

グラフとネットワーク 第 1 回
グラフの定義：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 4 月 12 日

最終更新：2019 年 4 月 10 日 10:00

概要

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

どんな問題を扱うのか：例1 — 優勝可能性の判定

MLB アメリカンリーグ 東地区 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	59	28	—	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	—	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	—	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	—	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	—	20

NYN = ニューヨーク・ヤンキース, BAL = ボルティモア・オリオールズ,
 BOS = ボストン・レッドソックス, TOR = トロント・ブルージェイズ,
 DET = デトロイト・タイガース

優勝可能性判定問題

DETはまだ地区優勝が可能か？

(注：引き分けはない)

<https://s2.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html>

どんな問題を扱うのか：例1 — 優勝可能性の判定

MLB アメリカンリーグ 東地区 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	—	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	—	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	—	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	—	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	—	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース, BAL = ボルティモア・オリオールズ,
 BOS = ボストン・レッドソックス, TOR = トロント・ブルージェイズ,
 DET = デトロイト・タイガース

優勝可能性判定問題

DETはまだ地区優勝が可能か？

(注：引き分けはない)

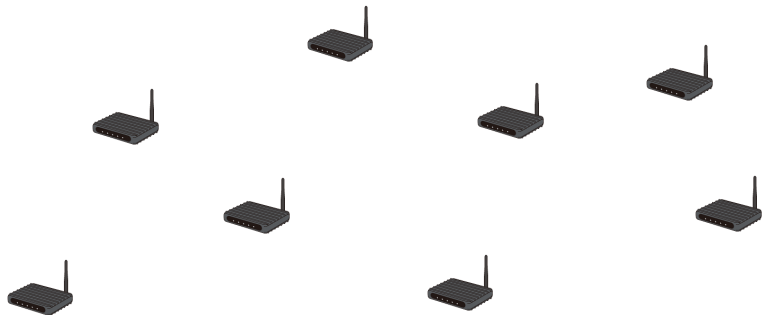
⇒ 最大流

<https://s2.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

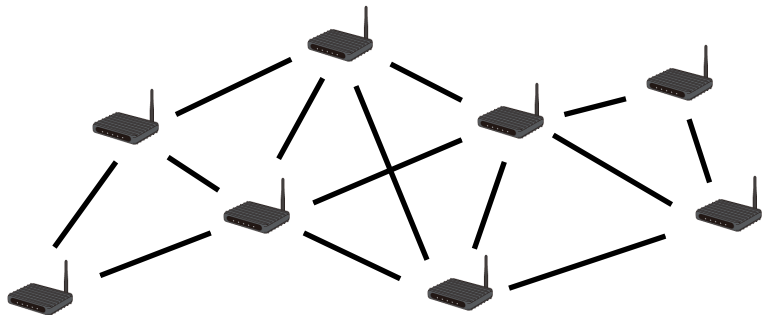


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

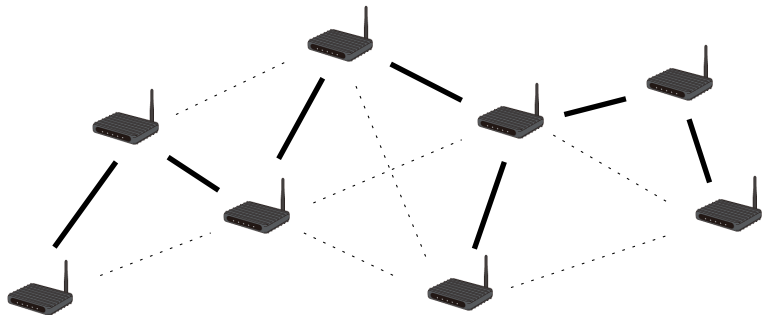


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

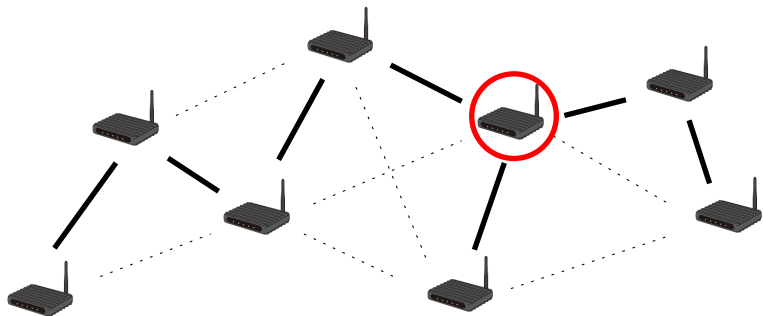


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

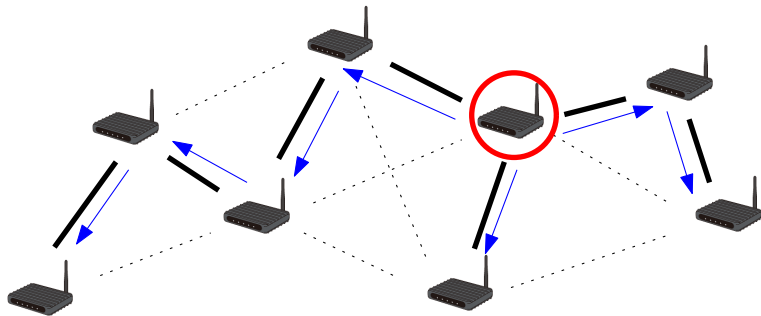


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

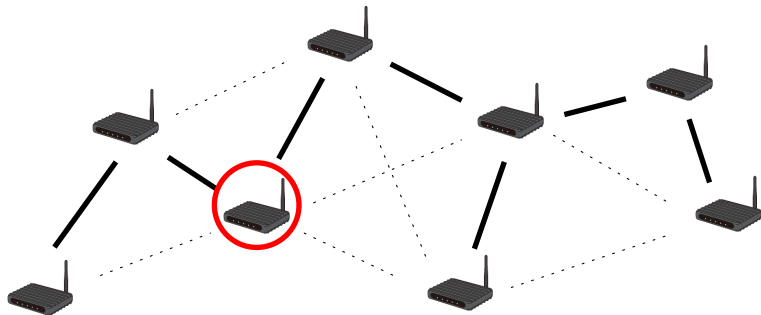


<https://www.logitech.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

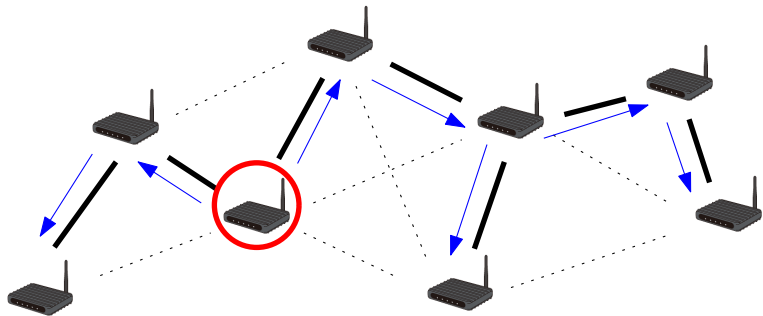


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

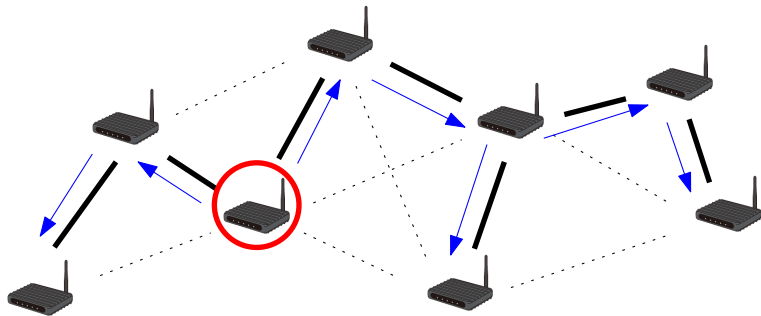


<https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

どんな問題を扱うのか：例2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

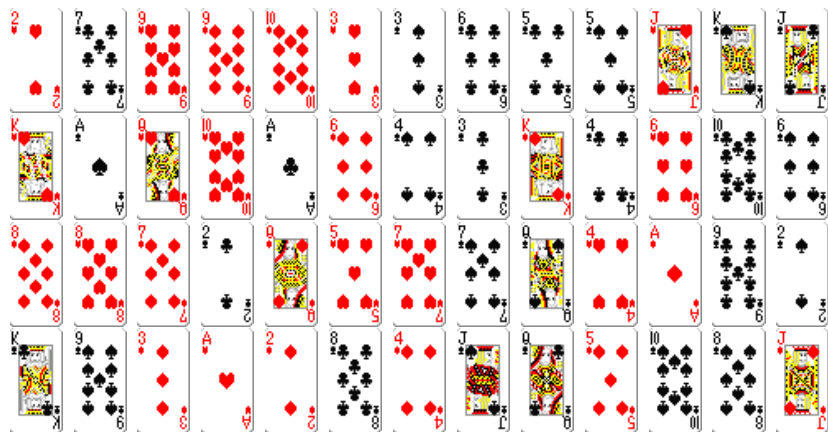
どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？



