グラフとネットワーク　第 7 回
最大流：モデル化 (1) — 割当

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 6 月 14 日

最終更新：2019 年 6 月 20 日　14:43

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)

* 休み (5/3)
* 休講 (5/10)

4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)

- 中間試験 (6/7)

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)

- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

最大流問題を用いて次の問題をモデル化できる

- 割当問題
- 二部グラフにおける最大マッチング問題
- リーグ戦における優勝可能性判定問題

次回：最大流問題を用いたモデル化 (2)

目次

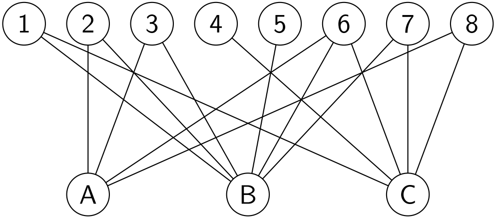
例：オアシスでの救護

- 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- 遭難者は 8 人，オアシスは 3 か所
- 各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通り
- [問い] どの遭難者の歩く距離も 3km 未満として，全員救護できるか？
- 可能ならば，どの遭難者をどのオアシスに歩かせればよいか？

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

グラフを使って状況整理

- 上側：遭難者，下側：オアシス
- 辺：距離が 3km 未満のオアシスと遭難者の間

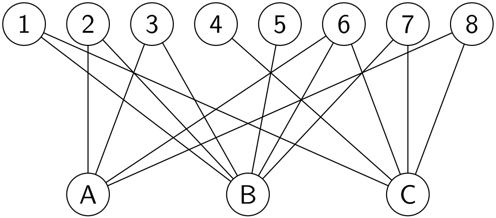


距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する



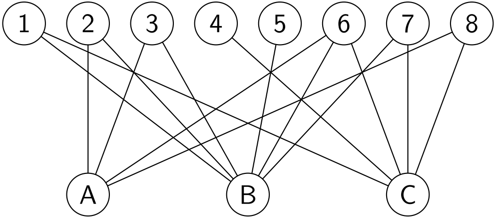
最大救護可能人数を計算する，という問題として捉える

最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？

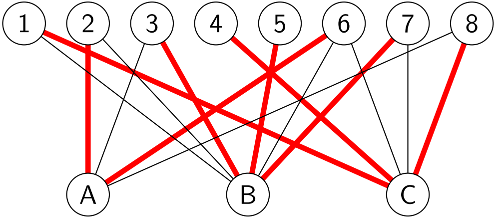


最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

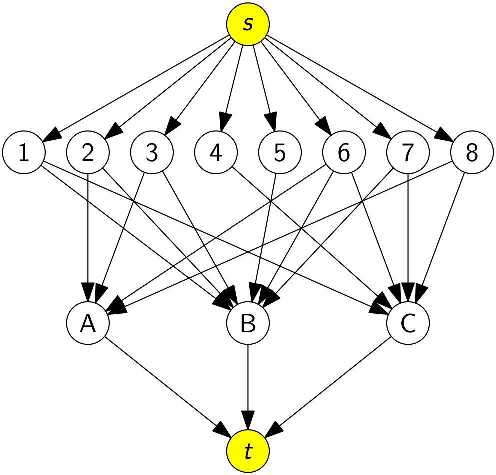
考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？



