

グラフとネットワーク 第2回
道と閉路：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019年4月19日

最終更新：2019年4月18日 13:19

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/12) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/19) |
| 3 | 木：数理 | (4/25) |
| * | 休み | (5/3) |
| * | 休講 | (5/10) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/17) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/24) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/31) |
| ● | 中間試験 | (6/7) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|-----------------------|--------|
| 7 | 最大流：モデル化 (1) — 割当 | (6/14) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 | (6/21) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/28) |
| 10 | 彩色：数理 | (7/5) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (7/12) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/19) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/26) |
| 14 | (授業等調整日) | (8/2) |
| | ● 期末試験 | (8/9?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

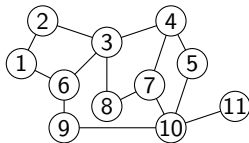
- ▶ 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- ▶ 最大性論法による証明の手法を理解し、使えるようになる

目次

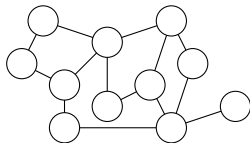
- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ

ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

○の中に何も書かないときは、頂点は何であるのか興味がないとき



ラベル付きグラフ



ラベルなしグラフ

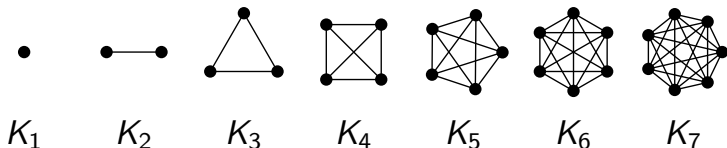
完全グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $n \in \mathbb{N}$

定義：完全グラフとは？

G が完全グラフであるとは、 V のどの2頂点も辺で結ばれていること

頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



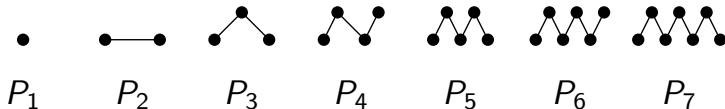
道 (パス, 路)

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

定義：道とは？

G が道であるとは、その頂点を 1 直線上に並べて、隣り合う頂点同士を辺で結ぶことによって得られること

頂点数 n の道を P_n と表記する



- ▶ P_n における次数 1 の頂点を P_n の端点と呼ぶ
- ▶ P_n は次数 1 の 2 頂点を結ぶ道とも呼ばれる
- ▶ P_n の辺数 $n - 1$ のことを P_n の長さと呼ぶ

(演習問題)

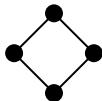
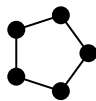
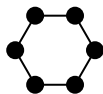
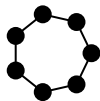
閉路 (サイクル)

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

定義：閉路とは？

G が閉路であるとは、その頂点を同一円上に並べて、隣り合う頂点同士を辺で結ぶことによって得られること

頂点数 n の閉路を C_n と表記する


 C_3

 C_4

 C_5

 C_6

 C_7

▶ C_n の辺数 n のことを C_n の長さと呼ぶ

(演習問題)

有向道 (パス)

有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $n \in \mathbb{N}$

定義：有向道とは？

G が有向道であるとは、その頂点を 1 直線上に並べて、隣り合う頂点同士を一様な向きを持つ弧で結ぶことによって得られること



有向道



有向道ではない

- ▶ 有向道における入次数 0 の頂点を始点, 出次数 0 の頂点を終点と呼ぶ
- ▶ 有向道は入次数 0 の頂点と出次数 0 の頂点を結ぶ
- ▶ 弧数 $n - 1$ のことをその長さと呼ぶ

有向閉路 (サイクル)

有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $n \in \mathbb{N}$

定義：有向閉路とは？

G が有向閉路であるとは、その頂点を同一円上に並べて、隣り合う頂点同士を時計回りに弧で結ぶことによって得られること



有向閉路



有向閉路ではない

- ▶ 弧数 n のことをその長さと呼ぶ
- ▶ 頂点数 1, 頂点数 2 の有向閉路もある

二部グラフ

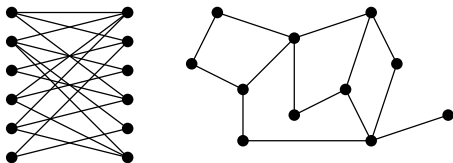
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が二部グラフであるとは、