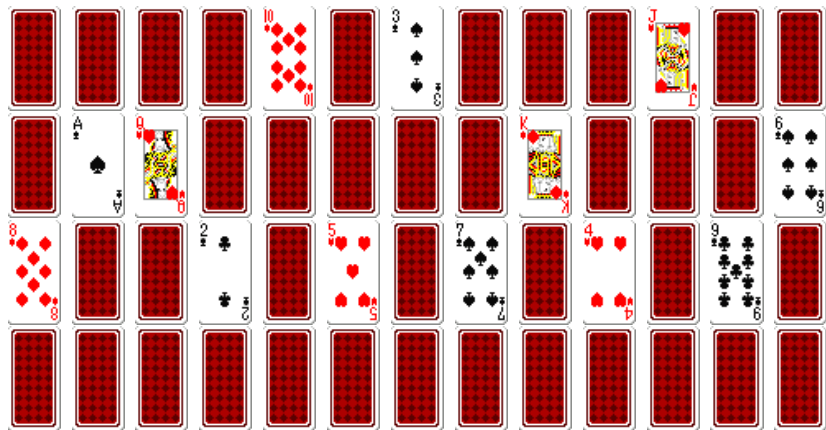
⇒ 全域木，連結性

<https://www.logitech.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/>

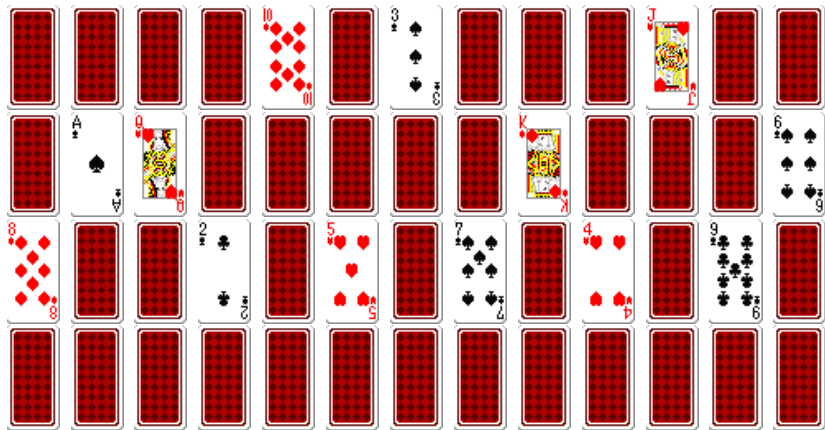
どんな問題を扱うのか：例3 — トランプ・マジック？



どんな問題を扱うのか：例3 — トランプ・マジック？



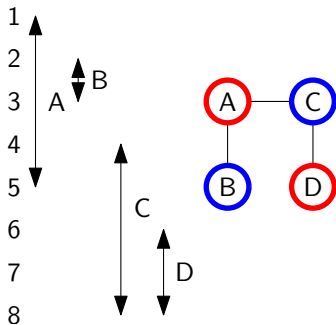
どんな問題を扱うのか：例3 — トランプ・マジック？



→ マッチング

どんな問題を扱うのか：例4 — コンパイラにおけるレジスタ割当

1: $A = 2$
 2: $B = 3$
 3: $B = B + 2$
 4: $C = A + 1$
 5: $A = C + 3$
 6: $D = 4$
 7: $D = C + 2$
 8: $C = 3$



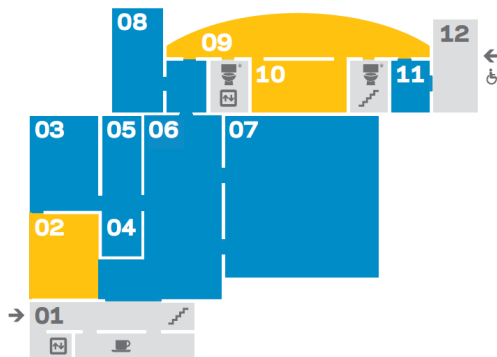
1: $R1 = 2$
 2: $R2 = 3$
 3: $R2 = R2 + 2$
 4: $R2 = R1 + 1$
 5: $R1 = R2 + 3$
 6: $R1 = 4$
 7: $R1 = R2 + 2$
 8: $R2 = 3$

