グラフとネットワーク　第 5 回
マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 5 月 24 日

最終更新：2019 年 5 月 27 日　11:26

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)

* 休み (5/3)
* 休講 (5/10)

4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)

- 中間試験 (6/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) (8/2)

- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

- 日時，教室：6 月 7 日 (金) 13:00–14:30 @ 西 2 号館 101 教室
- 出題範囲
  - 第 1 回講義スライドの最初から第 5 回講義スライドの最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ :「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

格言

- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

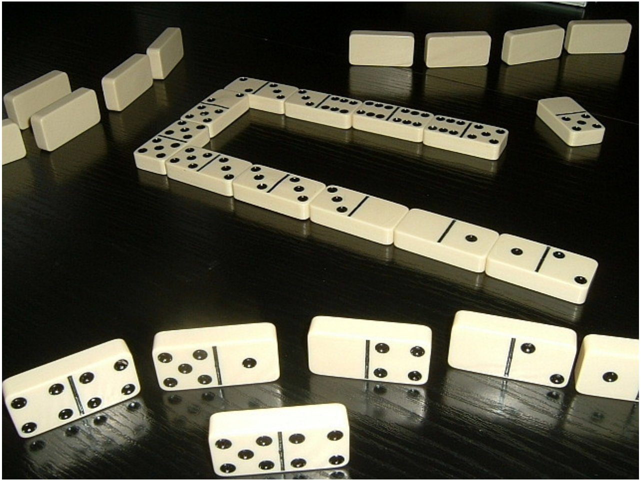
今日の目標

二部グラフの完全マッチングを使って問題を解決する例を見る

- ドミノ・タイリング
- トランプ・マジック？
- 四目並べ

目次

ドミノ

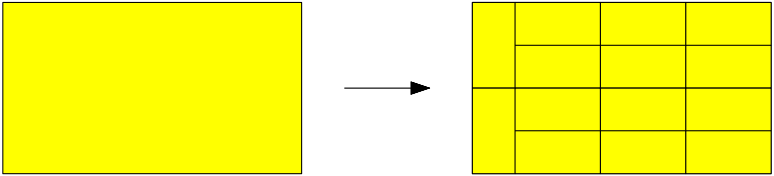


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominospiel.JPG

ドミノ・タイリング

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominoes_tiles.jpg

ドミノ・タイリング：問題



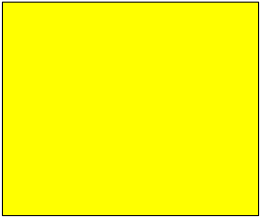
考えたい問題

与えられた盤面をドミノ牌で敷き詰められるか？

タイリング ＝ 敷き詰め

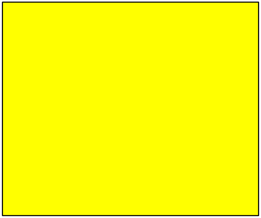
ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？



ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？

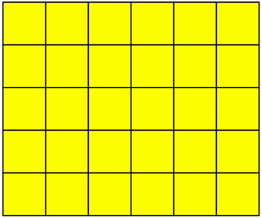


簡単な考察

敷き詰められるならば，マス目の沿って敷き詰めないといけない

ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？

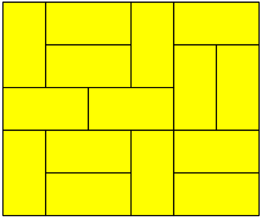


簡単な考察

敷き詰められるならば，マス目の沿って敷き詰めないといけない

ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？

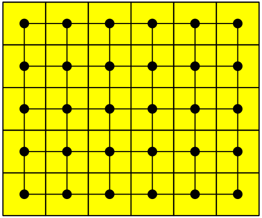


簡単な考察

敷き詰められるならば，マス目の沿って敷き詰めないといけない

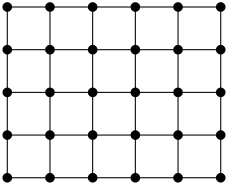
ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



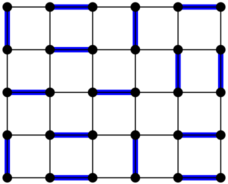
ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



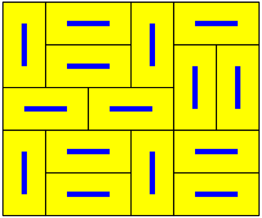
ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