- ▶ 頂点集合 V を2つの集合 A, B に分割できて
- ▶ どの辺 $e \in E$ も一 endpoint を A に持ち、もう一 endpoint を B に持つもの

二部グラフの例



二部グラフ

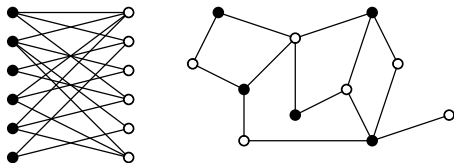
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が**二部グラフ**であるとは、

- ▶ 頂点集合 V を2つの集合 A, B に分割できて
- ▶ どの辺 $e \in E$ も一 endpoint を A に持ち、もう一 endpoint を B に持つもの

二部グラフの例



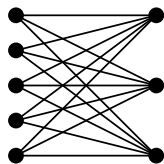
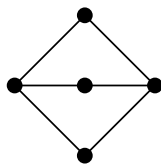
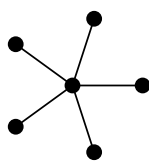
完全二部グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全二部グラフとは？

 G が完全二部グラフであるとは、

- ▶ 頂点集合 V を2つの集合 A, B に分割できて
- ▶ 任意の $u \in A$ と $v \in B$ が辺で結ばれ、それ以外に辺がないもの

 $|A| = m, |B| = n$ のとき、対応する完全二部グラフを $K_{m,n}$ と表記する $K_{5,3}$  $K_{2,3}$  $K_{1,5}$

目次

- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ

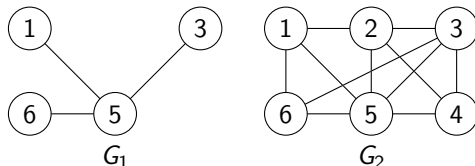
部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：部分グラフとは？

G_1 が G_2 の部分グラフであるとは、次を満たすこと

- ▶ $V_1 \subseteq V_2$
- ▶ $E_1 \subseteq E_2$

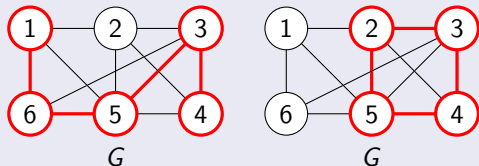


有向グラフの部分グラフも同様に定義

部分グラフとしての道と閉路

無向グラフ $G = (V, E)$ が道 (閉路) を部分グラフとして含むとき、その道 (閉路) の頂点を順に並べることで表現することがある

次の場合、1, 6, 5, 3, 4 は G に含まれる道、2, 3, 4, 5 は G に含まれる閉路



有向グラフに対しても同様

定義： u から v へ至る道とは？

u から v へ至る道とは、 u と v を端点とする道のこと

左上の例：1 から 4 へ至る道

目次

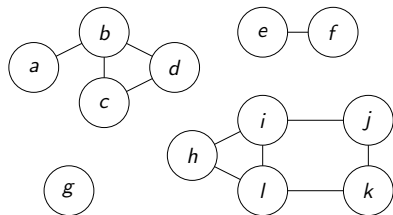
- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ

グラフの連結性

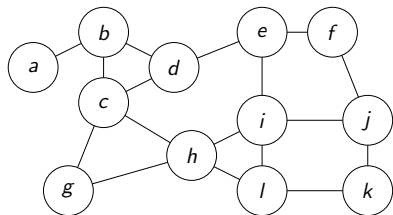
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフが連結であるとは？

G が**連結**であるとは、
 任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは**非連結**と呼ばれる

非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

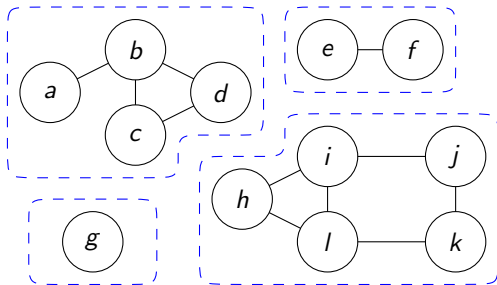
グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの連結成分とは？

