グラフとネットワーク　第 8 回
最大流：モデル化 (2) — カットの視点

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 6 月 21 日

最終更新：2019 年 6 月 21 日　11:39

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)

* 休み (5/3)
* 休講 (5/10)

4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)

- 中間試験 (6/7)

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)

- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

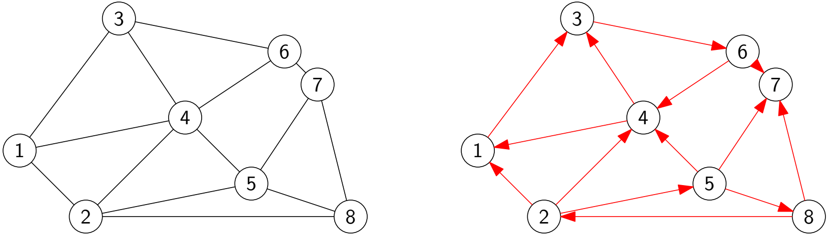
今日の目標

最大流問題 (最小 s,t カット問題) を用いて次の問題をモデル化できる

- グラフの次数制約付き向き付け
- 露天掘り問題
- 画像の領域分割

目次

グラフの向き付け

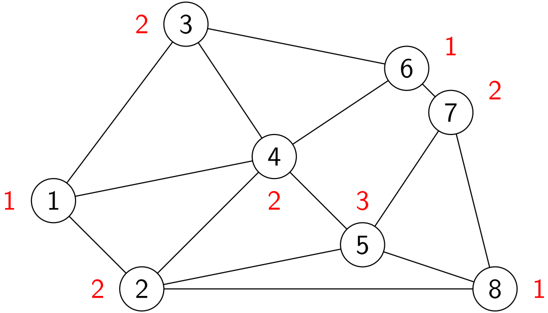


定義：向き付け

無向グラフの向き付けとは，
すべての (無向) 辺を (有向) 弧に置き換えること
または，置き換えて得られる有向グラフのこと

グラフの向き付け：次数制約付き

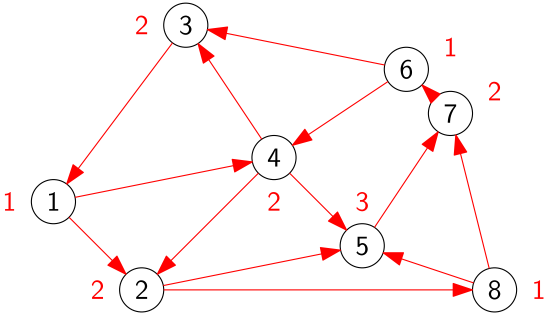
無向グラフ $G = (V, E)$



- $\boxed{\text{所与}}$：各頂点 $v \in V$ に対して，非負整数 $m(v)$
- $\boxed{\text{質問}}$：各頂点の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがあるか？

グラフの向き付け：次数制約付き

無向グラフ $G = (V, E)$



- $\boxed{\text{所与}}$：各頂点 $v \in V$ に対して，非負整数 $m(v)$
- $\boxed{\text{質問}}$：各頂点の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがあるか？

グラフの向き付け：次数制約付き

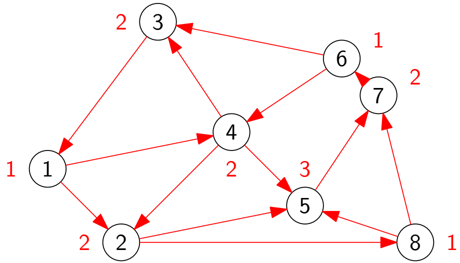
無向グラフ $G = (V, E)$，各頂点 $v \in V$ に対して非負整数 $m(v)$

簡単な必要条件

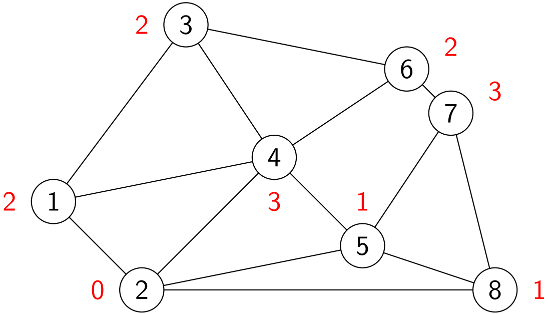
各頂点の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがある $\Rightarrow$

$$|E| = \sum_{v \in V} m(v)$$

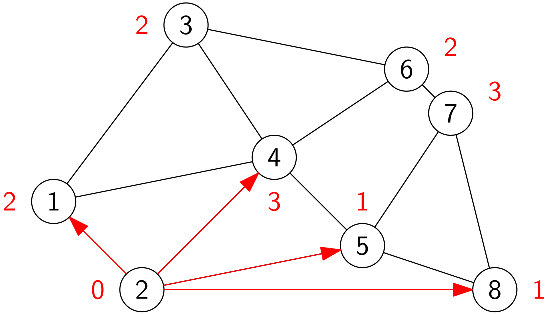
これは，(有向グラフに対する) 握手補題から分かる



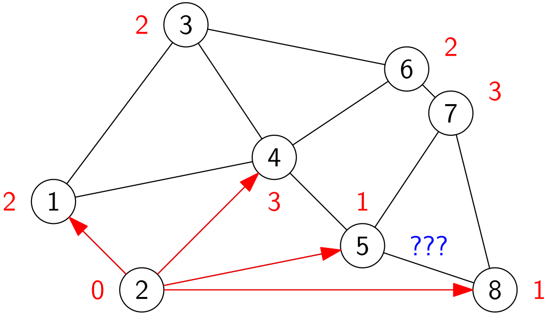
グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