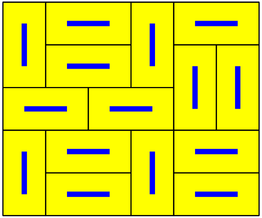
ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



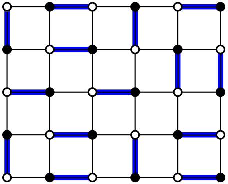
分かること

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 $\Leftrightarrow$
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

注：このように構成したグラフは二部グラフ

ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



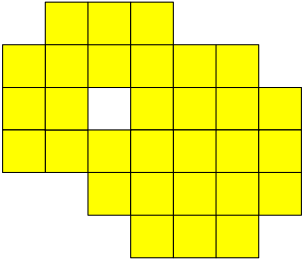
分かること

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 $\Leftrightarrow$
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

$\boxed{\text{注}}$：このように構成したグラフは<u>二部グラフ</u>

ドミノ・タイリング：例 2

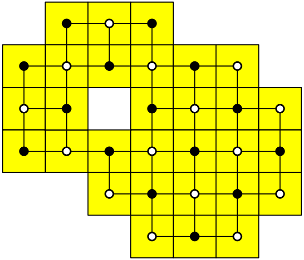
この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？



敷き詰められることを示すには？	→	敷き詰め方を見つければよい
敷き詰められないことを示すには？	→	?????

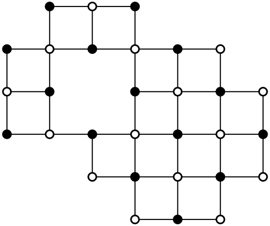
ドミノ・タイリング：例 2

グラフとしてモデル化



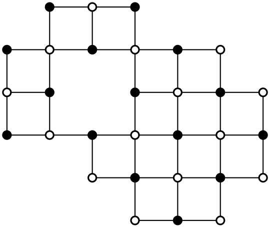
ドミノ・タイリング：例 2

グラフとしてモデル化



ドミノ・タイリング：例 2

グラフとしてモデル化

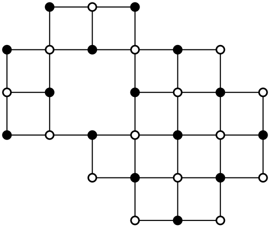


分かること (再掲)

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 $\Leftrightarrow$
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

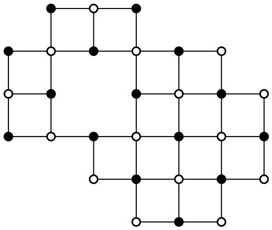
ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？

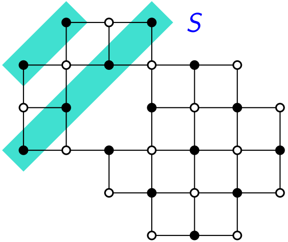


Hall の結婚定理

二部グラフ G が完全マッチングを持つ (部集合は A, B) $\Leftrightarrow$
任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



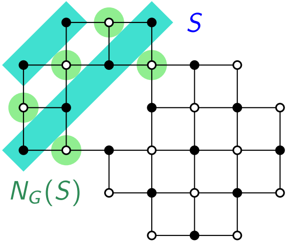
$|S| = 6$

Hall の結婚定理

二部グラフ G が完全マッチングを持つ (部集合は A, B) $\Leftrightarrow$
任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



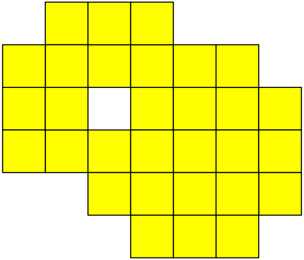
$$|S| = 6 > 5 = |N_G(S)|$$

Hall の結婚定理

二部グラフ G が完全マッチングを持つ (部集合は A, B) $\Leftrightarrow$
任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



$|S| = 6 > 5 = |N_G(S)|$

Hall の結婚定理

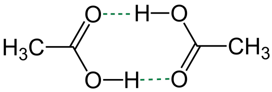
二部グラフ G が完全マッチングを持つ (部集合は A, B) $\Leftrightarrow$
任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

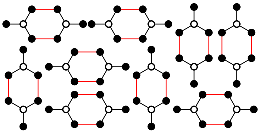
$\therefore$ この盤面はドミノ牌で敷き詰められない！

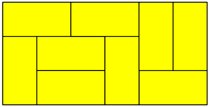
動機：なぜドミノ・タイリングを考えるのか？

統計力学からの動機

二量体モデル







https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Acetic_Acid_Hydrogenbridge_V.1.svg