⇒ 彩色

どんな問題を扱うのか：例5 — 監視カメラの設置

360度見渡せる監視カメラを何個設置すれば、隈なく監視できるのか？

MAIN LEVEL



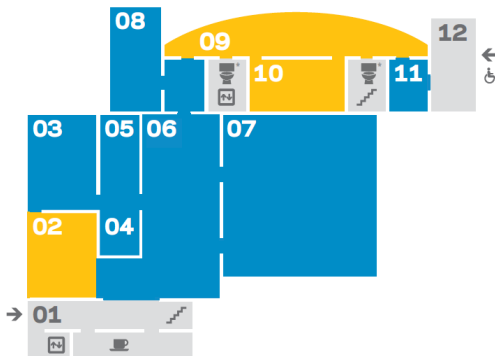
- 01 Krannert Art Museum
Main Entrance and Lobby
Peabody Drive Entrance
- 02 Encounters: The Arts of
Africa
- 03 West Gallery
Temporary Exhibitions
- 04 Light Court Gallery
Temporary Exhibitions
- 05 Rosann Gelvin Noel Annex
Temporary Exhibitions
- 06 Rosann Gelvin Noel Gallery
Temporary Exhibitions
- 07 East Gallery
Temporary Exhibitions
- 08 Contemporary Gallery
Temporary Exhibitions
- 09 Bow Gallery
European and American Art
Before 1940
- 10 Trees Gallery
European Art Before 1900
- 11 Kinkead Gallery
Temporary Exhibitions
- 12 Kinkead Pavilion
Sixth Street Entrance

<https://kam.illinois.edu/files/Map-main-f2017.png>

どんな問題を扱うのか：例5 — 監視カメラの設置

360度見渡せる監視カメラを何個設置すれば、隈なく監視できるのか？

MAIN LEVEL



- 01 Krannert Art Museum
Main Entrance and Lobby
Peabody Drive Entrance
- 02 Encounters: The Arts of
Africa
- 03 West Gallery
Temporary Exhibitions
- 04 Light Court Gallery
Temporary Exhibitions
- 05 Rosann Gelvin Noel Annex
Temporary Exhibitions
- 06 Rosann Gelvin Noel Gallery
Temporary Exhibitions
- 07 East Gallery
Temporary Exhibitions
- 08 Contemporary Gallery
Temporary Exhibitions
- 09 Bow Gallery
European and American Art
Before 1940
- 10 Trees Gallery
European Art Before 1900
- 11 Kinkead Gallery
Temporary Exhibitions
- 12 Kinkead Pavilion
Sixth Street Entrance

<https://kam.illinois.edu/files/Map-main-f2017.png>

⇒ 平面グラフ

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/12) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/19) |
| 3 | 木：数理 | (4/25) |
| * | 休み | (5/3) |
| * | 休講 | (5/10) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/17) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/24) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/31) |
| ● | 中間試験 | (6/7) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|-----------------------|--------|
| 7 | 最大流：モデル化 (1) — 割当 | (6/14) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 | (6/21) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/28) |
| 10 | 彩色：数理 | (7/5) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (7/12) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/19) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/26) |
| 14 | (授業等調整日) | (8/2) |
| | ● 期末試験 | (8/9?) |

注意：予定の変更もありうる

教員

- ▶ 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- ▶ 居室 : 西 4 号館 2 階 206 号室
- ▶ E-mail : okamotoy@uec.ac.jp
- ▶ Web : <http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/>

ティーチング・アシスタント

- ▶ 坂本 涼太 (さかもと りょうた)
- ▶ 居室 : 西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- ▶ Web : <http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2019/gn/>
- ▶ 注意 : 資料の印刷等は各学生が自ら行う
- ▶ 講義前日の 18:00 までに、ここに置かれる

講義資料

<http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2019/gn/>

- ▶ スライド
- ▶ 印刷用スライド : 8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- ▶ 演習問題
- ▶ 用語一覧
- ▶ Jupyter Notebook (Python 3)

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

- ▶ 講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (75分)

- ▶ スライドと板書で進める
- ▶ スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15分)