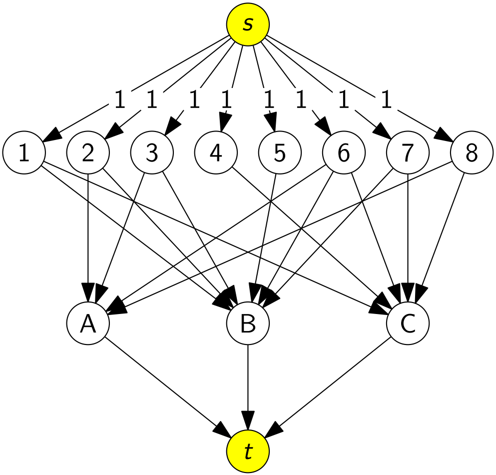
最大流問題としてのモデル化

s と t を新しい頂点として用意して，このように弧を作る



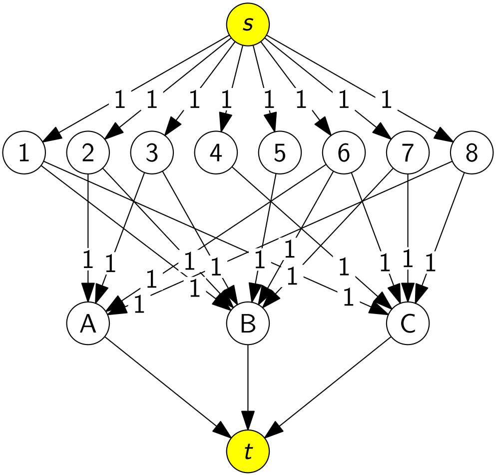
最大流問題としてのモデル化

s と遭難者の間の弧容量はどれも 1



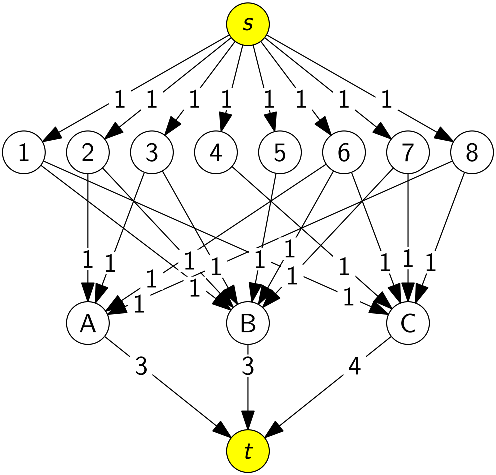
最大流問題としてのモデル化

遭難者とオアシスの間の弧容量はどれも 1 (正整数なら何でもよい)

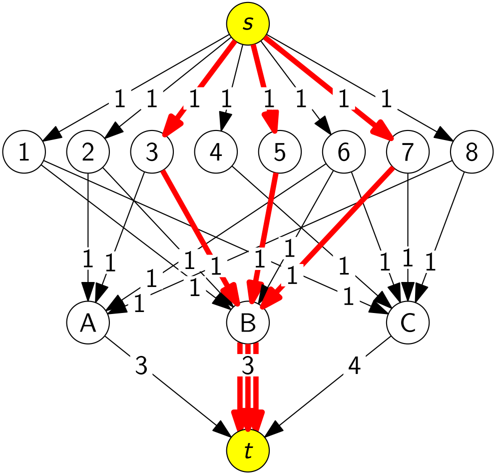


最大流問題としてのモデル化

オアシスと t の間の弧容量はオアシスの救護可能人数

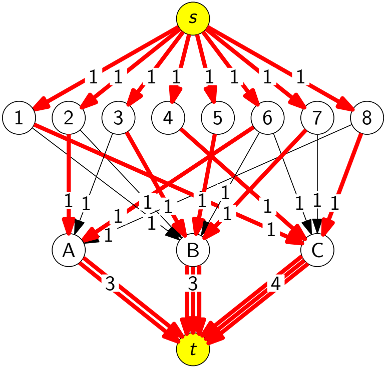


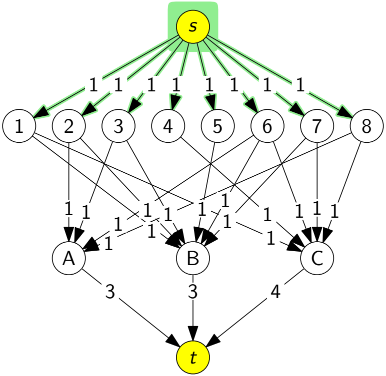
直感：オアシス B で遭難者 3，5，7 を救護してる様子



最大流と最小カット

増加道法を適用すると，例えば，次の最大流と最小カットが得られる





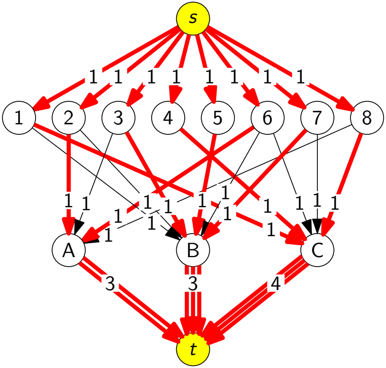
最大流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量 $= 8$

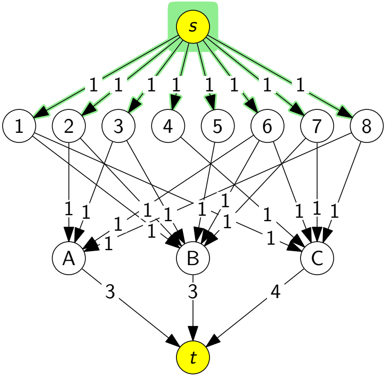
「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

