で v を塗ることにより，G の 6 彩色が得られる □



目次

監視カメラの設置

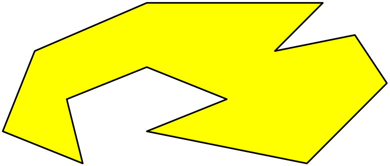
360 度見渡せる監視カメラを何個設置すれば，隈なく監視できるのか？



https://kam.illinois.edu/files/Map-main-f2017.png

単純多角形

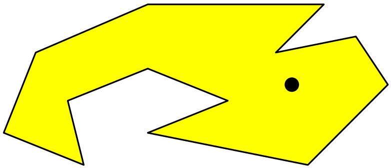
単純多角形：自己交差を持たず，穴も持たない多角形



これが美術館の１つのフロアを表していると思う

単純多角形における監視員

監視員は点

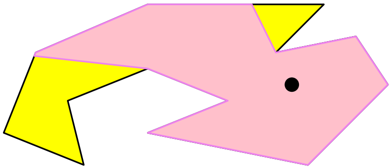


監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形における監視員

監視員は点

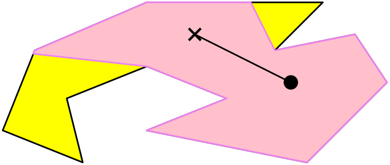


監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形における監視員

監視員は点



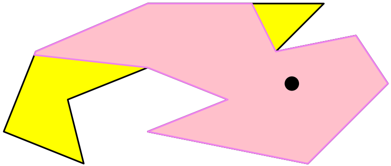
監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる



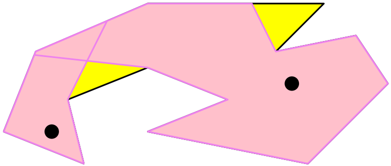
目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる



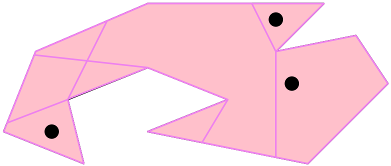
目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる

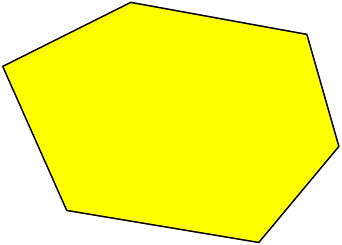


目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

簡単な場合：凸多角形の監視

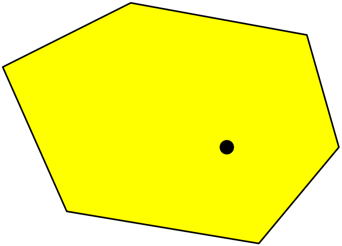
凸多角形は１人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

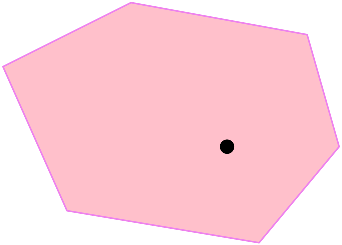
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

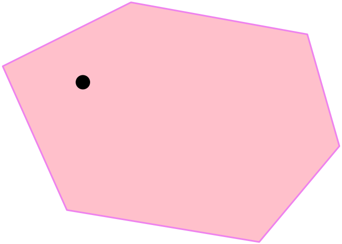
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

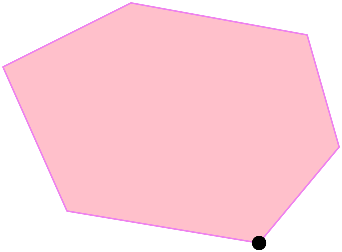
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

凸多角形は 1 人で監視できる



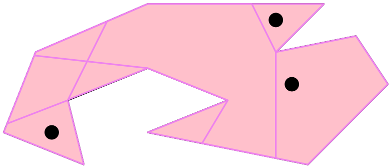
監視員は多角形のどこに置いてもよい

単純多角形の監視：定理

美術館定理 (Chvátal '75)

