

グラフとネットワーク 第 10 回
彩色：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 7 月 5 日

最終更新：2019 年 7 月 2 日 15:25

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/12) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/19) |
| 3 | 木：数理 | (4/26) |
| * | 休み | (5/3) |
| * | 休講 | (5/10) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/17) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/24) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/31) |
| ● | 中間試験 | (6/7) |

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|-----------------------|--------|
| 7 | 最大流：モデル化 (1) — 割当 | (6/14) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 | (6/21) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/28) |
| 10 | 彩色：数理 | (7/5) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (7/12) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/19) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/26) |
| 14 | (授業等調整日) ← 行わない | (8/2) |
| | ● 期末試験 | (8/9?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- ▶ 彩色と染色数
- ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- ▶ 貪欲彩色による上界

目次

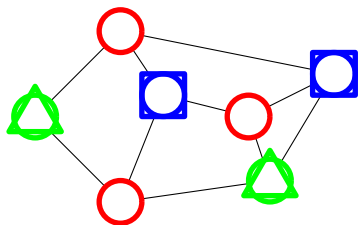
- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

無向グラフの彩色

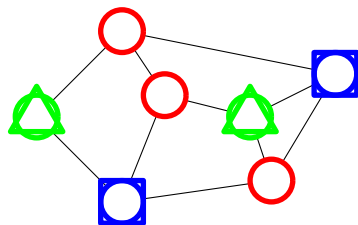
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：彩色とは？（直感的な定義）

G の彩色 (さいしょく) とは、
 G の頂点への色の割当てで、各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である



彩色ではない

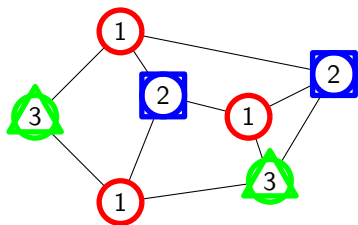
彩色において、同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

無向グラフの彩色：形式的な定義

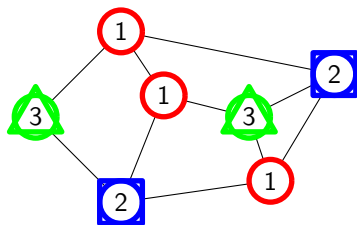
無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

定義：彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 彩色とは, 写像 $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ で,
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である



3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \dots, k\}$ を **パレット** と呼ぶことがある

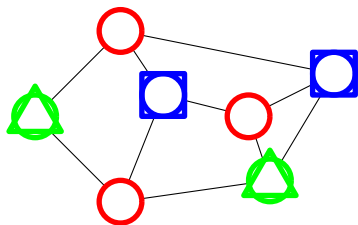
彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

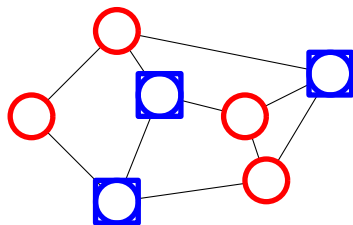
定義：彩色可能性とは？

G が k 彩色可能であるとは、 G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である



2 彩色は存在しない

注： G が k 彩色可能 $\Rightarrow G$ は $k + 1$ 彩色可能

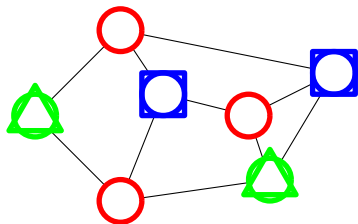
染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

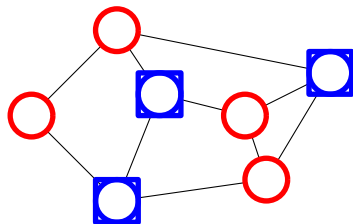
定義：染色数とは？

G の染色数とは、 G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



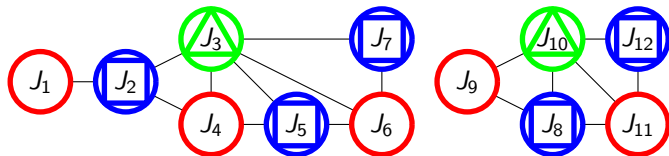
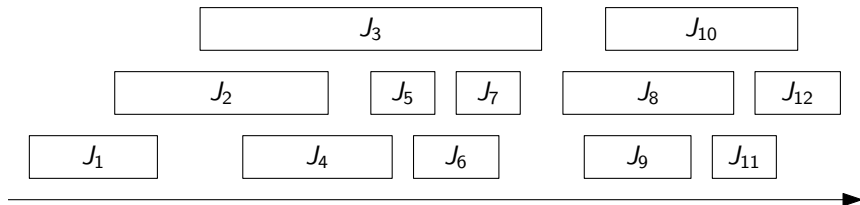
3 彩色である