統計力学で行いたいこと

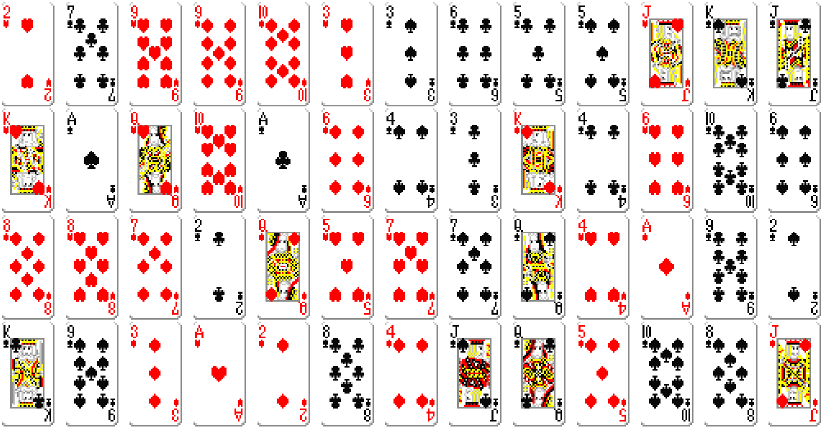
ドミノ・タイリングの総数計算

- ドミノ・タイリングが存在しない $\Leftrightarrow$ ドミノ・タイリングの総数 $= 0$

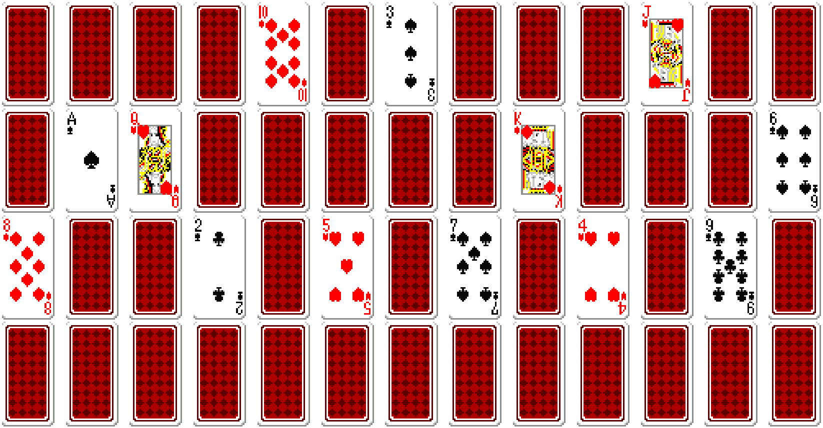
$\rightsquigarrow$ 『離散数理工学』

目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？(続)



トランプ・マジック (？) のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

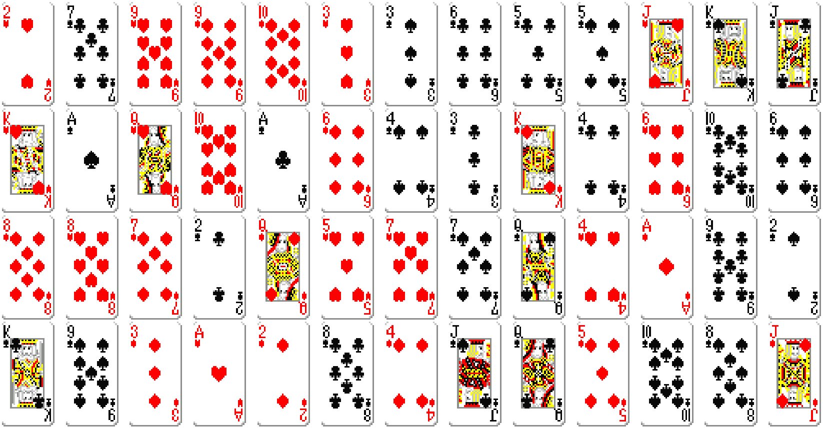
Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

$\rightsquigarrow$ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック (？) のからくり：グループの導入



a b c d e f g h i j k l m

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフ G の構成 (1)

13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)