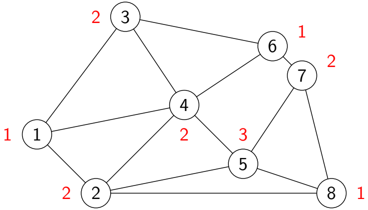
グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する

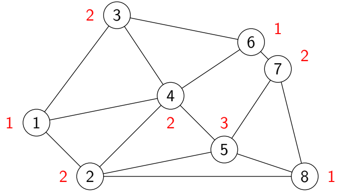


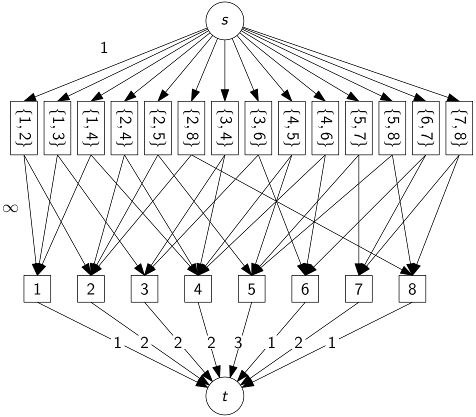
「流れ」という比喩 (前回の復習)

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

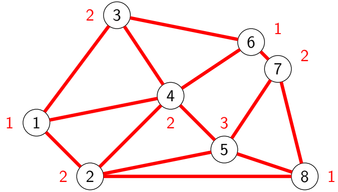
「辺 $\{u, v\}$ が弧の終点を u か v へ割り当てる」と見なす

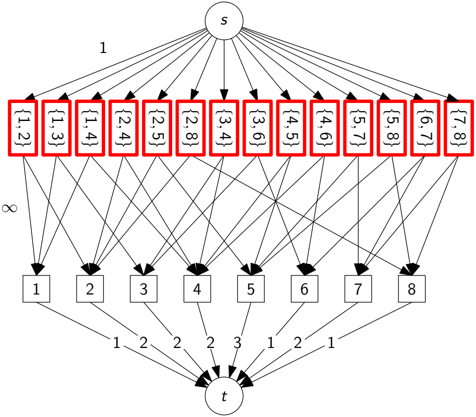
最大流問題としての向き付け問題





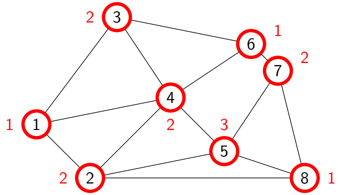
最大流問題としての向き付け問題

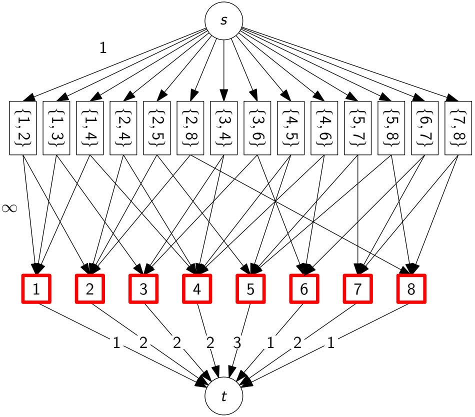




辺に対応する頂点

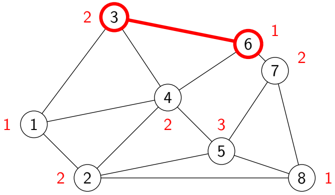
最大流問題としての向き付け問題

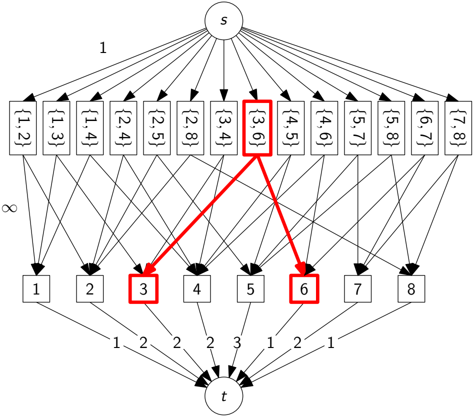




頂点に対応する頂点

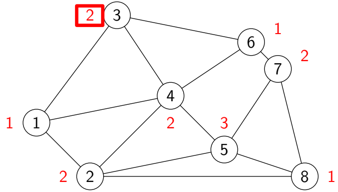
最大流問題としての向き付け問題

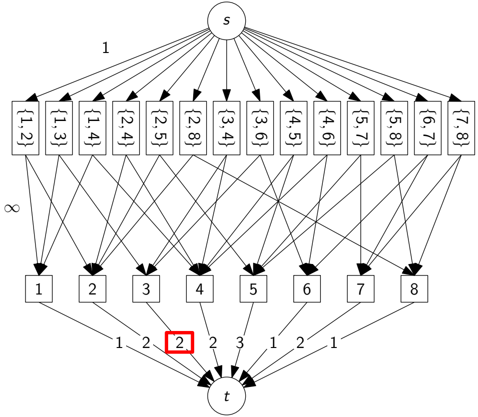