 G の連結成分とは、 G の極大連結部分グラフのこと

（「極大」とは、グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」）

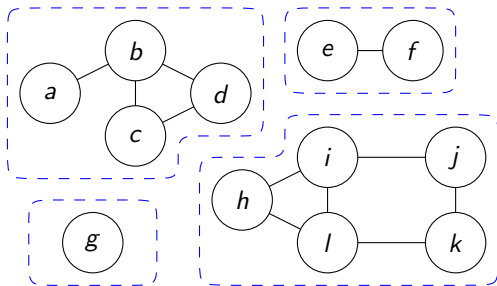


連結成分の数 = 4

グラフの孤立点

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：孤立点とは？

 G の孤立点とは、次数0の頂点のこと g は孤立点

グラフの切断辺

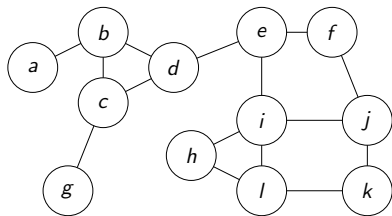
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

定義：グラフの切断辺とは？

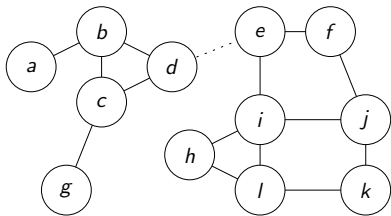
e が G の切断辺であるとは、
 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点

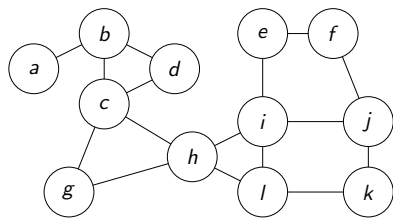
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

定義：グラフの切断点とは？

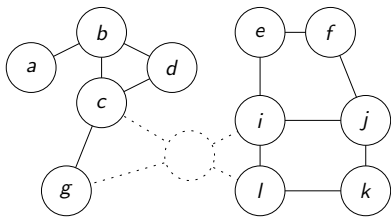
v が G の切断点であるとは、
 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点 (「 v を除去」とは、 v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



$G - h$

目次

- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質 : 最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

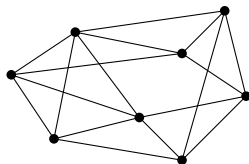
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例： $k = 4$ の場合の例



格言 (再掲)

例を通して, 直感を得る

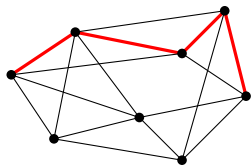
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例： $k = 4$ の場合の例



格言 (再掲)

例を通して, 直感を得る

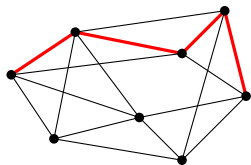
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質 : 最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例 : $k = 4$ の場合の例

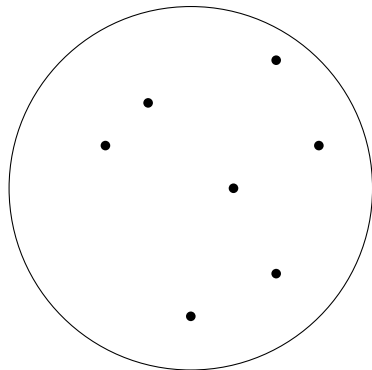


格言 (再掲)

例を通して, 直感を得る

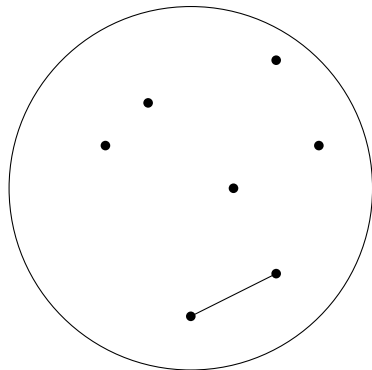
証明の方針 : G に含まれる長さ最大の道を考える

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

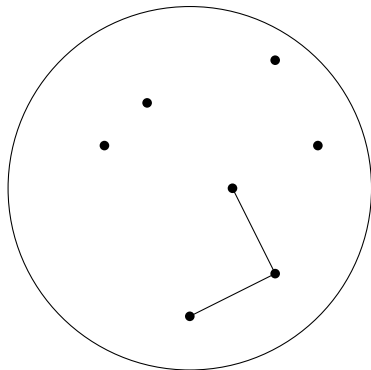
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

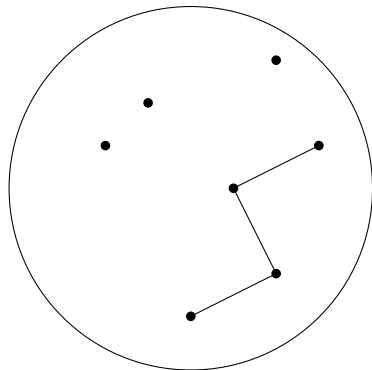
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