- ▶ 演習問題に取り組む
- ▶ 不明な点は教員に質問する

退室 (0分) ←重要

- ▶ コメント (授業の感想, 質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- ▶ コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー (アポイントメントによる)

- ▶ 質問など

演習問題

演習問題の進め方

- ▶ 授業の終わり 15 分は演習問題を解く時間
- ▶ 残った演習問題は自習用 (復習・試験対策用)
- ▶ 注意: 「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- ▶ 復習問題: 講義で取り上げた内容を反復
- ▶ 補足問題: 講義で省略した内容を補足
- ▶ 追加問題: 講義の内容に追加
- ▶ 発展問題: 少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- ▶ 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- ▶ レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- ▶ レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- ▶ レポートにはコメントがつけられて、返却される
 - ▶ 返却された内容については、再提出ができる (再提出締切は原則なし)
 - ▶ 再提出の際、返却された答案も添付しなくてはならない

評価

中間試験 と 期末試験 のみによる

▶ 出題形式

- ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
- ▶ その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし、「発展」として提示された演習問題は出題されない)
- ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- ▶ 時間：90 分 (おそらく)
- ▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- ▶ $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$ による

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。
「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが、
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは、授業に出て、演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- ▶ 指定しない

参考書

- ▶ 藤重悟,「グラフ・ネットワーク・組合せ論」, 共立出版, 2002.
- ▶ 繁野麻衣子,「ネットワーク最適化とアルゴリズム」, 朝倉書店, 2010.
- ▶ R.J. ウィルソン (著), 西関隆夫, 西関裕子 (訳),「グラフ理論入門 原書第4版」, 近代科学社, 2001.
- ▶ 茨木俊秀, 永持仁, 石井利昌,「グラフ理論」, 朝倉書店, 2010.
- ▶ など

この講義の約束

- ▶ 私語はしない (ただし, 演習時間の相談は積極的に OK)
- ▶ 携帯電話等はマナーモードにする
- ▶ この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- ▶ 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

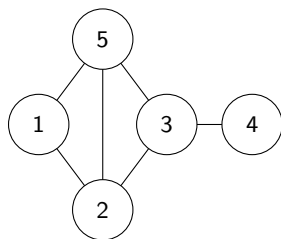
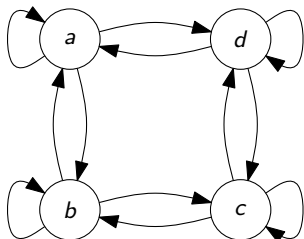
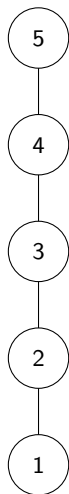
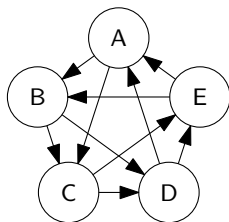
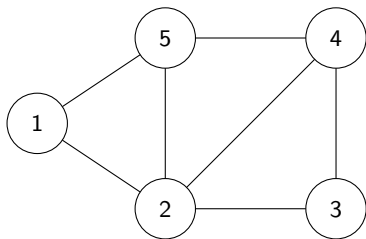
- ① グラフとは？
- ② グラフの次数
- ③ 今日のまとめ

概要

今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解する
- ▶ 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

グラフの例



有向グラフ

定義：有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 (V, A) で，

- ▶ V は集合
- ▶ $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

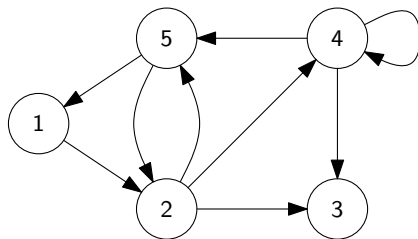
注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$

(順序対では順序が大事)

有向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



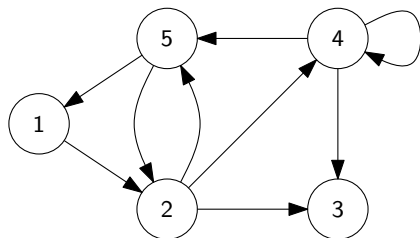
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の頂点と呼ぶ
- ▶ V を G の頂点集合と呼ぶ
- ▶ 弧 $(u, v) \in A$ に対して、 u はその始点であり、 v はその終点である
- ▶ A の要素を G の弧と呼ぶ
- ▶ A を G の弧集合と呼ぶ

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- ▶ 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点、
頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