辺 e に対応する頂点 から 頂点 v に対応する頂点 に 弧 $\Leftrightarrow$ v が e の端点

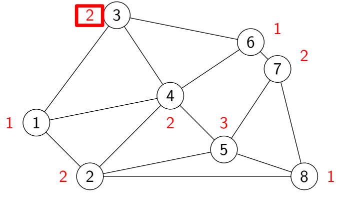
最大流問題としての向き付け問題

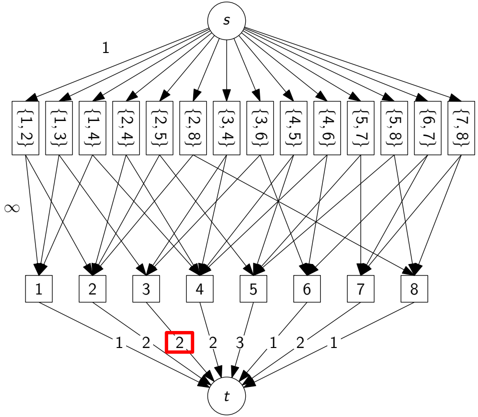




頂点 v に対応する頂点 から t へ向かう弧 の容量 $= m(v)$

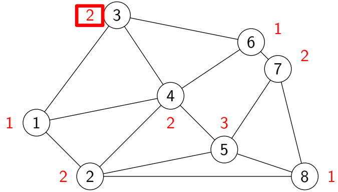
最大流問題としての向き付け問題

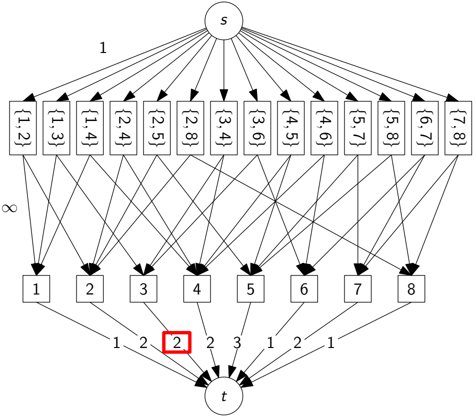




s から 辺 e に対応する頂点へ向かう弧 の容量 $= 1$

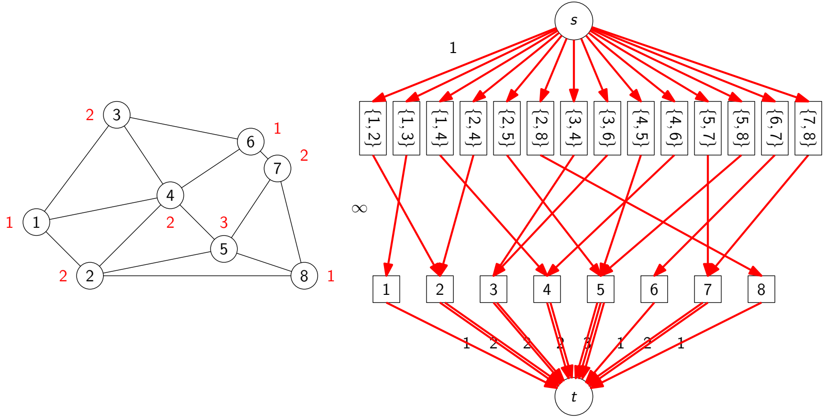
最大流問題としての向き付け問題





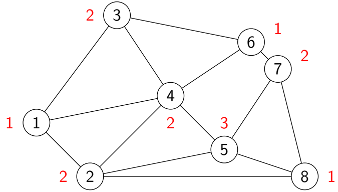
辺に対応する頂点 から 頂点に対応する頂点へ向かう弧 の容量 $= \infty$

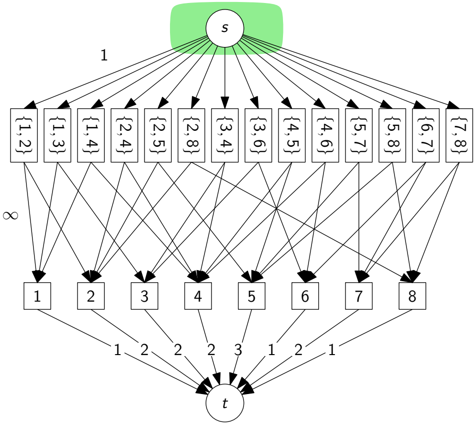
最大流問題としての向き付け問題：最大流



整数最大流 (の 1 つ)，値 $= 14$

最大流問題としての向き付け問題：最小 s,t カット

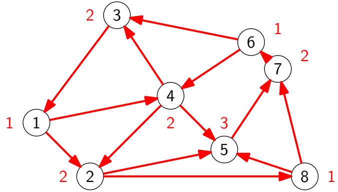


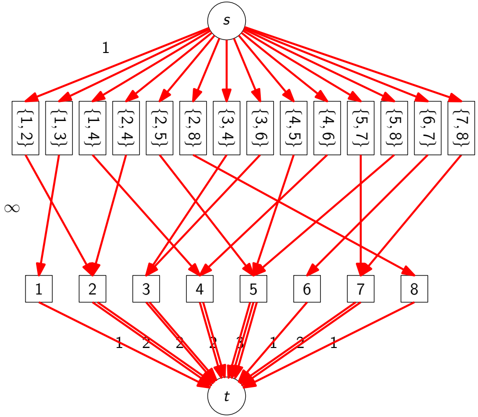


最小 s,t カット (の 1 つ)，容量 $= 14$

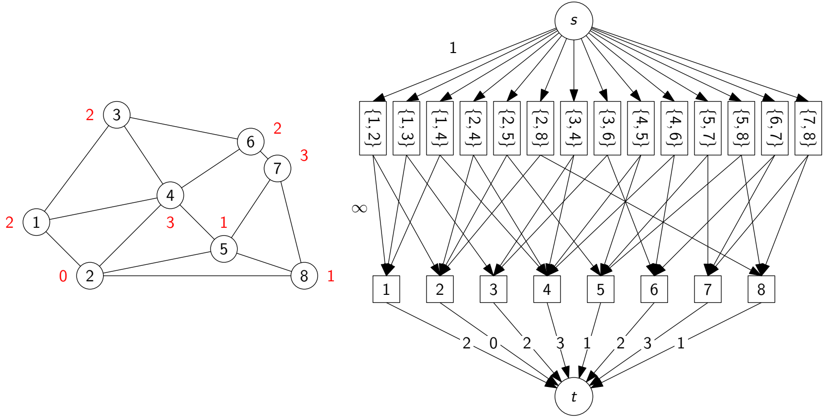
(つまり，前のページの流れは最大流)