2 彩色は存在しない

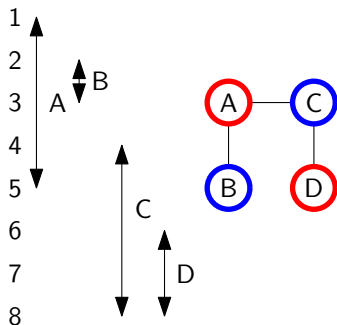
\therefore このグラフの染色数は 3

彩色が現れる場面 (1) : ジョブスケジューリング



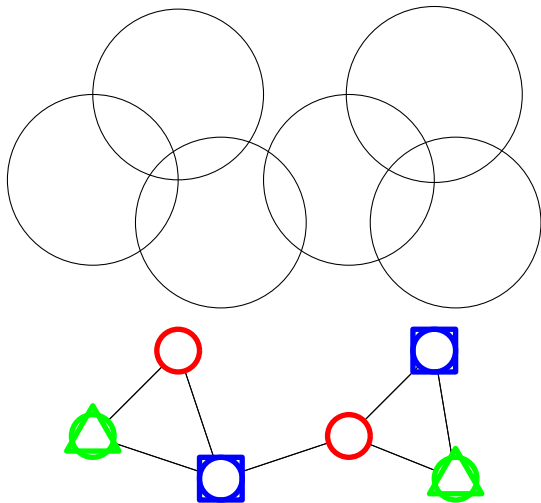
彩色が現れる場面 (2) : レジスタ割当

- 1: $A = 2$
- 2: $B = 3$
- 3: $B = B + 2$
- 4: $C = A + 1$
- 5: $A = C + 3$
- 6: $D = 4$
- 7: $D = C + 2$
- 8: $C = 3$



- 1: $R1 = 2$
- 2: $R2 = 3$
- 3: $R2 = R2 + 2$
- 4: $R2 = R1 + 1$
- 5: $R1 = R2 + 3$
- 6: $R1 = 4$
- 7: $R1 = R2 + 2$
- 8: $R2 = 3$

彩色が現れる場面 (3) : 移動体通信における周波数割当



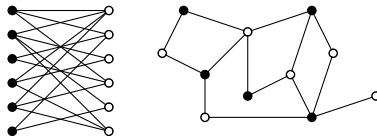
2 彩色可能性と二部グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

 G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow G$ は二部グラフ「 \Rightarrow 」の証明： G は 2 彩色可能であるとする

- ▶ G の 2 彩色を 1 つ考え、その彩色クラスを A, B とする
- ▶ A の 2 頂点は辺で結ばれず、 B の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶ $\therefore G$ は A, B を部集合とする二部グラフである



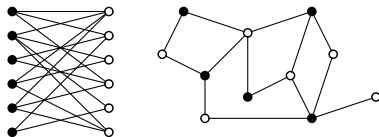
2 彩色可能性と二部グラフ (続)

無向グラフ $G = (V, E)$

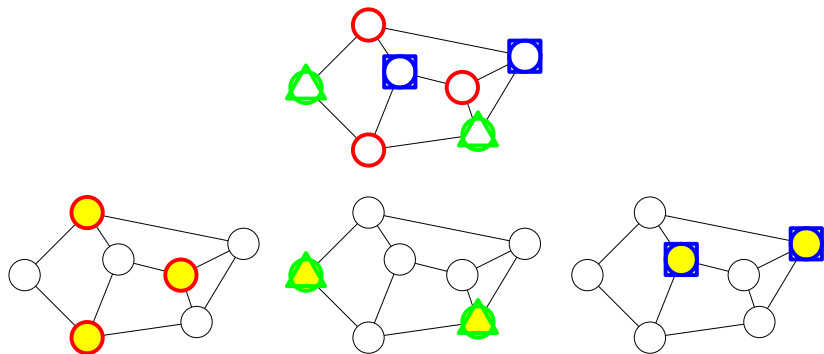
性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