最大流と最小カット：補足

増加道法を適用すると，例えば，次の最大流と最小カットが得られる





最大流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量 $= 8$

補足：整数流定理の帰結

整数流定理より，どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

$\therefore$ 流れ (という連続的なもの) が割当 (という離散的なもの) に対応させられる

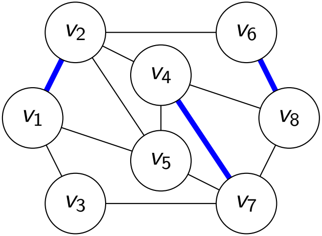
目次

グラフにおけるマッチング

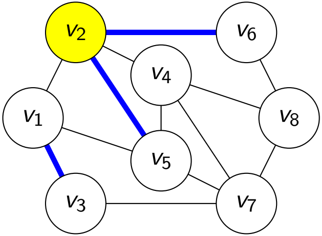
無向グラフ $G = (V, E)$

定義 (復習)：マッチングとは？

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

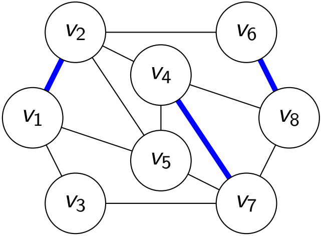
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

最大マッチング

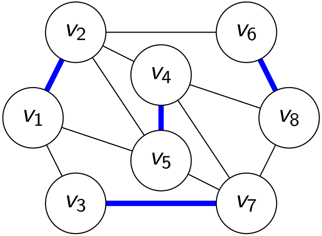
無向グラフ $G = (V, E)$

定義 (復習)：最大マッチングとは？

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



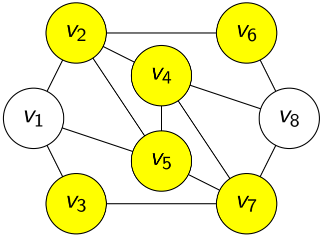
最大マッチングである

頂点被覆

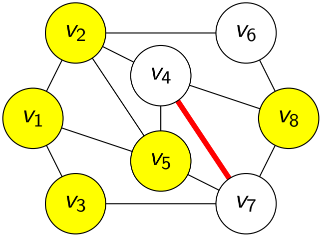
無向グラフ $G = (V, E)$

定義 (復習)：頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

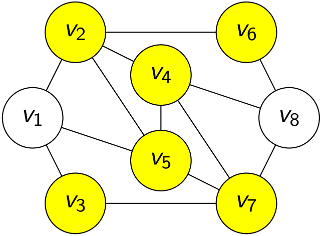
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

最小頂点被覆

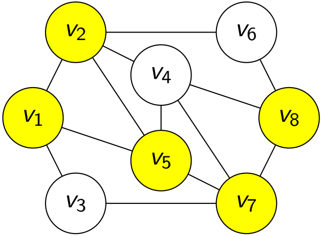
無向グラフ $G = (V, E)$

定義 (復習)：最小頂点被覆とは？

G の最小頂点被覆とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で,
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

双対性：ここまでのまとめ

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (不成立の場合も)

最大マッチングの辺数 $\stackrel{?}{=}$ 最小頂点被覆の頂点数

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大流の値 $\leq$ 最小 s,t カットの容量

強双対性 (成立)

最大流の値 $=$ 最小 s,t カットの容量

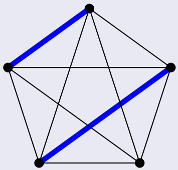
加えて，整数流定理

頂点被覆の重要性：注意

注意

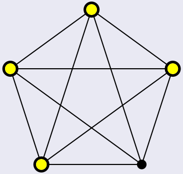
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 2

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

双対性：今日の内容

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (二部グラフでは成立)

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

König–Egerváry の定理

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大流の値 $\leq$ 最小 s, t カットの容量

強双対性 (成立)

最大流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量

加えて，整数流定理

D. Kőnig と J. Egerváry

Dénes Kőnig
ケーニグ
(1894–1944)

Jenő Egerváry
エゲルヴァーリ
(1891–1958)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

http://www.cs.elte.hu/egres/www/intro.html

二部グラフ (復習)

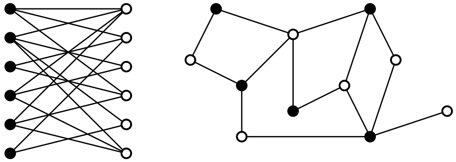
無向グラフ $G = (V, E)$

定義 (復習)：二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは,
- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