最大流問題としての向き付け問題：最大流から得られる向き付け

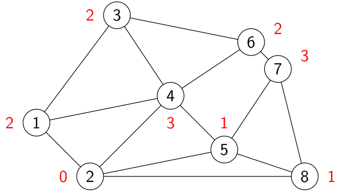


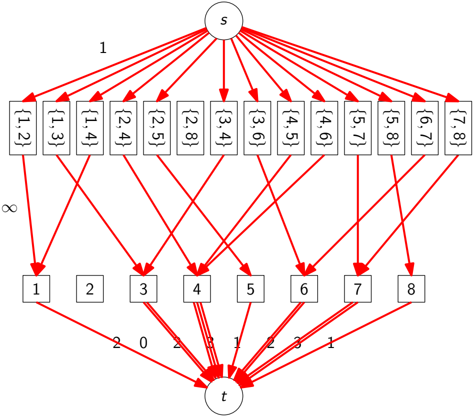


最大流問題としての向き付け問題 — 別の例



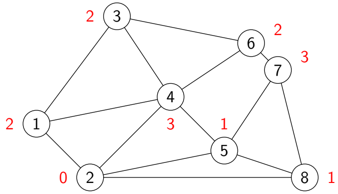
最大流問題としての向き付け問題 — 別の例

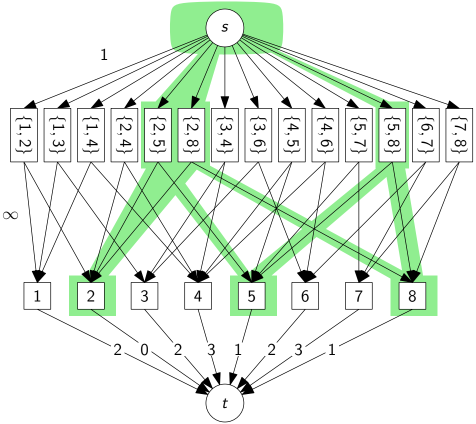




整数最大流 (の 1 つ)，値 $= 13$

最大流問題としての向き付け問題：最小 s,t カット





最小 s,t カット (の 1 つ)，容量 $= 13$

- つまり，前のページの流れは最大流
- 最大流の値 $= 13 < 14 = \sum_{v \in V} m(v)$ なので，うまく向き付けられない

目次

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

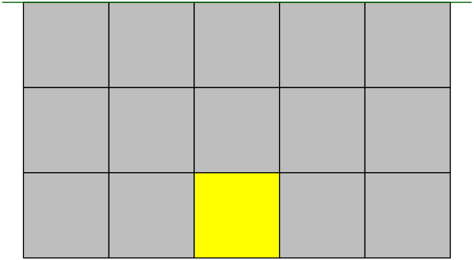
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

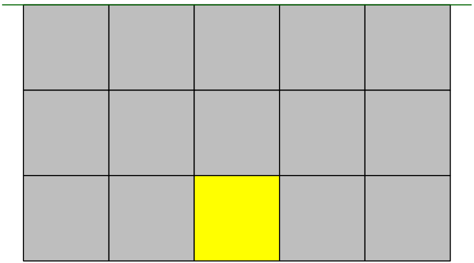
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

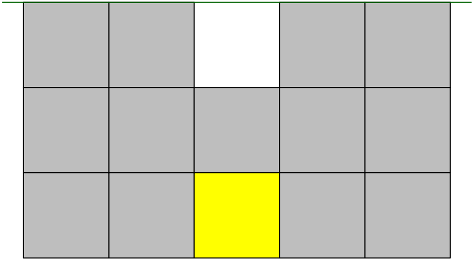
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

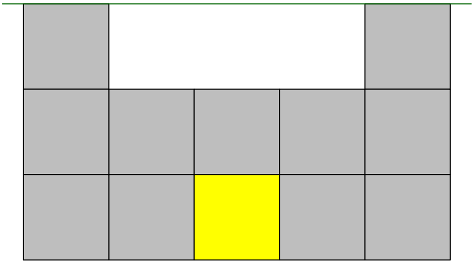
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

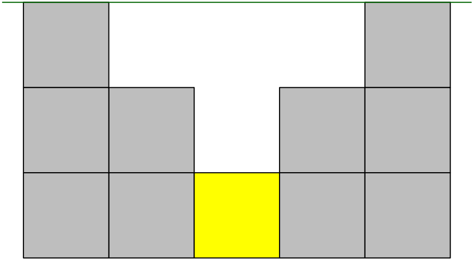
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

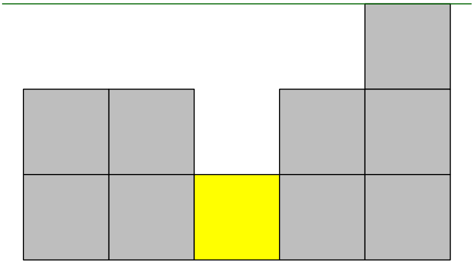
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

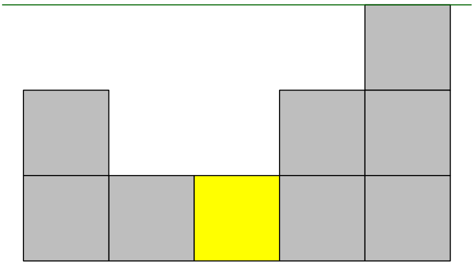
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