定義：無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，

- ▶ V は集合
- ▶ $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

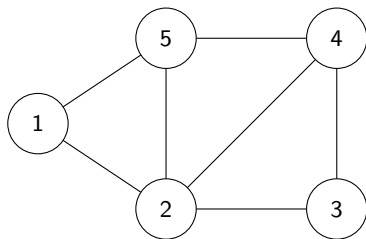
注意

$$\{2, 5\} = \{5, 2\}$$

(集合では順序を不問)

無向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



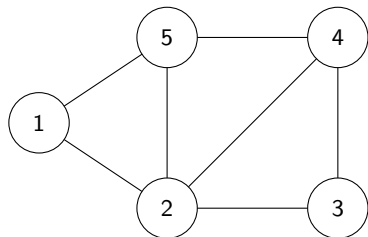
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語

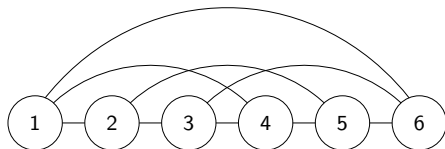
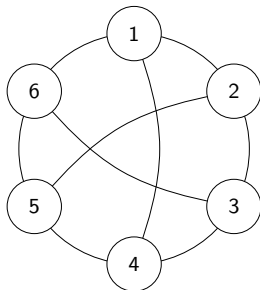
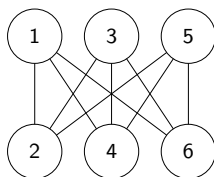
- ▶ V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- ▶ V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- ▶ 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して, u, v をその**端点**と呼ぶ
- ▶ 頂点 v が辺 e の端点であるとき, v は e に**接続**するという
- ▶ 頂点 u と v が辺を成すとき, u と v は**隣接**するという

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▶ 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- ▶ 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- ▶ 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1つのグラフに対するいろいろな図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$



用語に関する注意

有向グラフ

- ▶ 「頂点」の別名：「節点」, 「ノード」, 「点」
- ▶ 「弧」の別名：「辺」, 「有向辺」, 「枝」, 「アーク」, 「エッジ」

無向グラフ

- ▶ 「頂点」の別名：「節点」, 「ノード」, 「点」
- ▶ 「辺」の別名：「無向辺」, 「枝」, 「エッジ」

目次

① グラフとは？

② **グラフの次数**

③ 今日のまとめ

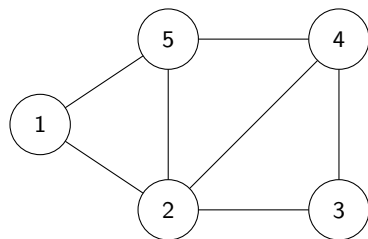
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の次数とは、 v に接続する辺の数のこと

▶ $\deg_G(v)$ と表記する



▶ $\deg_G(1) = 2$

▶ $\deg_G(2) = 4$

▶ $\deg_G(3) = 2$

▶ $\deg_G(4) = 3$

▶ $\deg_G(5) = 3$

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

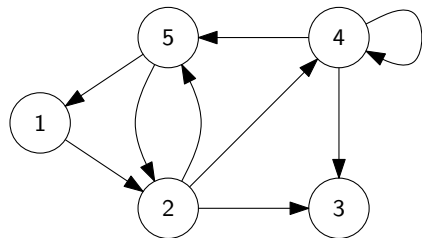
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$, 頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の入次数とは、 v を終点とする弧の数のこと

▶ $\deg_G^-(v)$ と表記する



▶ $\deg_G^-(1) = 1$

▶ $\deg_G^-(2) = 2$

▶ $\deg_G^-(3) = 2$

▶ $\deg_G^-(4) = 2$

▶ $\deg_G^-(5) = 2$

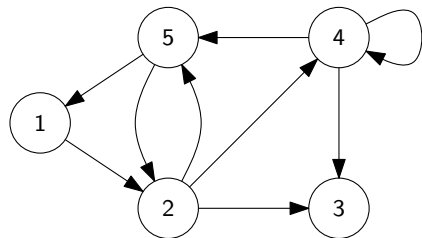
定義：有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$, 頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ の出次数とは、 v を始点とする弧の数のこと