A と B を G の部集合と呼ぶ

二部グラフの例



二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理

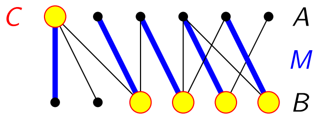
二部グラフ $G = (V, E)$

定理：Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

例：$|M| = |C| = 5$



König–Egerváry の定理：証明の方針

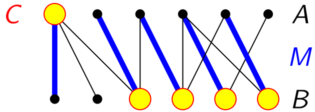
任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

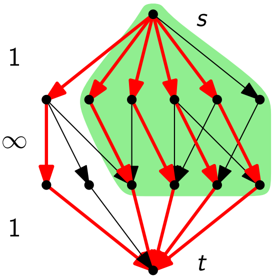
1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える $(V' = V \cup \{s, t\})$
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)

G の最大マッチング	$\leftrightarrow$	G' の最大流
G の最小頂点被覆	$\leftrightarrow$	G' の最小 s, t カット

3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数



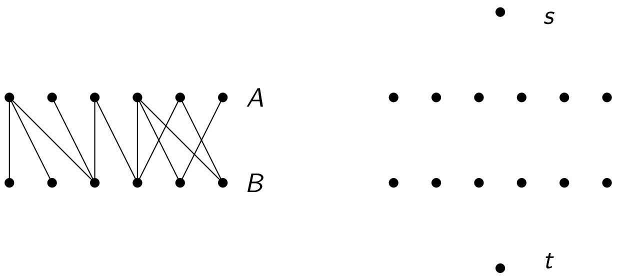


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s, t\}, \\ A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\ &\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\} \end{aligned}$$

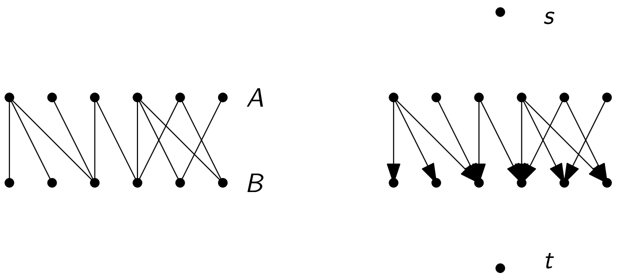


König–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考え，その部集合を A, B とする

- 次のように有向グラフ $G' = (V', A')$ を作る

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{s, t\}, \\
A' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\
&\quad \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}
\end{aligned}
$$

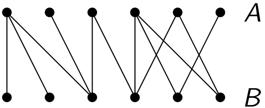


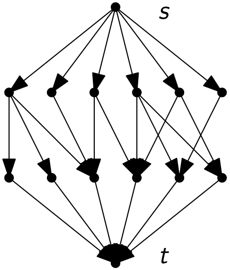
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G=(V,E)$ を考え，その部集合を A,B とする

- 次のように有向グラフ $G'=(V',A')$ を作る

$$
\begin{aligned}
V' &= V \cup \{s,t\}, \\
A' &= \{(u,v) \mid \{u,v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \\
&\quad \{(s,u) \mid u \in A\} \cup \{(v,t) \mid v \in B\}
\end{aligned}
$$



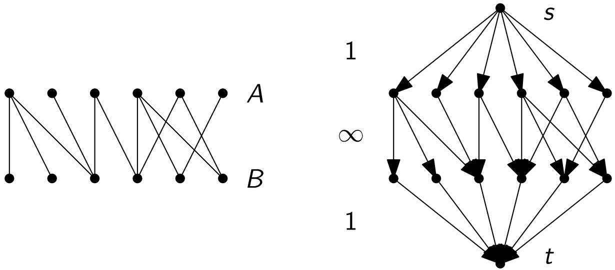


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (容量の決定)

- G' の各弧 (x, y) に対して容量を次のように定める

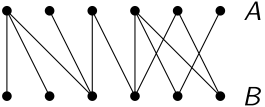
$$c((x,y)) = \begin{cases} 1 & (x = s \text{ または } y = t \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

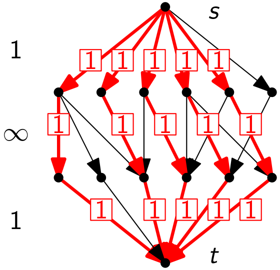
- 注：「∞」は「十分大きな整数」であると見なす



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (定理の適用)