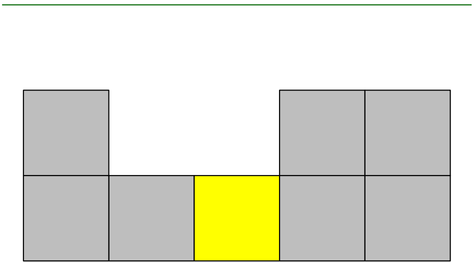
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

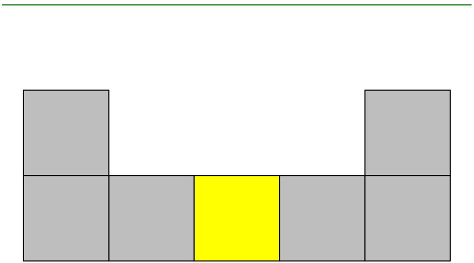
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

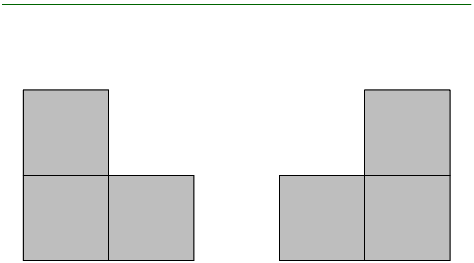
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

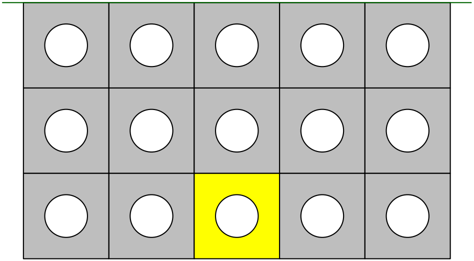
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



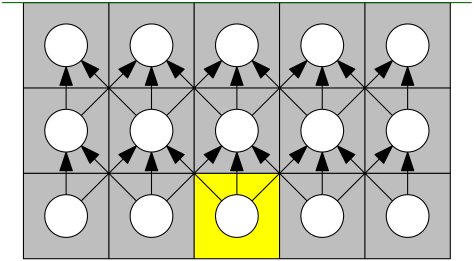
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



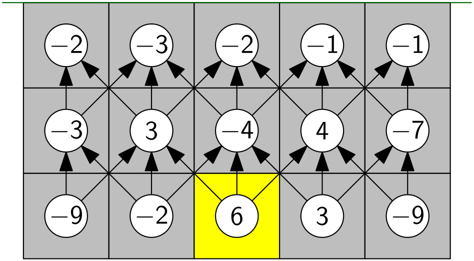
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



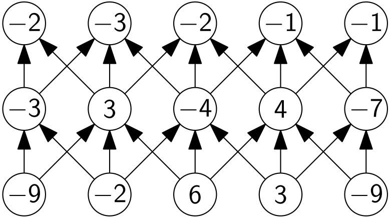
「弧の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を弧で表す

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



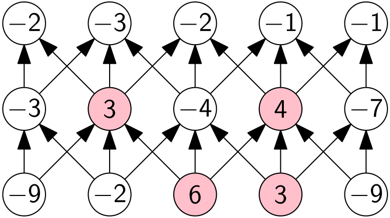
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



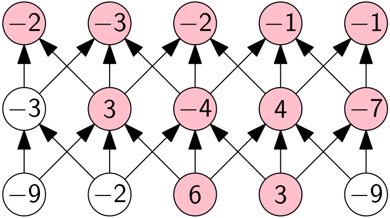
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



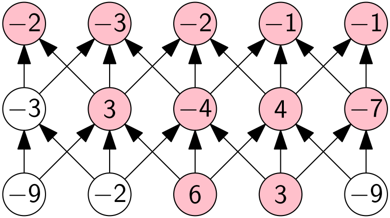
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



これは許される掘り方で，総利益 $= -4$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，
最小 s, t カット問題としてモデル化する

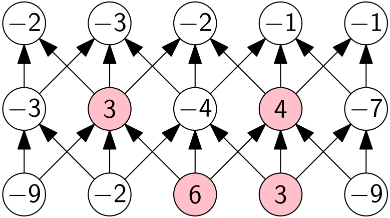
- 注：最小 s, t カットは最大流問題を解けば見つかる

露天掘り問題：モデル化のためのアイディア

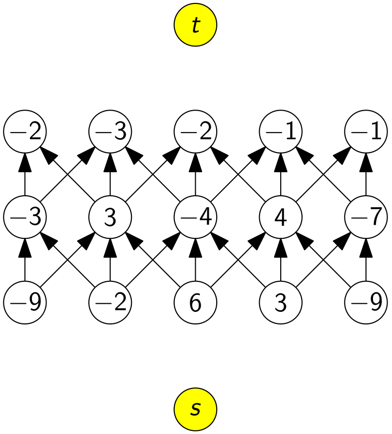
モデル化のためのアイディア

自由に取れるならば，利益の合計を $3+4+6+3=16$ にできる

- -3 を取る $\equiv$ 3 だけ損をする (と考える)
- 6 を取らない $\equiv$ 6 だけ損をする (と考える)
- 目標：損の合計を最小化する

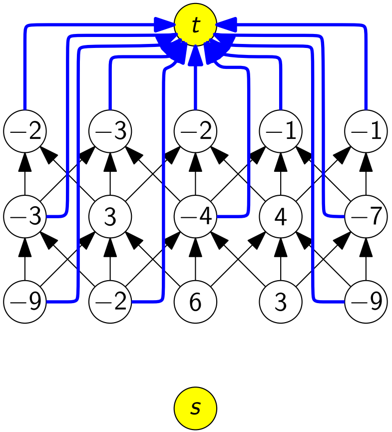


露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (1)