頂点数 n の任意の単純多角形は，高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で監視可能

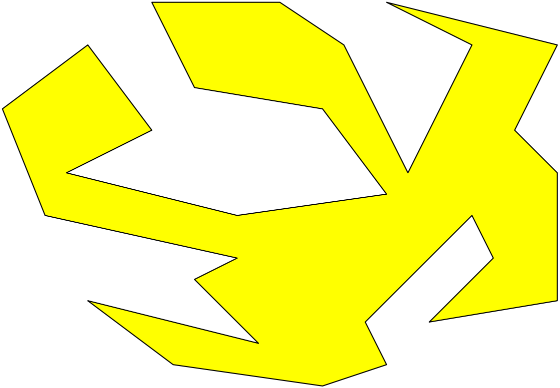
例：$n = 13$，$\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



今から行う証明は Fisk ('78) による

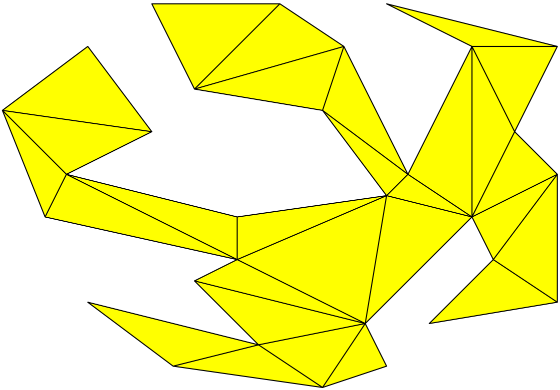
単純多角形の監視：証明

基本的なアイディア：単純多角形の三角形分割



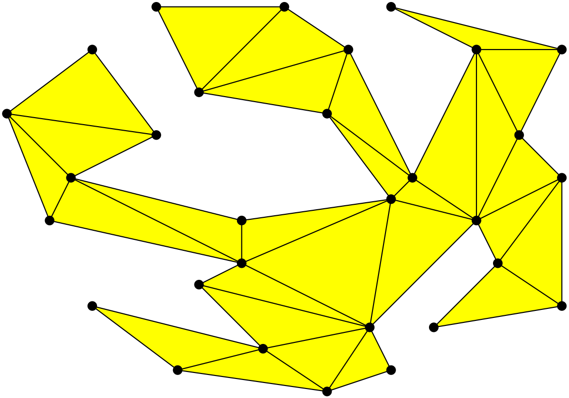
単純多角形の監視：証明

基本的なアイディア：単純多角形の三角形分割



単純多角形の監視：証明

三角形分割をグラフであると見なす



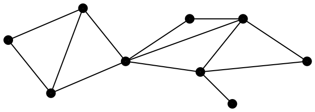
これは外平面グラフ (すべての頂点が外面の境界上にある)

グラフの外平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの外平面描画とは？

グラフ G の外平面描画とは，G の平面描画で，
すべての頂点が外面に現れているもの



外平面描画のことを外平面グラフとも呼ぶ

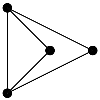
外平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

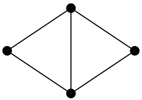
外平面的グラフとは？

G が**外平面的グラフ**であるとは，G が外平面描画を持つこと

例：次のグラフは外平面的グラフである



平面描画だが
外平面描画ではない



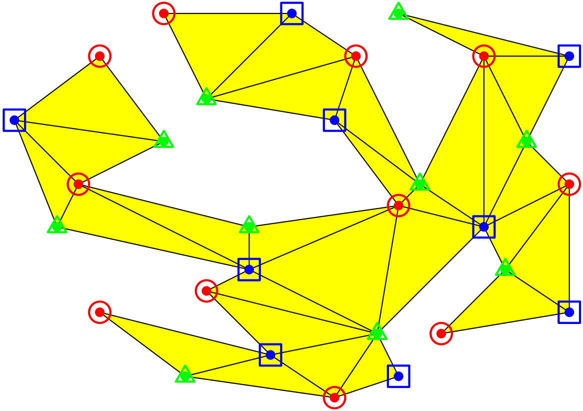
外平面描画

外平面的グラフの彩色

補題 (演習問題)