 G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow G$ は二部グラフ「 \Leftarrow 」の証明： G は二部グラフであるとする

- ▶ G の部集合を A, B とする
- ▶ A の 2 頂点は辺で結ばれず, B の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶ $\therefore G$ は A, B を彩色クラスとする 2 彩色を持つ □



彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

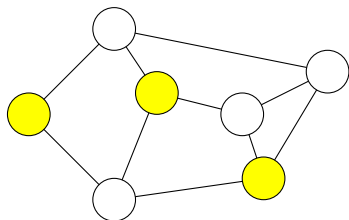
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

独立集合

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：独立集合とは？

G の独立集合とは、頂点部分集合 $I \subseteq V$ で、
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



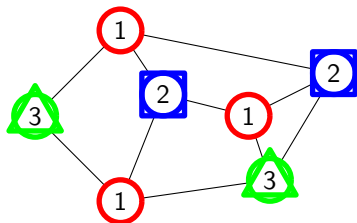
無向グラフの彩色：独立集合を用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

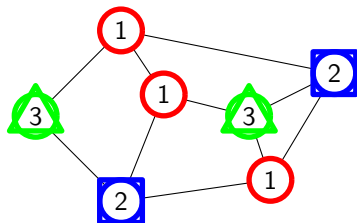
定義：彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

G の k 彩色とは,
 k 個の独立集合 I_1, \dots, I_k への頂点集合 V の分割

- ▶ $V = I_1 \cup \dots \cup I_k$
- ▶ 任意の $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ に対して, $I_i \cap I_j = \emptyset$



3 彩色である



3 彩色ではない

目次

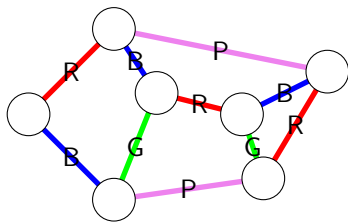
- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

無向グラフの辺彩色

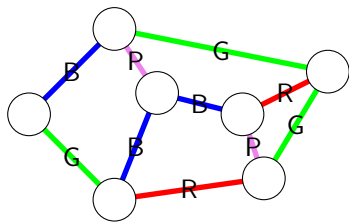
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：辺彩色とは？ (直感的な定義)

G の**辺彩色** (さいしょく) とは、
 G の**辺**への色の割当てで、端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である



辺彩色ではない

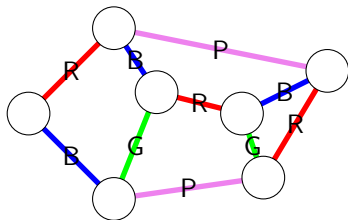
辺彩色において、同じ色を持つ辺の集合を**彩色クラス**とも呼ぶ

無向グラフの辺彩色：形式的な定義

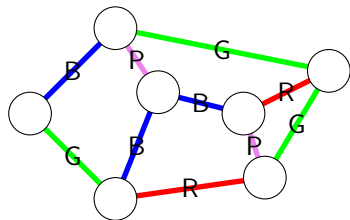
無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

定義：辺彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 辺彩色とは, 写像 $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ で,
端点を共有する任意の辺 $e, f \in E$ に対して $c(e) \neq c(f)$ を満たすもの



4 辺彩色である



4 辺彩色ではない

c の終域 $\{1, \dots, k\}$ を **パレット** と呼ぶことがある

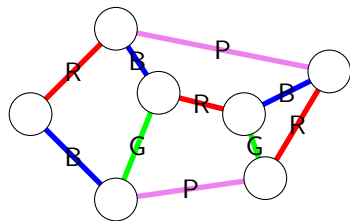
辺彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

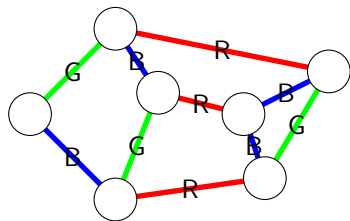
定義：辺彩色可能性とは？

G が k 辺彩色可能であるとは、 G の k 辺彩色が存在すること

このグラフは 4 辺彩色可能である



4 辺彩色である



3 辺彩色は存在しない

注： G が k 辺彩色可能 $\Rightarrow G$ は $k + 1$ 辺彩色可能

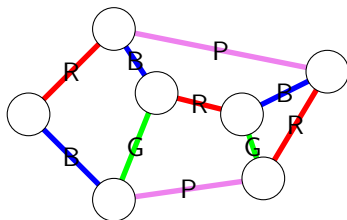
辺染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