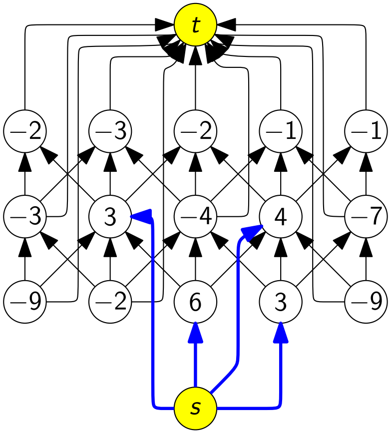
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (2)



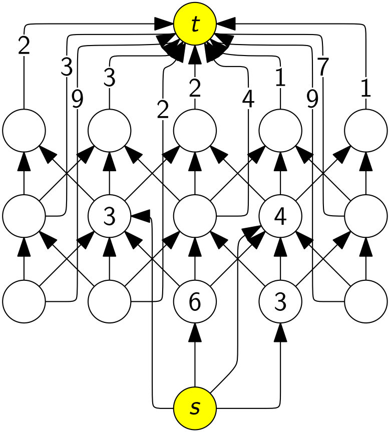
利益が負である頂点から t に向かって弧を付ける

露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (3)



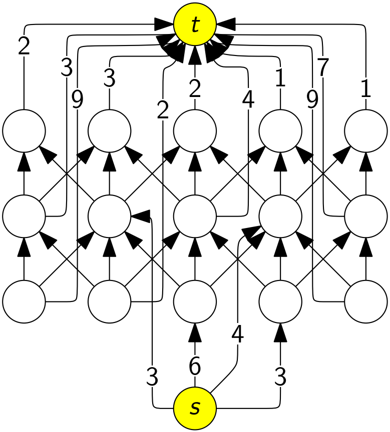
利益が正である頂点に向かって s から弧を付ける

露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (4)



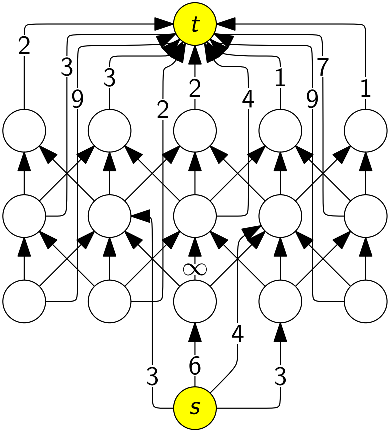
t を終点とする弧の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (5)



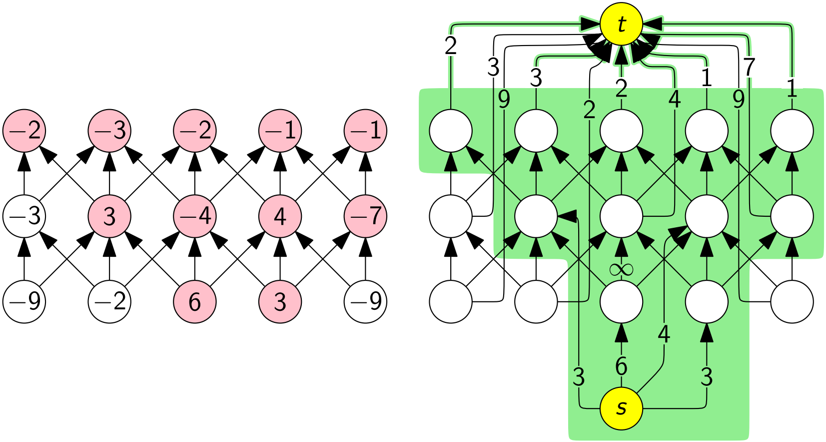
s を始点とする弧の容量はその終点を取らなかったときの損

露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (6)

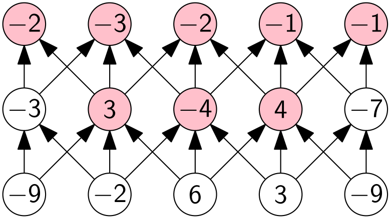


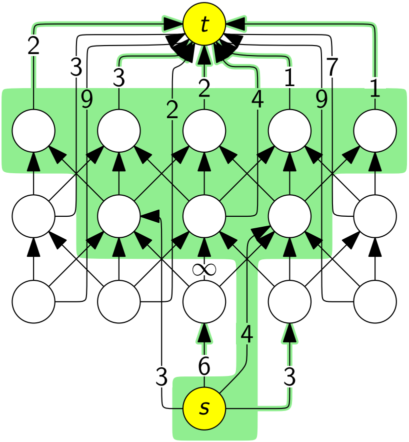
他の弧の容量は ∞ (無限大)

露天掘り問題：掘り方と s, t カットの対応 (1)

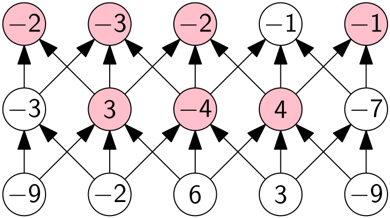


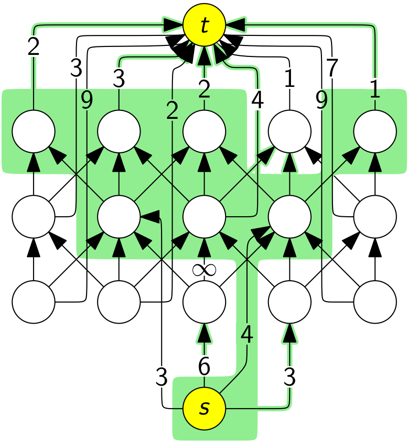
露天掘り問題：掘り方と s, t カットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方と s, t カットの対応 (3)