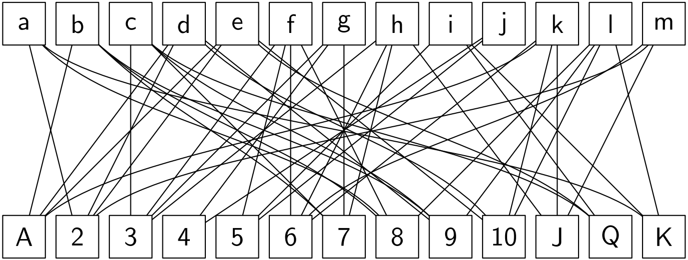
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック (？) のからくり：二部グラフ G の構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，



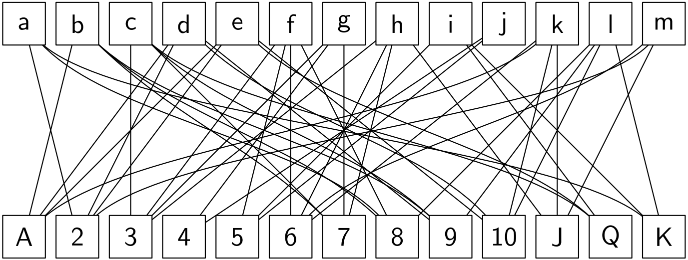
そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- $A =$ グループに対応する頂点の集合
- $B =$ カードのランクに対応する頂点の集合

この二部グラフを G とする

トランプ・マジック（？）のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

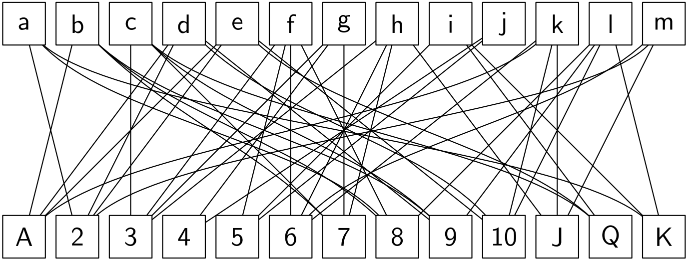


Hall の結婚定理

G が完全マッチングを持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認

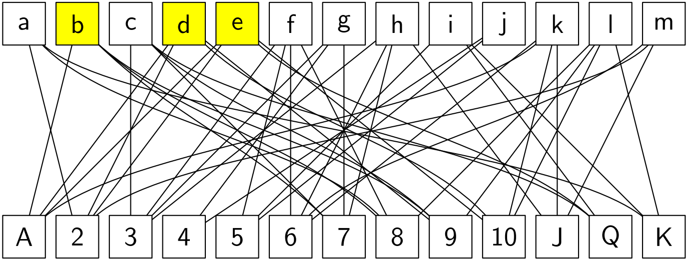
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N_G(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認

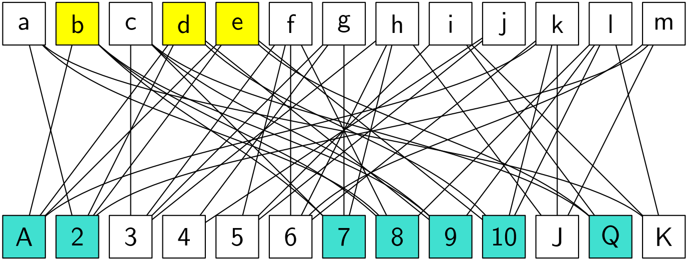
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N_G(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認

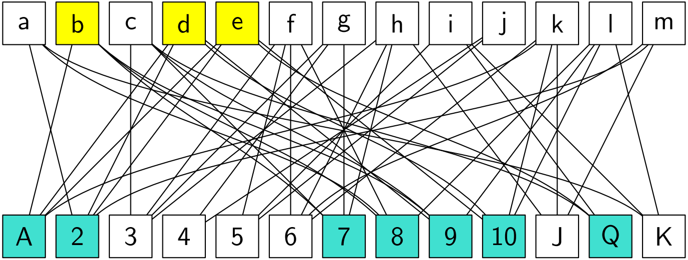
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N_G(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

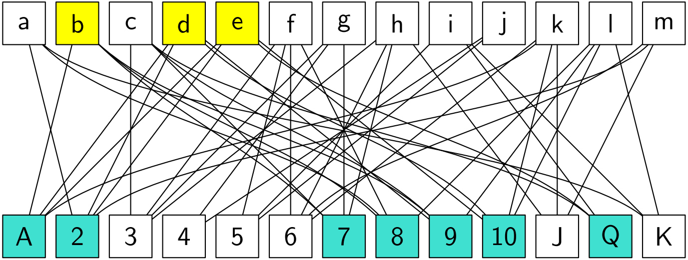
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N_G(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N_G(S)|$