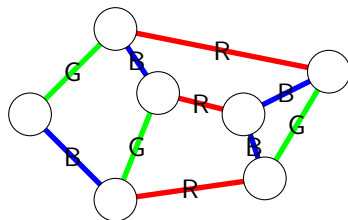
定義：辺染色数とは？

G の**辺染色数**とは、 G の k 辺彩色が存在するような最小の k

G の辺染色数を $\chi'(G)$ で表す



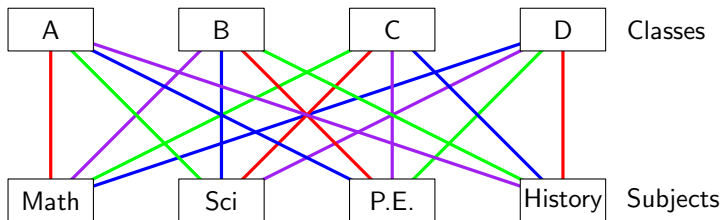
4 辺彩色である



3 辺彩色は存在しない

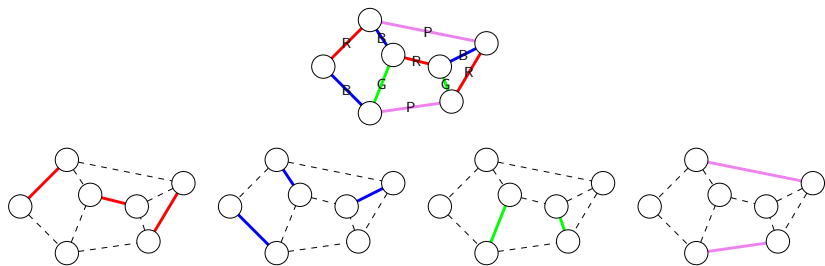
∴ このグラフの辺染色数は 4

辺彩色が現れる場面：時間割作成



		A	B	C	D
■	1	Math	P.E.	Sci	History
■	2	Sci	History	Math	P.E.
■	3	P.E.	Sci	History	Math
■	4	History	Math	P.E.	Sci

彩色クラスとマッチング



辺彩色の各彩色クラスはマッチング

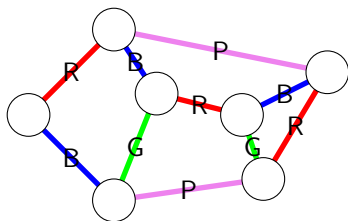
無向グラフの辺彩色：マッチングを用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 k

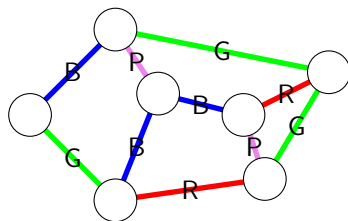
定義：辺彩色とは？ (マッチングを用いた定義)

G の k 辺彩色とは,

k 個のマッチング M_1, \dots, M_k への辺集合 E の分割



4 辺彩色である



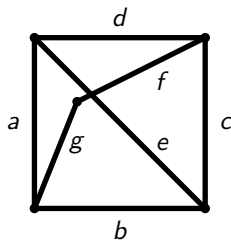
4 辺彩色ではない

辺彩色は彩色の特殊な場合

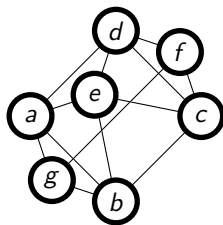
定義：線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の線グラフ $L(G)$ とは

- ▶ 頂点集合が E であり,
- ▶ 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が共通端点を持つ}\}$



G



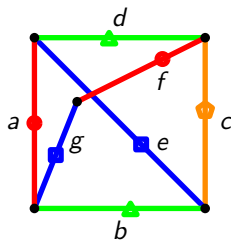
L(G)

辺彩色は彩色の特殊な場合

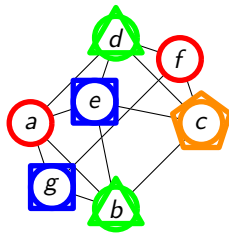
定義：線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の線グラフ $L(G)$ とは

- ▶ 頂点集合が E であり,
- ▶ 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が共通端点を持つ}\}$