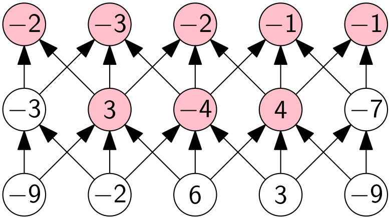


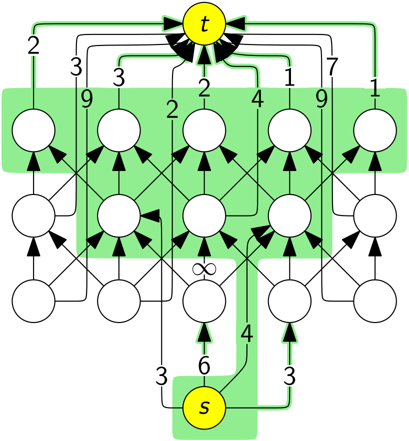
許されない掘り方に対応する s, t カットの容量は無限大

露天掘り問題：ここまでのまとめ

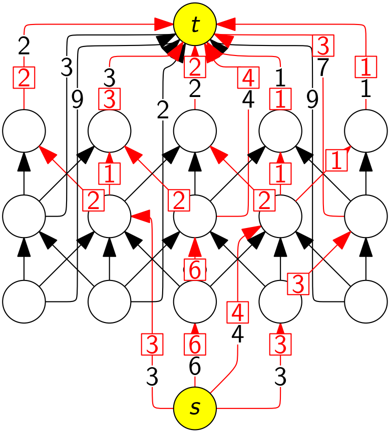
最小 s, t カットから，損が最も小さい掘り方が分かる (Picard ’76)

最小 s, t カットを計算するために，最大流を計算する



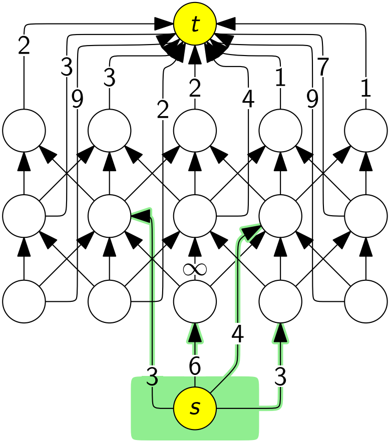


露天掘り問題：最大流



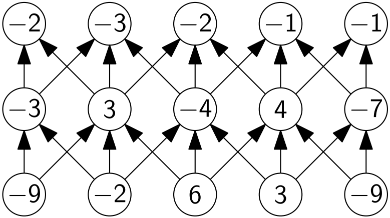
計算された最大流 (値 $= 16$)

露天掘り問題：最小 s, t カット



対応する最小 s, t カット (容量 $= 16$)

露天掘り問題：最小 s,t カットに対応する掘り方

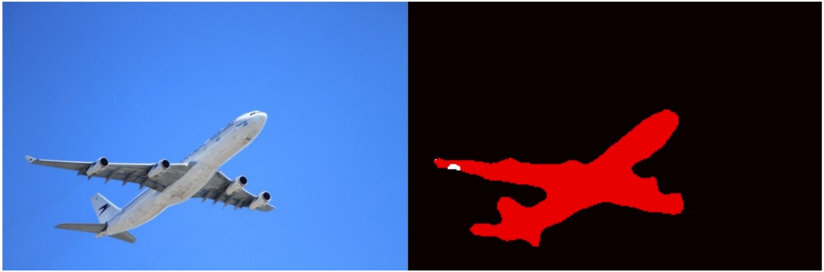


総利益 $= 0$

目次

画像の領域分割

「物体」と「背景」に画像を分割する

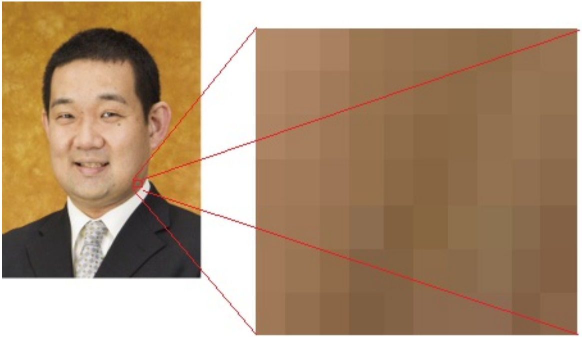


https://aws.amazon.com/jp/blogs/machine-learning/semantic-segmentation-algorithm-is-now-available-in-amazon-sagemaker/

様々な手法が提案されているが，この講義は，
最小 s, t カットに基づく方法 (グラフカット法) を取り扱う

画像の表現：ピクセル

画像はピクセル (画素) の集まりとして表現されている

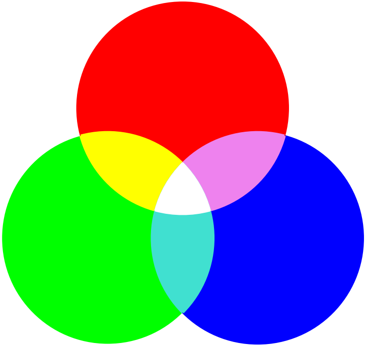


詳細は『コンピュータ・グラフィックス』で

画像の表現：色

各ピクセルは色を持つ (色の表現方法は様々)，色には強度 (濃淡) がある

- 表現法の１つ：RGB (赤と緑と青を混ぜる)