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認（続き）

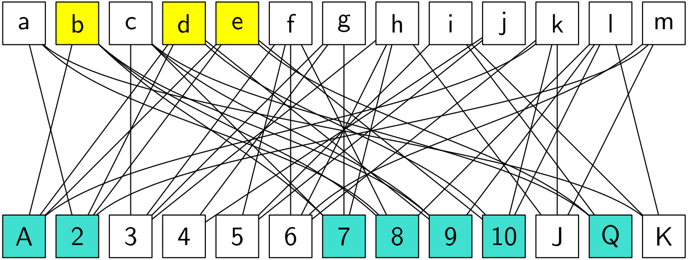
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N_G(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N_G(S)|$
- 背理法：$|S| > |N_G(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N_G(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない

トランプ・マジック（？）のからくり：条件の確認（続き）

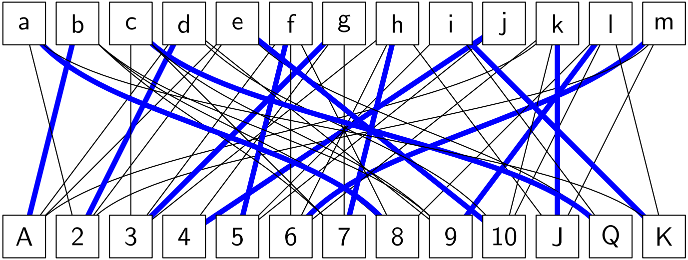
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N_G(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N_G(S)|$
- 背理法：$|S| > |N_G(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N_G(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない
- よって，$|S| \leq |N_G(S)|$ でないといけない

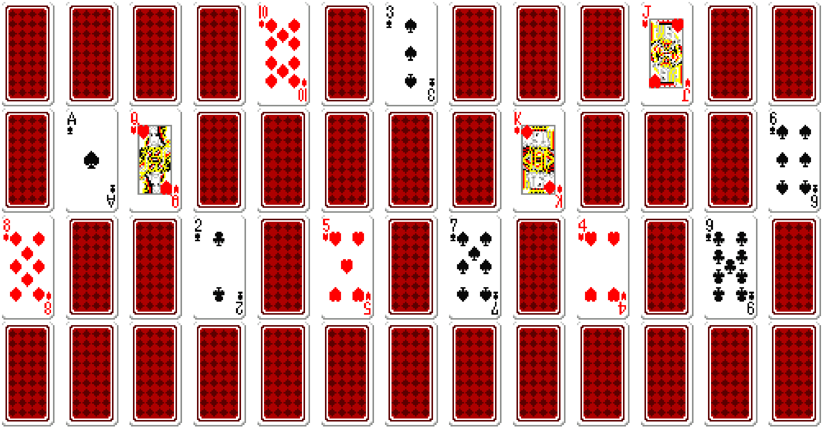
トランプ・マジック (？) のからくり：条件の確認 (続き)

つまり，結婚条件が必ず成り立つ．



- つまり，完全マッチングが存在する
- そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる □

トランプ・マジック?: 確認

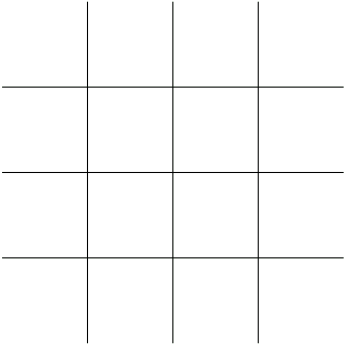


a b c d e f g h i j k l m

目次

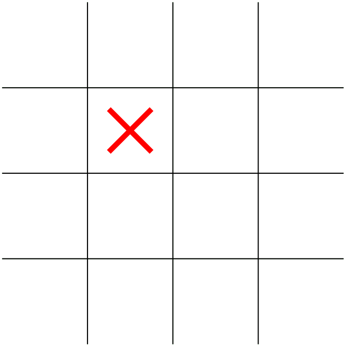
1. ドミノ・タイリング
2. トランプ・マジック？
3. 四目並べ
4. 今日のまとめ