G

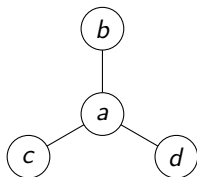


L(G)

G の辺彩色 $\leftrightarrow L(G)$ の彩色 つまり, $\chi'(G) = \chi(L(G))$

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)



つまり, $K_{1,3} = L(G)$ を満たす無向グラフ G は存在しない

目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

染色数の上界

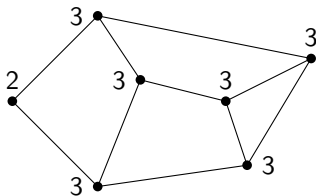
性質：染色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の**最大次数** $\Delta(G)$ とは、その頂点の次数の最大値



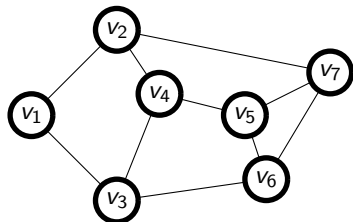
$$\Delta(G) = 3$$

証明：アルゴリズムによる証明 ($\Delta(G) + 1$ 色しか使わない彩色を与える)

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

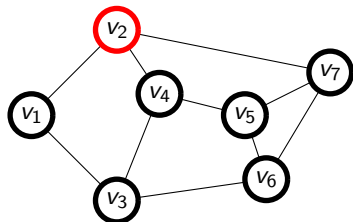
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

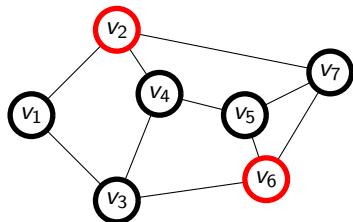
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

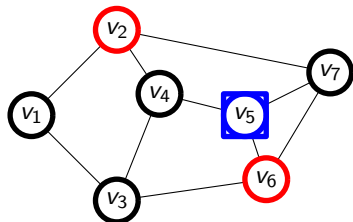
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

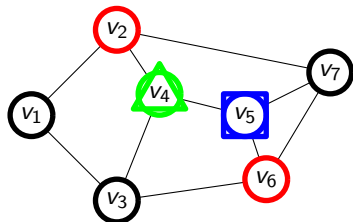
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

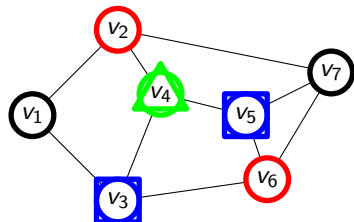
実行例

 $\sigma: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

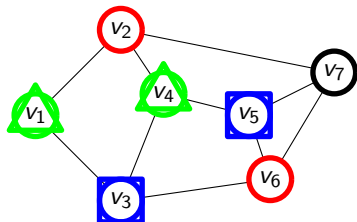
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

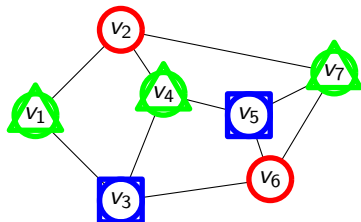
実行例

 $\sigma: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

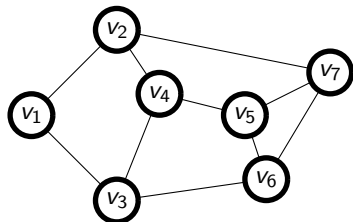
実行例

 $\sigma: v_2 \ v_6 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_1 \ v_7$ 

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

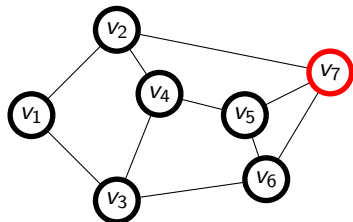
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

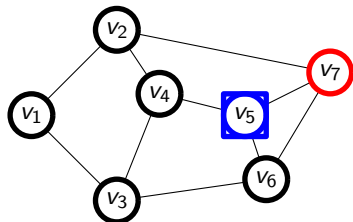
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

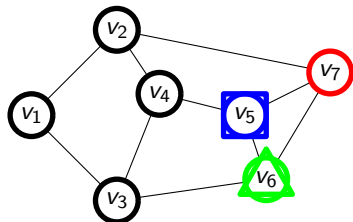
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