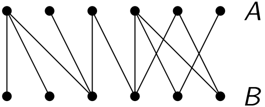
- 最大流最小カット定理より，G' において
$$s \text{ から } t \text{ へ至る最大流の値} = \text{最小 } s,t \text{ カットの容量}$$
- 整数流定理より，各弧における流量が整数である最大流が存在
- そのような整数最大流を $f\colon A' \to \mathbb{Z}$ とする

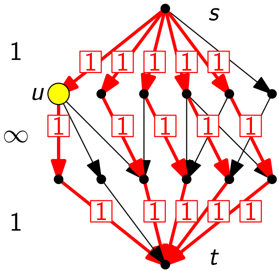




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (1))

- 容量制約より，任意の $(s, u) \in A'$ に対して
$$0 \leq f((s, u)) \leq 1$$
- f の整数性より，$f((s, u))$ は 0 か 1



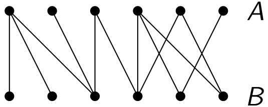


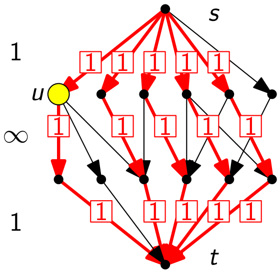
König–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (2))

- 流量保存制約より，任意の $u \in A$ に対して，

$$f((s,u)) = \sum_{v \in B : (u,v) \in A'} f((u,v))$$

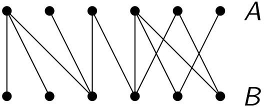
- 左辺 $f((s,u))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((s,u))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v)) = 1$ と $(u,v) \in A'$ を満たす $v \in B$ が
  ただ 1 つ存在する ....(性質 1)

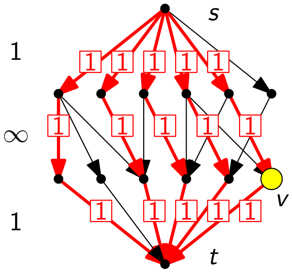




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (3))

- 容量制約より，任意の $(v,t) \in A'$ に対して
$$0 \le f((v,t)) \le 1$$
- f の整数性より，$f((v,t))$ は 0 か 1



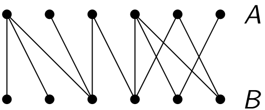


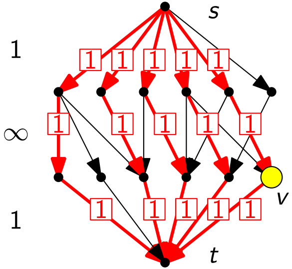
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (4))

- 流量保存制約より，任意の $v \in B$ に対して，

$$f((v,t)) = \sum_{u \in A : (u,v) \in A'} f((u,v))$$

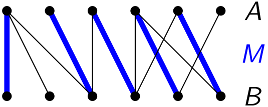
- 左辺 $f((v,t))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((v,t))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v)) = 1$ と $(u,v) \in A'$ を満たす $u \in A$ が
  ただ 1 つ存在する .... (性質 2)

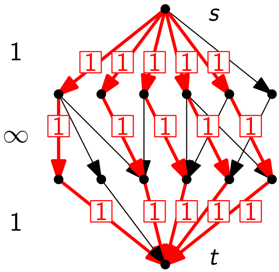




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (5))

- ここで，
$$M = \{\{u, v\} \in E \mid f((u, v)) = 1\}$$
とすると，性質 1 と性質 2 から M は G のマッチング
- また，$\mathtt{val}(f) = |M|$ である

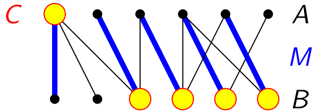


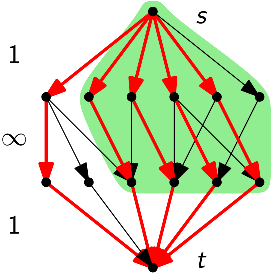


Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針 (再掲)

任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える $(V' = V \cup \{s, t\})$
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)
$$\begin{array}{lcl} G \text{ の最大マッチング} & \leftrightarrow & G' \text{ の最大流} \\ G \text{ の最小頂点被覆} & \leftrightarrow & G' \text{ の最小 } s,t \text{ カット} \end{array}$$
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，
$$\text{最大マッチングの辺数} = \text{最小頂点被覆の頂点数}$$