四目並べ



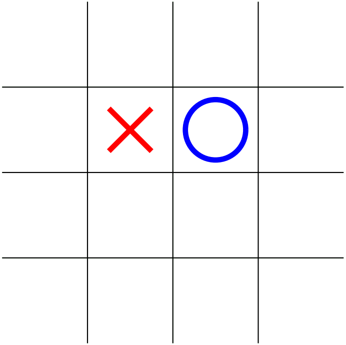
「斜め」は考えないとする

四目並べ



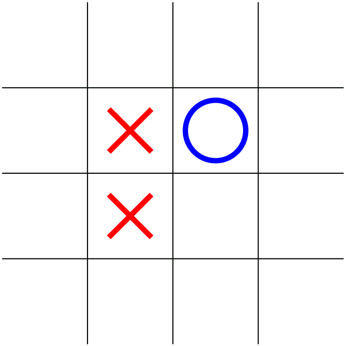
「斜め」は考えないとする

四目並べ



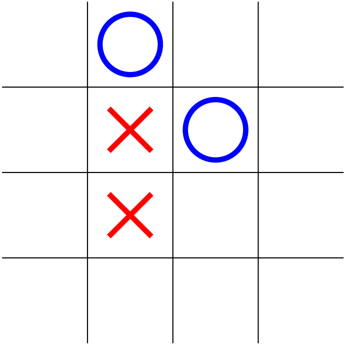
「斜め」は考えないとする

四目並べ



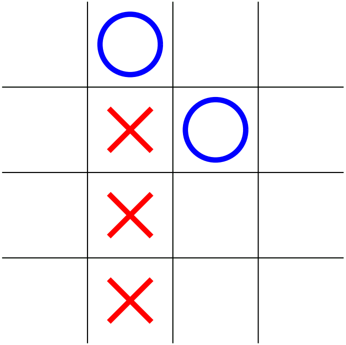
「斜め」は考えないとする

四目並べ



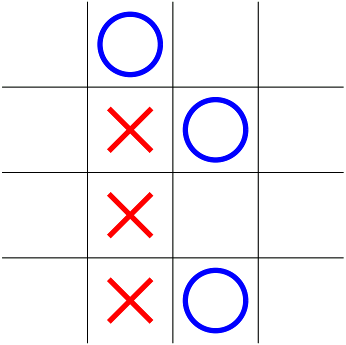
「斜め」は考えないとする

四目並べ



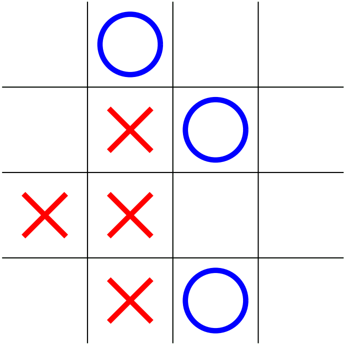
「斜め」は考えないとする

四目並べ



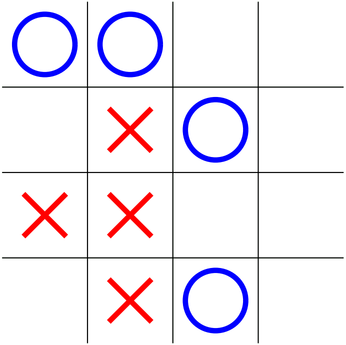
「斜め」は考えないとする

四目並べ



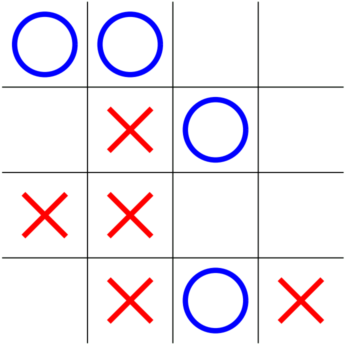
「斜め」は考えないとする

四目並べ



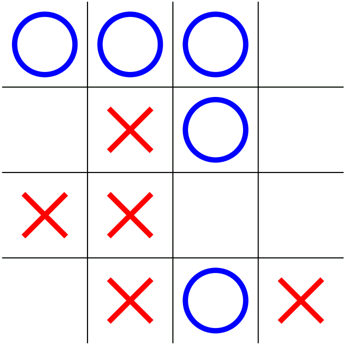
「斜め」は考えないとする

四目並べ



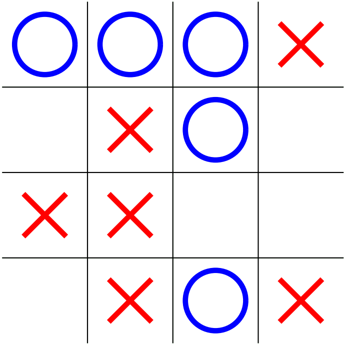
「斜め」は考えないとする

四目並べ



「斜め」は考えないとする

四目並べ



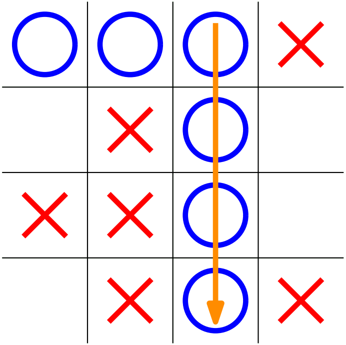
「斜め」は考えないとする

四目並べ

○	○	○	×
	×	○	
×	×	○	
	×	○	×

「斜め」は考えないとする

四目並べ

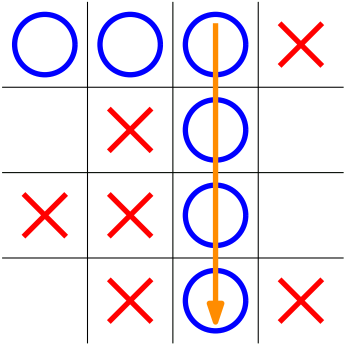


「斜め」は考えないとする

四目並べで後手は負けない

命題：四目並べの必勝戦略

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)



証明：Hall の結婚定理を使う

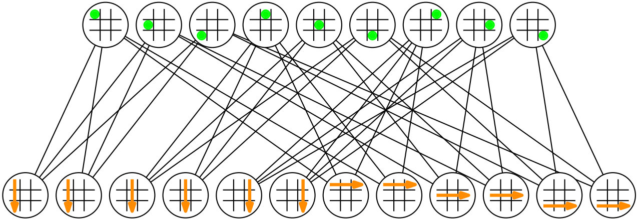