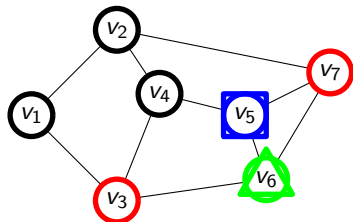
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

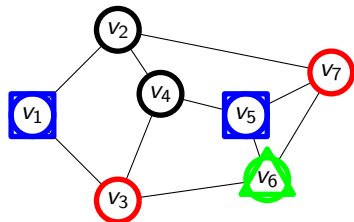
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は,
既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

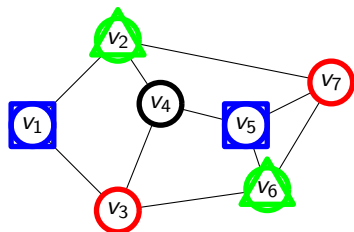
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は, 既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

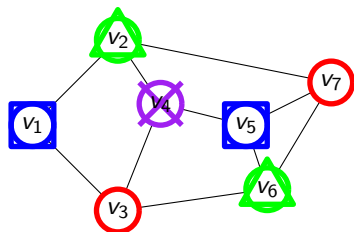
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序 σ を1つ固定, パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- ▶ σ に沿って, 頂点に1つずつ, 色を割り当てる
- ▶ 頂点 v を塗るとき,
 - 1 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る
 - 2 既に使った色で塗れる場合は,
既に使った色の中で**最も小さな色**で塗る

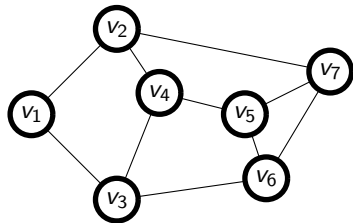
実行例 (別の順序) $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

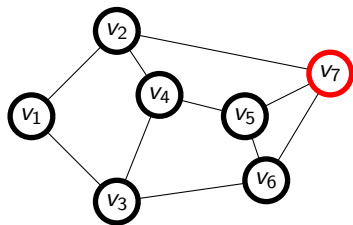
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

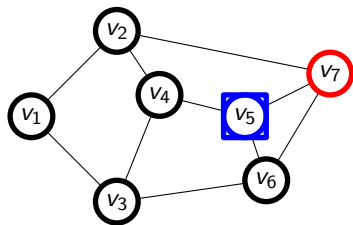
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

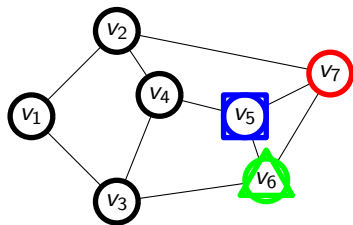
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

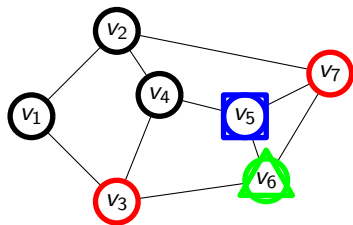
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

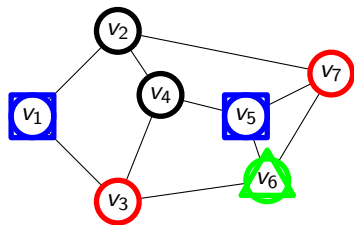
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

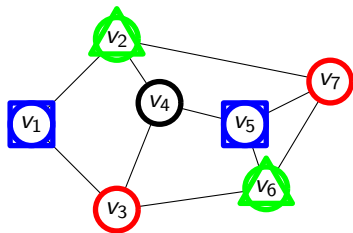
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

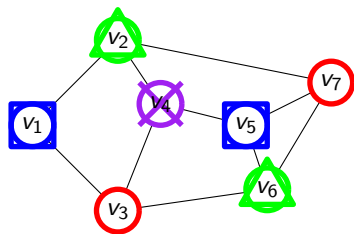
全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



染色数の上界：証明

- ▶ 貪欲彩色で、任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- ▶ v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$ (次数)
- ▶ $\therefore v$ を塗るために必要な色は必ず余っている
- ▶ \therefore どの頂点も必ず塗れる ($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- ▶ よって、貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る □

全順序 $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$



貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり、 σ を変えると、異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば、貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり、染色数を計算するためには、うまい全順序を見つければよい

今からやること

- ▶ そのようなうまい全順序をどう見つけるか？ (次回)
- ▶ その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