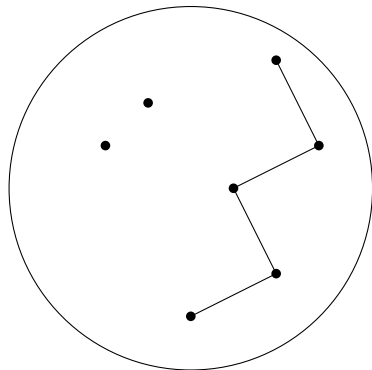
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

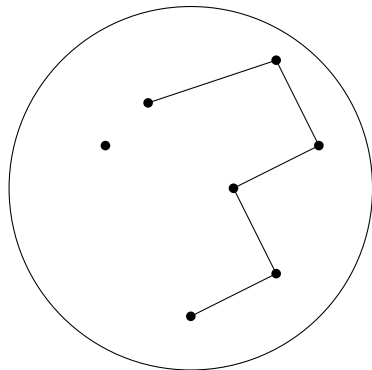
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

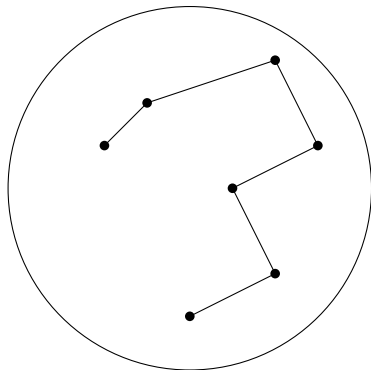
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

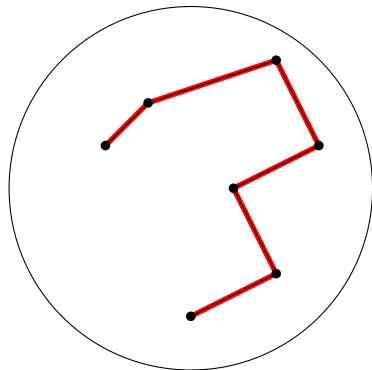
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

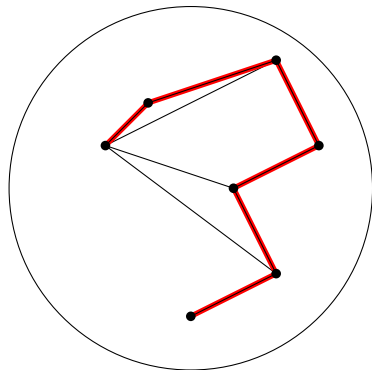
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

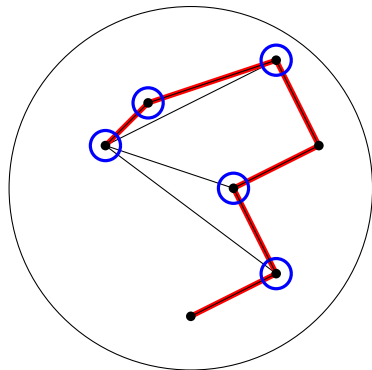
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす
 - ▶ 伸ばせなくなったときを考える
 - ▶ ...

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

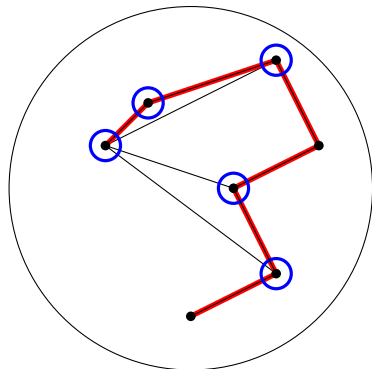
- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす
 - ▶ 伸ばせなくなったときを考える
 - ▶ ...

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす
 - ▶ 伸ばせなくなったときを考える
 - ▶ ...

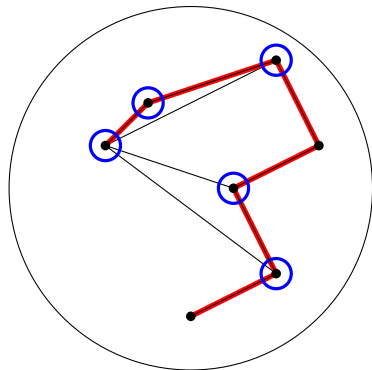
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす
 - ▶ 伸ばせなくなったときを考える
 - ▶ ...