四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の構成

2 種類の頂点

- マス頂点：盤面の各マスに対応
- 列頂点：盤面の各列 (横と縦) に対応，各列に対して 2 つずつ

マス頂点と列頂点の間に辺を引くのは

- 対応するマスが対応する列に含まれるとき

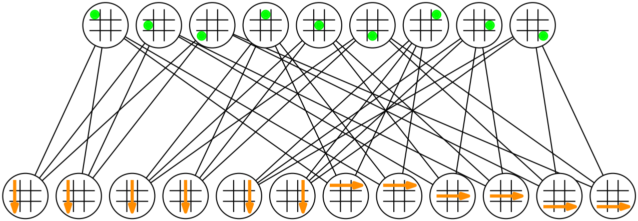


三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の性質

2 種類の頂点

- マス頂点
  - 総数 $= 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各マスは 2 つの列に含まれるから)
- 列頂点
  - 総数 $= 8 \times 2 = 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各列はマスを 4 つ含むから)



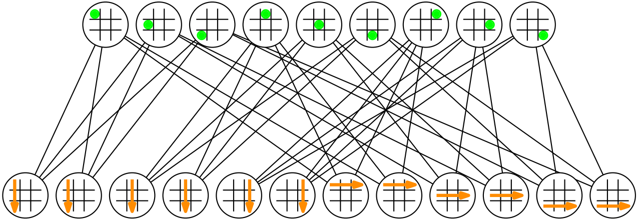
三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (1)

まず示すこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

Hall の定理を使って証明する

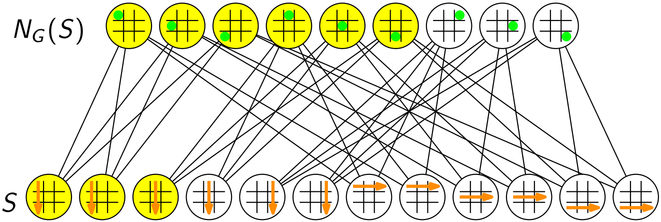


三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (2)

列頂点を任意にいくつか選んで，S という頂点集合を作る

- 示したいこと：$|S| \leq |N_G(S)|$
- S と $N_G(S)$ の間の隣接関係で，数え上げを行う



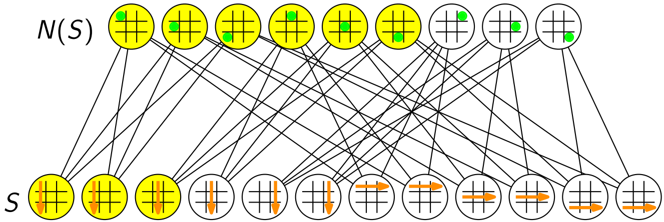
三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (3)