実は、いつもうまくいくとは限らないが、うまくいく場合を紹介する

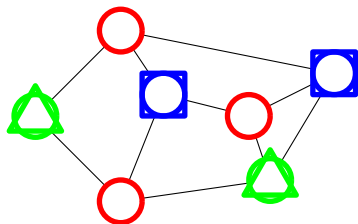
目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

彩色の最適性

定義：染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の染色数とは、 G の k 彩色が存在するような最小の k

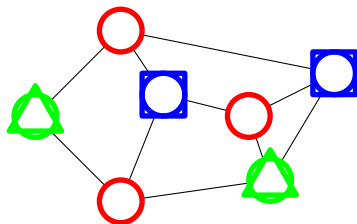


$$\chi(G) = 3$$

彩色の最適性

定義：染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の染色数とは、 G の k 彩色が存在するような最小の k



$$\chi(G) = 3 ???$$

疑問

- ▶ 3色未満で塗れないのか？
- ▶ 塗れないことをどう示すのか？

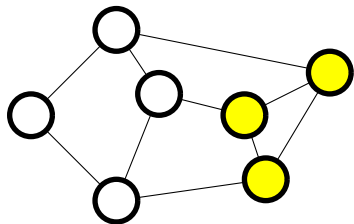
← $\chi(G) \leq 3$ しか示していない

クリーク

定義：グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは、頂点部分集合 C で、その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)

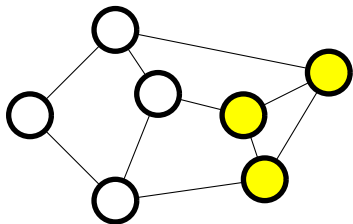


クリーク

定義：グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは、頂点部分集合 C で、その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- ▶ C が G のクリークである
 $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

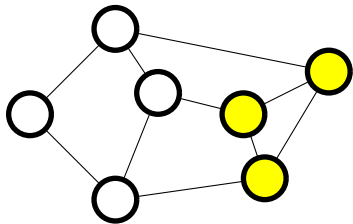
なぜか？

クリーク

定義：グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは、頂点部分集合 C で、その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- ▶ C が G のクリークである
 $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感： C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

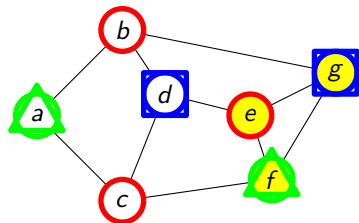
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して, $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想 : 数え上げ論法による

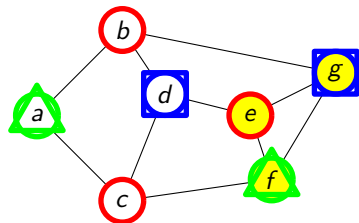


	e	f	g
● $\{b, c, e\}$	1		
■ $\{d, g\}$			1
▲ $\{a, f\}$		1	

彩色とクリークの弱双対性

 無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

 G の任意のクリーク C に対して, $\chi(G) \geq |C|$
証明の着想 : 数え上げ論法による


	e	f	g
● $\{b, c, e\}$	1		
■ $\{d, g\}$			1
▲ $\{a, f\}$		1	
	┌	┌	┌

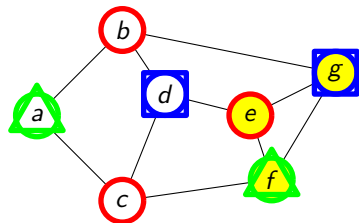
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して, $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想 : 数え上げ論法による



	e	f	g	
● $\{b, c, e\}$	1			≤ 1
■ $\{d, g\}$			1	≤ 1
▲ $\{a, f\}$		1		≤ 1
	┌	┌	┌	

彩色とクリークの弱双対性

証明 : $\chi(G)$ 彩色を独立集合 $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$ への V の分割と捉える

- ▶ 各 $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$, $v \in C$ に対して,

$$M_{i,v} = \begin{cases} 1 & (v \in I_i), \\ 0 & (v \notin I_i) \end{cases}$$

として行列 $M \in \mathbb{R}^{\{1, \dots, \chi(G)\} \times C}$ を考える

- ▶ 各独立集合 I_i と C は頂点を2つ以上共有しないので,

$$\sum_{i=1}^{\chi(G)} \left(\sum_{v \in C} M_{i,v} \right) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$