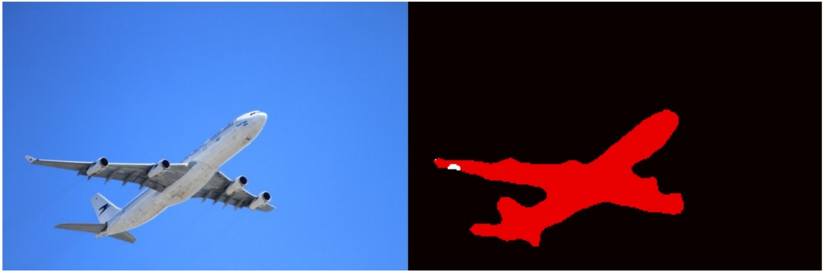


R: 154
G: 179
B: 228

詳細は『コンピュータ・グラフィックス』で

画像の領域分割：基本的な考え方

「物体」と「背景」の色の違い (強度の違い) に着目する

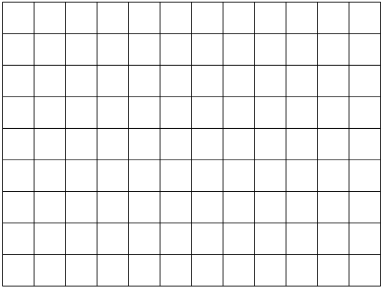


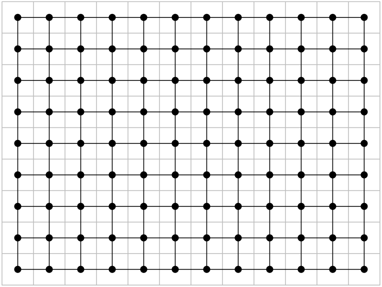
https://aws.amazon.com/jp/blogs/machine-learning/semantic-segmentation-algorithm-is-now-available-in-amazon-sagemaker/

強度の差が大きい所で画像を分割する

画像の領域分割：基本的な考え方 (1)

画像をグラフであると見なす

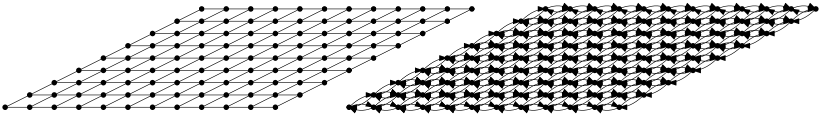




- 頂点 ＝ ピクセル
- 辺 ＝ 隣接ピクセル

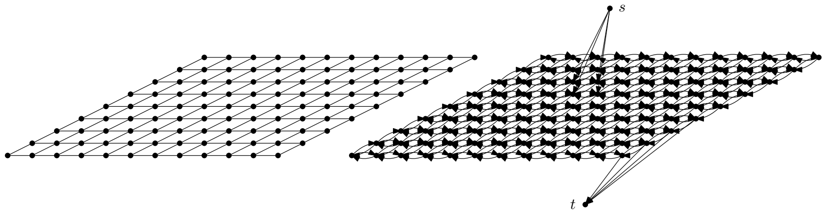
画像の領域分割：基本的な考え方 (2)

各辺を 両向きの弧 2 つに置き換えて，有向グラフを作る



画像の領域分割：基本的な考え方 (3)

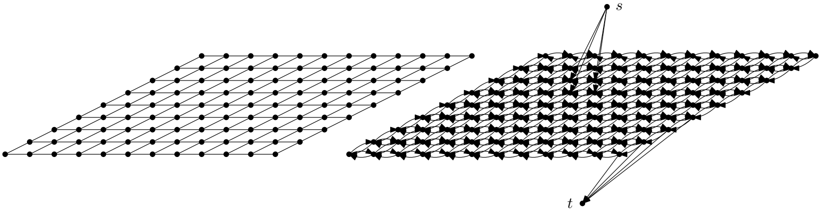
s, t も付け加える



- s から「物体であると分かっているピクセル」に向かって，弧を付ける
- t に向かって「背景であると分かっているピクセル」から，弧を付ける

画像の領域分割：基本的な考え方 (4)

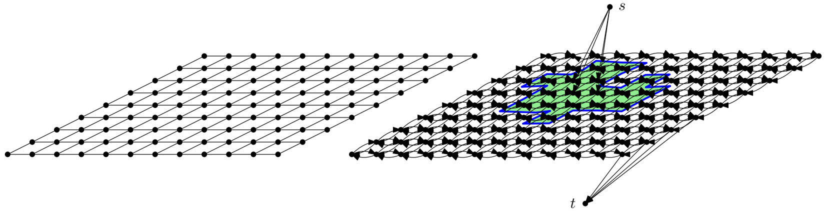
容量をうまく定める



- s を始点，t を終点とする弧の容量：とても大きい
- ピクセル間の弧の容量：
  端点とするピクセルの色の強度差が大きいほど小さい

画像の領域分割：基本的な考え方 (5)

これで，最小 s, t カットを計算する



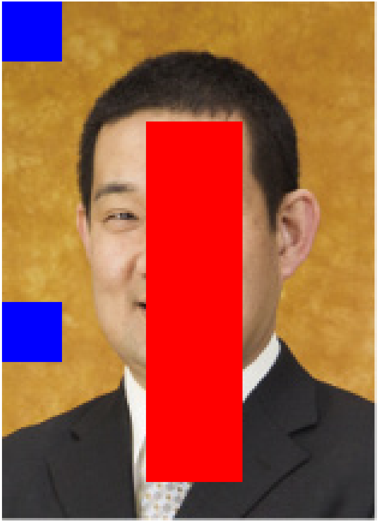
最小 s, t カットが「物体」を切り取る

画像の領域分割：例

入力画像

画像の領域分割：例

赤の部分は物体，青の部分は背景



画像の領域分割：例

最小 s, t カットを計算して得られた結果 (背景を白くしている)

目次

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題 (最小 s,t カット問題) を用いて次の問題をモデル化できる

- グラフの次数制約付き向き付け
- 露天掘り問題
- 画像の領域分割

次回：連結性 (また最大流問題が登場する)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次