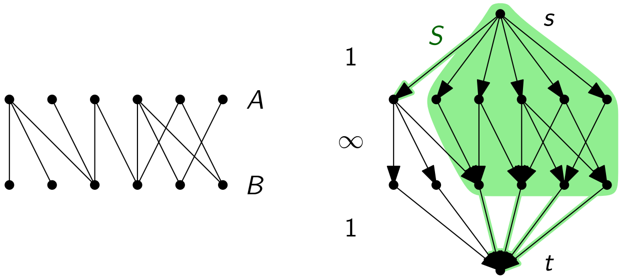




König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s,t カット S を考える
- このとき，s,t カットの定義より，$s \in S$ かつ $t \notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s,t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$ なので，

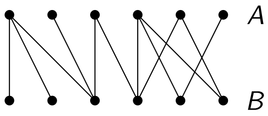
$$\mathrm{cap}(S) \leq \mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$$

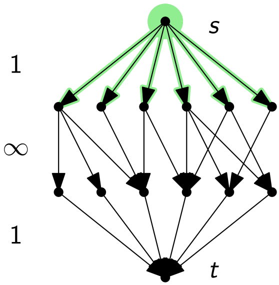


König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s, t カット S を考える
- このとき，s, t カットの定義より，$s \in S$ かつ $t \notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s, t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$ なので，

$$\mathrm{cap}(S) \le \mathrm{cap}(\{s\}) = |A|$$





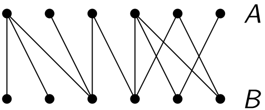
König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (2))

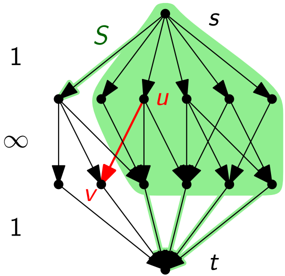
観察 3

$u \in S$, $v \notin S$, $(u, v) \in A'$ となる $u \in A$ と $v \in B$ は存在しない

なぜか？

- 存在するとすると，$\mathrm{cap}(S) \geq c((u, v)) = \infty$
- これは，$\mathrm{cap}(S) \leq |A| < \infty$ に矛盾



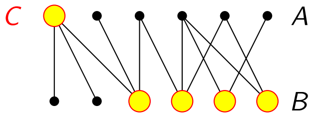


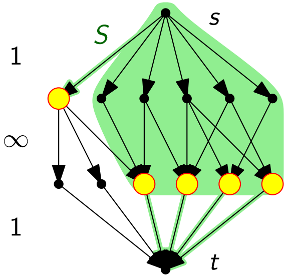
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (3))

- ここで，$C = (A - S) \cup (B \cap S)$ とする

今から確かめること

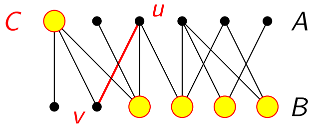
1. この C が G の最小頂点被覆となること
2. $|C| = \mathrm{cap}(S)$

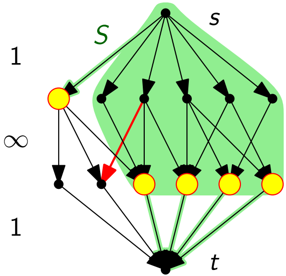




König–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (4))

- C が G の頂点被覆でないと仮定する
- つまり，
  ある $\{u, v\} \in E$ $(u \in A, v \in B)$ が存在して，$u \notin C$ かつ $v \notin C$
- $u \in A$ かつ $u \notin A - S$ なので，$u \in S$
- $v \in B$ かつ $v \notin B \cap S$ なので，$v \notin S$
- これは観察 3 に矛盾し，つまり，C は G の頂点被覆である．

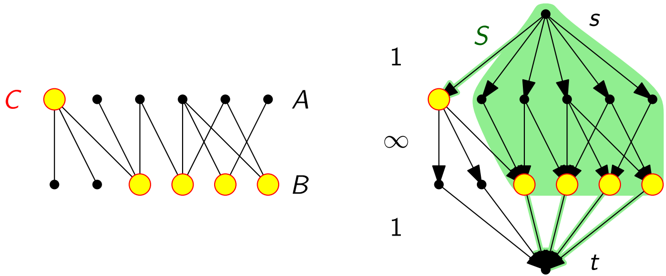




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (5))