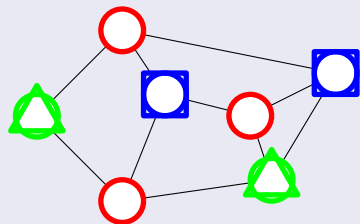
- ▶ 各 $v \in C$ は $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$ の中のちょうど1つの要素なので

$$\sum_{v \in C} \left(\sum_{i=1}^{\chi(G)} M_{i,v} \right) = \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

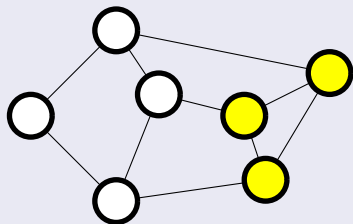
- ▶ したがって, $\chi(G) \geq |C|$



彩色が最適であることの確認法

 $\chi(G)$ の上界

3色で塗れた
 $\therefore \chi(G) \leq 3$

 $\chi(G)$ の下界

頂点数3のクリークを見つけた
 $\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

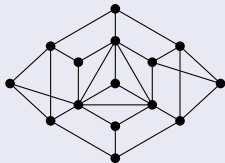
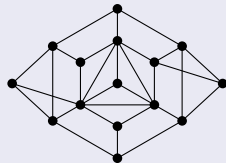
- ▶ k 色で塗る (つまり, $\chi(G) \leq k$)
- ▶ 頂点数 k のクリークを見つける (つまり, $\chi(G) \geq k$)
- ▶ したがって, $\chi(G) = k$

つまり,

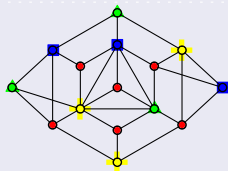
彩色問題では、色を塗ることだけではなくて、
クリークを見つけることも重要になる

頂点数の大きなクリークがつけられるとうれしい

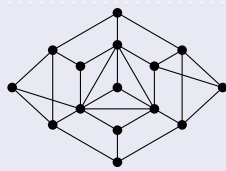
彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$ の上界 $\chi(G)$ の下界

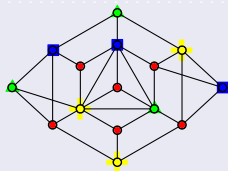
彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$ の上界

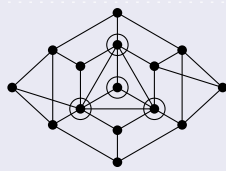
4色で塗れた
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

 $\chi(G)$ の下界

彩色の最適性の証明：例

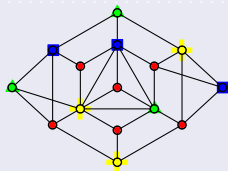
 $\chi(G)$ の上界

4色で塗れた
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

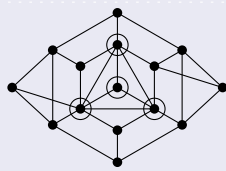
 $\chi(G)$ の下界

頂点数4のクリークを見つけた
 $\therefore \chi(G) \geq 4$

彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$ の上界

4色で塗れた
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

 $\chi(G)$ の下界

頂点数4のクリークを見つけた
 $\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 4$$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

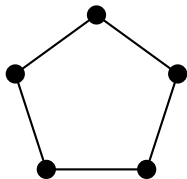
- ▶ 任意のクリーク C に対して, $\chi(G) \geq |C|$
- ▶ 特に, C を頂点数最大のクリークとすると, $\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

- ▶ k 色で塗れれば, $\chi(G) \leq k$
- ▶ 頂点数 k のクリークが見つければ, $\omega(G) \geq k$
- ▶ $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり, $\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- ▶ $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

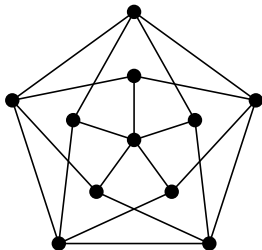
$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)頂点数 5 の閉路 C_5 

▶ $\chi(C_5) = 3$

▶ $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

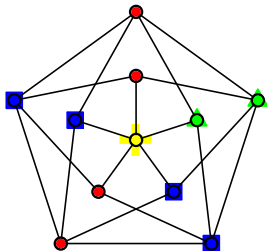
Grötzsch グラフ



- ▶ $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- ▶ $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

Grötzsch グラフ



- ▶ $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- ▶ $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- ▶ 彩色と染色数
- ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- ▶ 貪欲彩色による上界

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