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & \multicolumn{5}{c}{N_G(S)} & \\
 & & v_1 & v_2 & & & v_h & \\
\hline
 & u_1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & = 4 \\
S & u_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & u_k & 1 & 1 & 1 & 1 & & = 4 \\
\hline
 & & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 &
\end{array}
$$

$u \in S$ と $v \in N_G(S)$ が隣接するなら「1」
そうでないときは「0」

- 各 $u \in S$ に対応する行の成分和 $= \deg_G(u) = 4$
- 各 $v \in N_G(S)$ に対応する列の成分和 $\leq \deg_G(v) = 4$



三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (3)

$$
N_G(S)
$$

$$
\begin{array}{cc|ccccc|l}
 & & v_1 & v_2 & & & v_h & \\
\hline
 & u_1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & = 4 \\
S & u_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & u_k & 1 & 1 & 1 & 1 & & = 4 \\
\hline
 & & \le 4 & \le 4 & \le 4 & \le 4 & \le 4 &
\end{array}
$$

$u \in S$ と $v \in N_G(S)$ が隣接するなら「1」
そうでないときは「0」

- 各 $u \in S$ に対応する行の成分和 $= \deg_G(u) = 4$
- 各 $v \in N_G(S)$ に対応する列の成分和 $\le \deg_G(v) = 4$

- $\therefore 4|S| =$ この行列の成分和 $\le 4|N_G(S)|$
- $\therefore |S| \le |N_G(S)|$

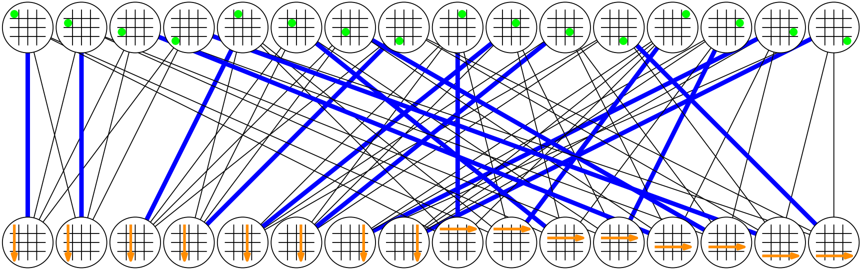
四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (4)

今示したこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

そのようなマッチング M を考える

- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている



四目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：ペアの作成

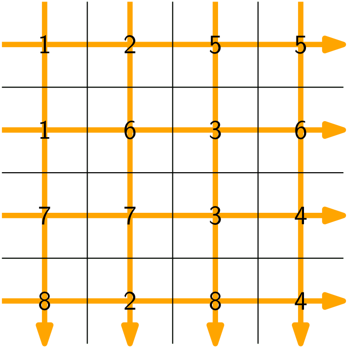
- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている
- その 2 つのマスに同じ記号を書いておく

1	2	5	5
1	6	3	6
7	7	3	4
8	2	8	4

四目並べで後手は負けない：ペアを用いた戦略

後手の戦略

- 先手の取ったマスに書かれた記号と同じ記号のマスを取る
- 各列には同じ記号が必ず 2 つあるので，先手は勝てない □



四目並べ：まとめ

四目並べについて

証明したこと

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

四目並べ：まとめ

四目並べについて

証明したこと

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

演習問題

先手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

直感：先手は後手よりも有利

つまり (結論)

四目並べは，引き分けで終わる

d 次元 n 目並べ：未解決問題

知られていること (演習問題)

「斜めもある四目並べ」は，引き分けで終わる

知られていること

「斜めもある n 目並べ」は，引き分けで終わる　(ただし，$n \geq 3$)

知られていること：3 次元

「斜めもある 3 次元 3 目並べ」は，先手が勝つ

知られていること：3 次元　(Patashnik '80)

「斜めもある 3 次元 4 目並べ」は，先手が勝つ

未解決問題：3 次元

「斜めもある 3 次元 5 目並べ」は，引き分けで終わるか？

目次

概要

今日の目標

二部グラフの完全マッチングを使って問題を解決する例を見る

- ドミノ・タイリング
- トランプ・マジック？
- 四目並べ

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次