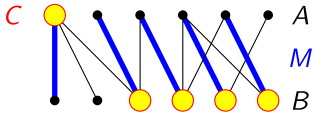
観察 3 から

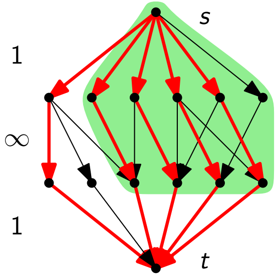
$$
\begin{aligned}
\mathrm{cap}(S) &= \sum_{u \in A : u \notin S} c((s,u)) + \sum_{v \in B : v \in S} c((v,t)) \\
&= \sum_{u \in A - S} 1 + \sum_{v \in B \cap S} 1 \\
&= |A - S| + |B \cap S| = |(A - S) \cup (B \cap S)| = |C|
\end{aligned}
$$



Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (1))

- 流れ f から，最大マッチングの辺数 $\geq |M| = \mathtt{val}(f)$
- カット S から，最小頂点被覆の頂点数 $\leq |C| = \mathrm{cap}(S)$
- 最大流最小カット定理より，$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$



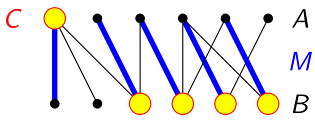


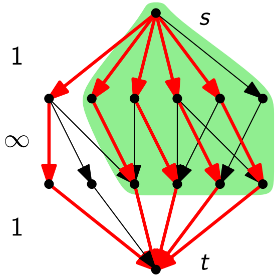
König–Egerváry の定理：証明 (まとめ (2))

- したがって，マッチングと頂点被覆の弱双対性より

$$\begin{aligned} \mathtt{val}(f) &\leq \text{最大マッチングの辺数} \\ &\leq \text{最小頂点被覆の頂点数} \\ &\leq \mathtt{cap}(S) = \mathtt{val}(f) \end{aligned}$$

- すなわち，最大マッチングの辺数 = 最小頂点被覆の頂点数 □





二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理：補足

二部グラフ $G = (V, E)$

定理：Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

補足

実験第一で扱った「二部グラフの最大マッチング」における増加道法は
第 6 回講義で紹介した最大流問題に対する増加道法を
二部グラフの最大マッチング問題に適用したもの

目次

MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

質問

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

ちょっと観察

MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了
- しかし，このとき，BOS は NYY から 8 勝している
- つまり，BOS の最終成績は 77 勝以上
- ∴ DET は優勝できない

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ここからの目標

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

ここからの目標

DET が優勝できるかどうか，最大流問題を使って判定する

最大流問題としてのモデル化：着眼点

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYY と BAL に対して「3」という勝利を割り当てる

DET の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

DET は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

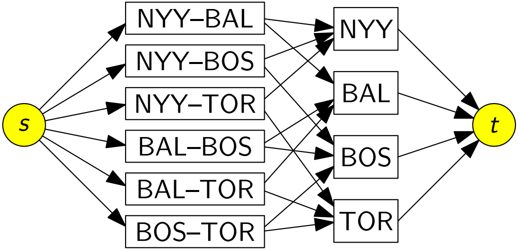
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