⇒ はじめから「長さ最大の道」を考えれば十分

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

 $k = 4$ のときのイメージ図

- 1つの頂点から始めて、道を伸ばす
- ▶ 伸ばせるだけ伸ばす
 - ▶ 伸ばせなくなったときを考える
 - ▶ ...

⇒ はじめから「長さ最大の道」を考えれば十分

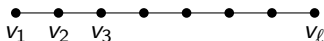
格言

「…を続けていくと最後には、…」は最大性論法 (最小性論法)

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする.
($|V|$ は有限なので, P は存在する.)

イメージ図



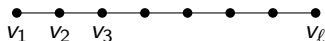
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。

▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.

イメージ図



□

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

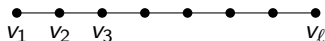
証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
 ($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

- ▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。
- ▶ v_1 が P の端点であるとする。

- ▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.



イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

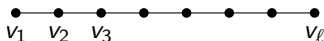
証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
 ($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

- ▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。
- ▶ v_1 が P の端点であるとする。
- ▶ P が長さ最大の道であることから、 v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である。

- ▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.



イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

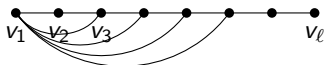
証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
 ($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

- ▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。
- ▶ v_1 が P の端点であるとする。
- ▶ P が長さ最大の道であることから、
 v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である。

- ▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.



イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

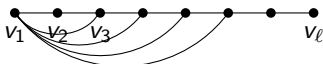
証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
 ($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

- ▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。
- ▶ v_1 が P の端点であるとする。
- ▶ P が長さ最大の道であることから、 v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である。
- ▶ したがって、

$$\ell - 1 = P \text{ における } v_1 \text{ 以外の頂点数}$$
- ▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.

□

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。
 ($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。

▶ v_1 が P の端点であるとする。

▶ P が長さ最大の道であることから、
 v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である。

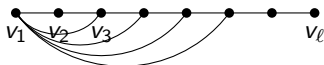
▶ したがって、

$$\ell - 1 = P \text{ における } v_1 \text{ 以外の頂点数} \geq \deg_G(v_1)$$

▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$.

□

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

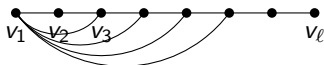
証明： G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする。

($|V|$ は有限なので、 P は存在する.)

- ▶ このとき、 $\ell \geq k + 1$ であることを示せばよい。
- ▶ v_1 が P の端点であるとする。
- ▶ P が長さ最大の道であることから、 v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である。
- ▶ したがって、

$$\ell - 1 = P \text{ における } v_1 \text{ 以外の頂点数} \geq \deg_G(v_1) \geq \delta(G) \geq k.$$
- ▶ したがって、 $\ell \geq k + 1$. □

イメージ図



証明手法：最大性論法，最小性論法

最大性論法とは？

離散数学における重要な証明手法の1つ

- 1 ある性質を満たす部分集合で，要素数最大のものを考える
- 2 その最大性を利用して，証明を進める

コメント

- ▶ 「最小次数が大きいグラフは長い道を含む」の証明は最大性論法に基づく
- ▶ グラフの頂点数が有限であることから，要素数最大の部分集合が存在することは確認できる
- ▶ 同様に「最小性論法」もある
- ▶ 他の例は後の演習問題と今後の講義の中で

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 1

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 1

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 1

$|V|$ が有限でないときは, どうなのか?

格言

仮定が成り立たない場合から, 性質を深く理解する

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 2

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 2：次は成り立つか？

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+2} を含む (?)

格言

結論を強くした場合から、性質を深く理解する

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 2

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 2：次は成り立つか？

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+2} を含む (?)

格言

結論を強くした場合から、性質を深く理解する

反例：完全グラフ K_{k+1}

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 2

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V|$ は有限), 自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 2：次は成り立つか？

G は P_{k+1} を含む $\Rightarrow \delta(G) \geq k$ (?)

格言

逆から，性質を深く理解する

反例：演習問題

目次

- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- ▶ 最大性論法による証明の手法を理解し、使えるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 代表的なグラフ
- ② 部分グラフとしての道と閉路
- ③ グラフの連結性と連結成分
- ④ 最大性論法による証明
- ⑤ 今日のまとめ