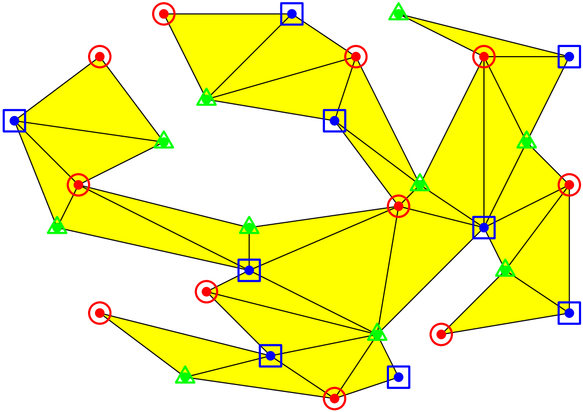
頂点数 n の任意の外平面的グラフは 3 彩色可能

ヒント：四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



三角形分割の彩色

三角形分割における各三角形には 3 色すべて現れている

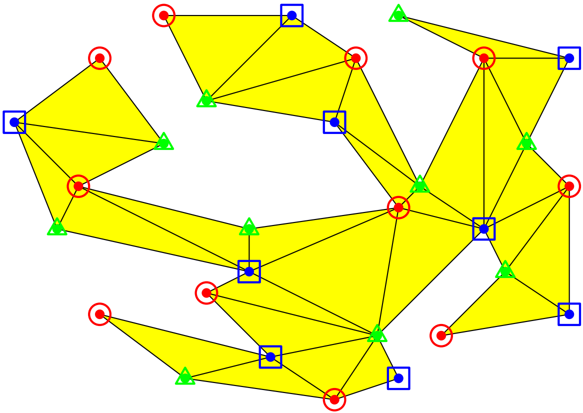


総頂点数 $= 30$,

●赤頂点数 $= 11$, ■青頂点数 $= 9$, ▲緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$

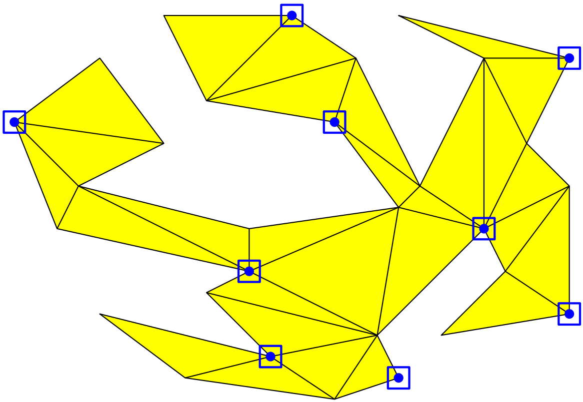


総頂点数 $= 30$,

●赤頂点数 $= 11$, ■青頂点数 $= 9$, ▲緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

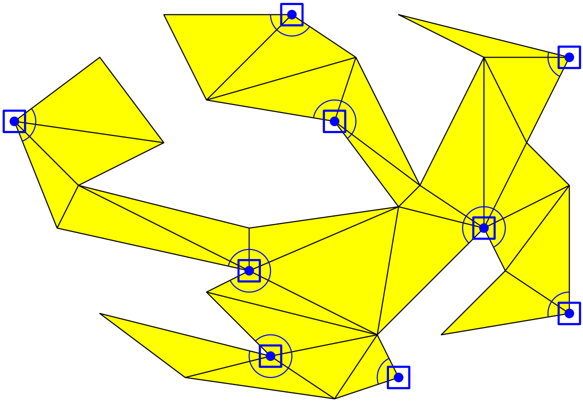
最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$



総頂点数 $= 30$,
●赤頂点数 $= 11$, ■青頂点数 $= 9$, ▲緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



- 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- すなわち，多角形全体が監視できる

□

目次

概要

今日のまとめ

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- 地図の彩色
- 美術館の監視

概要

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

残った時間の使い方

- 授業評価アンケート
  - 科目番号：1120
  - 科目名：グラフとネットワーク，教員名：岡本
- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 今日のまとめ と 講義全体のまとめ