▶ $\deg_G^+(v)$



▶ $\deg_G^+(1) = 1$

▶ $\deg_G^+(2) = 3$

▶ $\deg_G^+(3) = 0$

▶ $\deg_G^+(4) = 3$

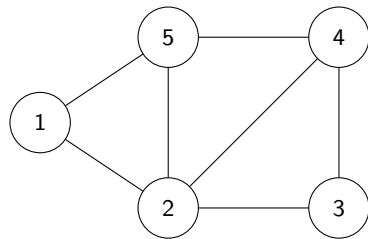
▶ $\deg_G^+(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- ▶ $\deg_G(1) = 2, \quad \deg_G(2) = 4,$
 $\deg_G(3) = 2, \quad \deg_G(4) = 3,$
 $\deg_G(5) = 3$
- ▶ $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- ▶ $|E| = 7$

格言

例を通して、直感を得る

握手補題の証明：準備 (直感)

- ▶ G の各頂点の周りを見て、
接続する辺の上に石を置く
- ▶ 石の総数を計算する

数え方 1

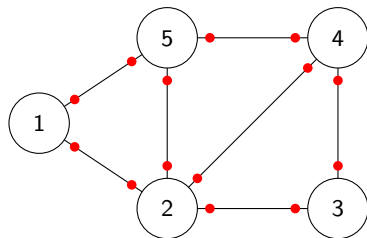
- ▶ 頂点 v の周りの石の数 = $\deg_G(v)$
- ▶ \therefore 石の総数 = $\sum_{v \in V} \deg_G(v)$

数え方 2

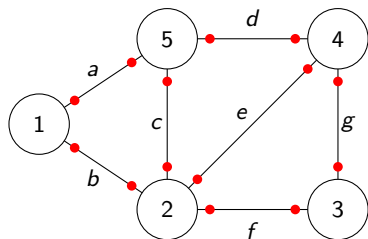
- ▶ 各辺 e 上の石の数 = 2
- ▶ \therefore 石の総数 = $\sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

- ▶ $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \text{石の総数} = 2|E|$



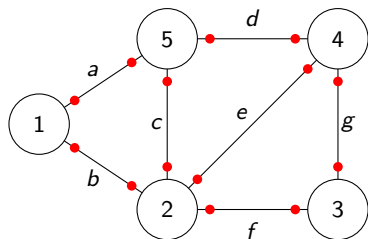
握手補題の証明：準備 (行列)



		E						
		a	b	c	d	e	f	g
V	1	1	1					
	2		1	1		1	1	
	3						1	1
	4				1	1		1
	5	1		1	1			

この行列を無向グラフの**接続行列**と呼ぶ

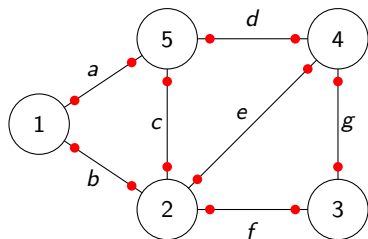
握手補題の証明：準備 (行列)



		E							
		a	b	c	d	e	f	g	
V	1	1	1						$= \deg_G(1)$
	2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
	3						1	1	$= \deg_G(3)$
	4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
	5	1		1	1				$= \deg_G(5)$

この行列を無向グラフの**接続行列**と呼ぶ

握手補題の証明：準備 (行列)



		E							
		a	b	c	d	e	f	g	
V	1	1	1						$= \deg_G(1)$
	2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
	3						1	1	$= \deg_G(3)$
	4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
	5	1		1	1				$= \deg_G(5)$
		\parallel	\parallel	\parallel	\parallel	\parallel	\parallel	\parallel	

この行列を無向グラフの**接続行列**と呼ぶ

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ したがって, $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$



握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ 任意の頂点 $v \in V$ に対して, v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- ▶ したがって, $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$



握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする.

- ▶ 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して, } M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- ▶ 任意の頂点 $v \in V$ に対して, v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- ▶ 任意の辺 $e \in E$ に対して, e の端点の数は 2 なので,

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{v \in V} M_{v,e} \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

- ▶ したがって, $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$

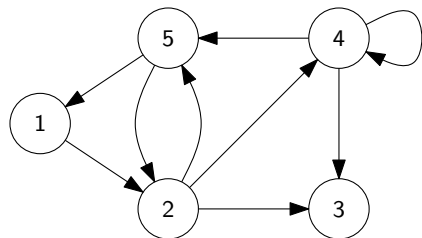
□

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

性質：有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \quad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- ▶ $\deg_G^-(1) = 1, \quad \deg_G^-(2) = 2,$
 $\deg_G^-(3) = 2, \quad \deg_G^-(4) = 2,$
 $\deg_G^-(5) = 2$
- ▶ $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$
 $= 9$
- ▶ $|A| = 9$