DET の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

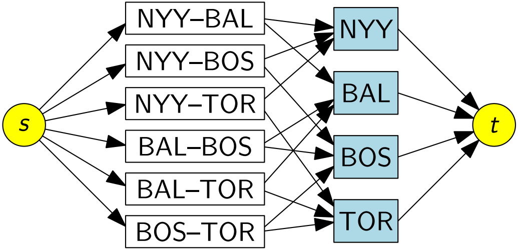


有向グラフの構成

DET の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

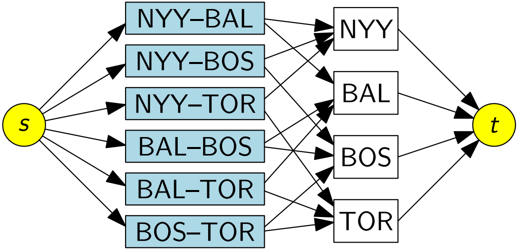


各チームに対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

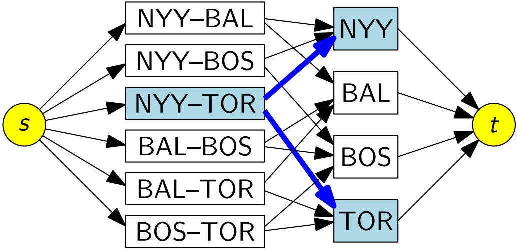


各対戦に対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

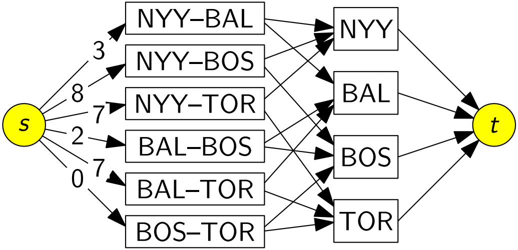


対戦を行うチームに向かって弧を引く

DET の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

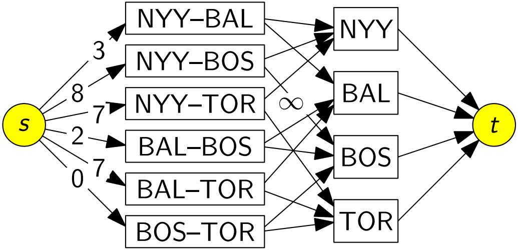


残り対戦数

DET の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

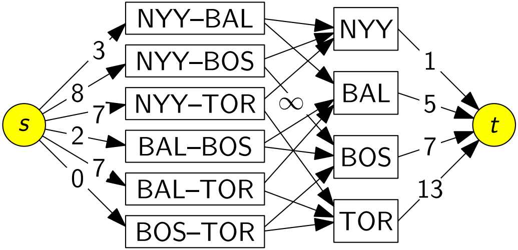


「真ん中」の弧の容量はどれも ∞

DET の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

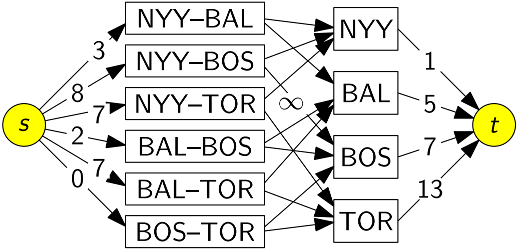


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

DET の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

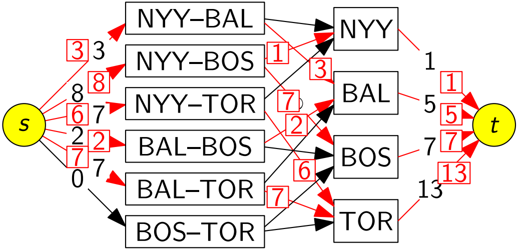


最大流の値が $3+8+7+2+7+0=27 \Leftrightarrow$ DET は優勝可能

DET の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

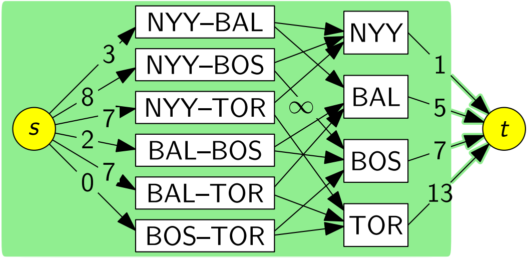


これが最大流で，その値は 26

DET の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

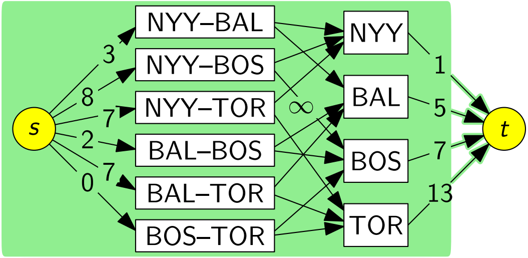


なぜならば，容量が 26 のカットが存在するから

DET の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0



結論：DET は優勝できない

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- 最大流問題を用いた優勝可能性判定
  - Schwartz (1966)
- t 位以上になれるか，の判定は NP 困難 (難しい)
  - McCormick (1999)
- 優勝可能性判定のための高速アルゴリズム
  - Wayne (2001)
  - Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - Gusfield, Martel (2002)

「NP 困難性」については『計算理論』を参照

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

(a, b, c)-規則：勝ち a 点，引き分け b 点，負け c 点

(MLB は $(1, 0, 0)$-規則)

- $(2, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ 最大流問題 (1990 年までの FIFA)
  - Schwartz (1966)
- $(3, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ NP 困難 (1990 年以降の FIFA)
  - Kern, Paulusma (2001)
  - Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)
- $a = b$ または $b = c$ または $a + c = 2b$ $\rightsquigarrow$ 最大流問題
  そうでないとき $\rightsquigarrow$ NP 困難
  - Kern, Paulusma (2001)

「NP 困難性」については『計算理論』を参照

目次

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題を用いて次の問題をモデル化できる

- 割当問題
- 二部グラフにおける最大マッチング問題
- リーグ戦における優勝可能性判定問題

次回：最大流問題を用いたモデル化 (2)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次