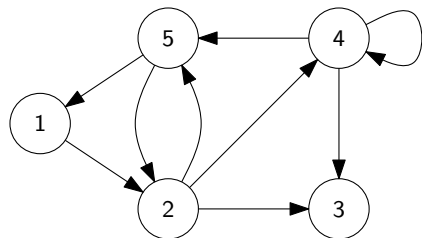
証明：演習問題

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

性質：有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \quad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- ▶ $\deg_G^+(1) = 1, \quad \deg_G^+(2) = 3,$
 $\deg_G^+(3) = 0, \quad \deg_G^+(4) = 3,$
 $\deg_G^+(5) = 2$
- ▶ $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = 1 + 3 + 0 + 3 + 2$
 $= 9$
- ▶ $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

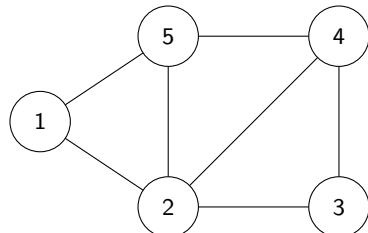
定義：最大次数，最小次数とは？

 G の最大次数とは， G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

 G の最小次数とは， G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



▶ $\deg_G(1) = 2$

▶ $\deg_G(2) = 4$

▶ $\deg_G(3) = 2$

▶ $\deg_G(4) = 3$

▶ $\deg_G(5) = 3$

▶ $\Delta(G) = 4$

▶ $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

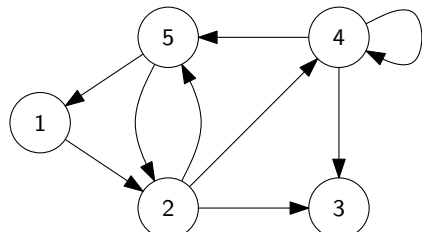
定義：最大入次数，最小入次数とは？

 G の最大入次数とは， G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$

 G の最小入次数とは， G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$



▶ $\deg_G^-(1) = 1$

▶ $\deg_G^-(2) = 2$

▶ $\deg_G^-(3) = 2$

▶ $\deg_G^-(4) = 2$

▶ $\deg_G^-(5) = 2$

▶ $\Delta^-(G) = 2$

▶ $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

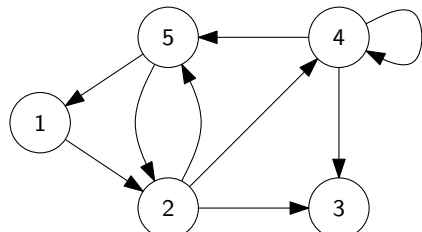
定義：最大出次数，最小出次数とは？

 G の最大出次数とは， G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$

 G の最小出次数とは， G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$



▶ $\deg_G^+(1) = 1$

▶ $\deg_G^+(2) = 3$

▶ $\deg_G^+(3) = 0$

▶ $\deg_G^+(4) = 3$

▶ $\deg_G^+(5) = 2$

▶ $\Delta^+(G) = 3$

▶ $\delta^+(G) = 0$

最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質 : 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より, G の平均次数は $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.

最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質 : 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より, G の平均次数は $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- ▶ 最小次数は平均次数以下なので, $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.

格言

最小値 \leq 平均値 \leq 最大値

最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質 : 最小次数, 平均次数, 最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明 :

- ▶ 握手補題より, G の平均次数は $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- ▶ 最小次数は平均次数以下なので, $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.
- ▶ 最大次数は平均次数以上なので, $\Delta(G) \geq \frac{2|E|}{|V|}$. □

格言

最小値 \leq 平均値 \leq 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

- 1 ある頂点 $v \in V$ が存在して, $\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
- 2 ある頂点 $v \in V$ が存在して, $\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明 :

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

- 1 ある頂点 $v \in V$ が存在して, $\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
- 2 ある頂点 $v \in V$ が存在して, $\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明 :

- 1 次数が最大である頂点をそのような頂点 v として選べる.
- 2 次数が最小である頂点をそのような頂点 v として選べる.

目次

① グラフとは？

② グラフの次数

③ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ グラフの定義を理解する
- ▶ 数え上げによる証明の手法を理解し、使えるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① グラフとは？
- ② グラフの次数
- ③ 今日のまとめ