グラフとネットワーク　第 10 回
彩色：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2019 年 7 月 5 日

最終更新：2019 年 7 月 2 日　15:25

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/12)
2. 道と閉路：数理 (4/19)
3. 木：数理 (4/26)
- 休み (5/3)
- 休講 (5/10)
4. マッチング：数理 (5/17)
5. マッチング：モデル化 (5/24)
6. 最大流：数理 (5/31)
- 中間試験 (6/7)

スケジュール 後半 (予定)

7. 最大流：モデル化 (1) — 割当 (6/14)
8. 最大流：モデル化 (2) — カットの視点 (6/21)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/28)
10. 彩色：数理 (7/5)
11. 彩色：モデル化 (7/12)
12. 平面グラフ：数理 (7/19)
13. 平面グラフ：モデル化 (7/26)
14. (授業等調整日) ← 行わない (8/2)
- 期末試験 (8/9？)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する
- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界

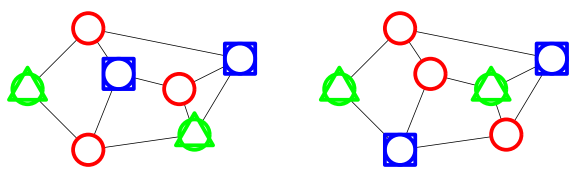
目次

無向グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：彩色とは？ (直感的な定義)

G の彩色 (さいしょく) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である　　彩色ではない

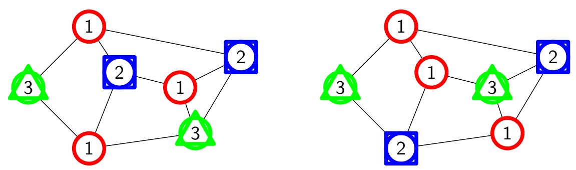
彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 彩色とは，写像 $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である　　3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \dots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

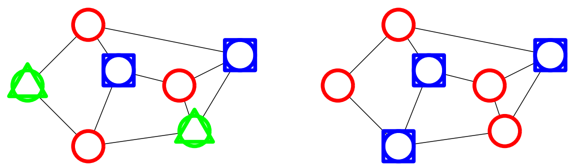
彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色可能性とは？

G が k 彩色可能であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

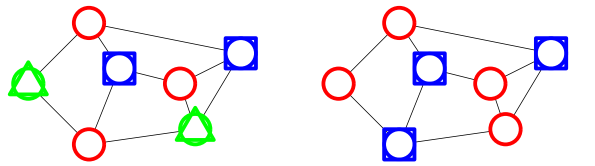
染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：染色数とは？

G の**染色数**とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

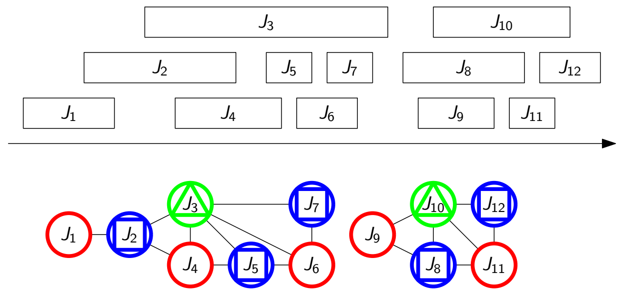
G の染色数を $\chi(G)$ で表す



3 彩色である　　　2 彩色は存在しない

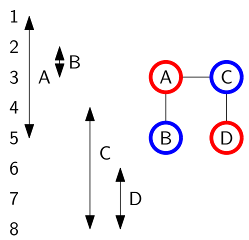
$\therefore$ このグラフの染色数は 3

彩色が現れる場面 (1)：ジョブスケジューリング



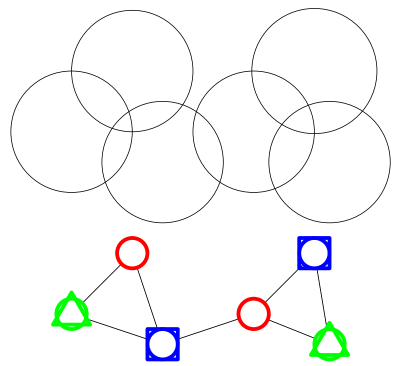
彩色が現れる場面 (2)：レジスタ割当

```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```




```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```


彩色が現れる場面 (3)：移動体通信における周波数割当



2 彩色可能性と二部グラフ

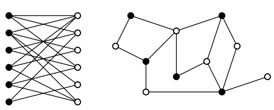
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Rightarrow$」の証明：G は 2 彩色可能であるとする

- G の 2 彩色を 1 つ考え，その彩色クラスを A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を部集合とする二部グラフである



2 彩色可能性と二部グラフ (続)

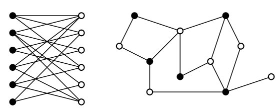
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

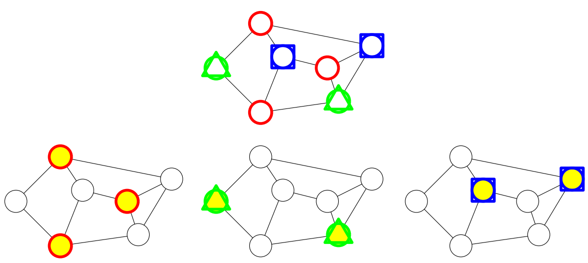
G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Leftarrow$」の証明：G は二部グラフであるとする

- G の部集合を A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を彩色クラスとする 2 彩色を持つ　$\square$



彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

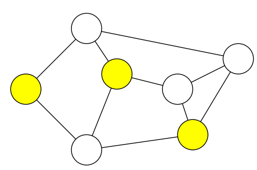
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

独立集合

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：独立集合とは？

G の**独立集合**とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



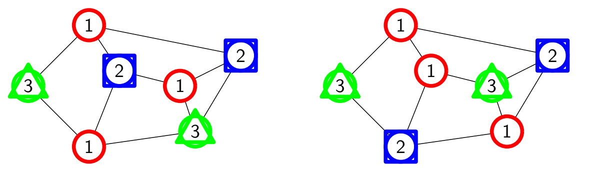
無向グラフの彩色：独立集合を用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？（独立集合を用いた定義）

G の k 彩色とは，
k 個の独立集合 $I_1, \ldots, I_k$ への頂点集合 V の分割

- $V = I_1 \cup \cdots \cup I_k$
- 任意の $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$I_i \cap I_j = \emptyset$



3 彩色である　　3 彩色ではない

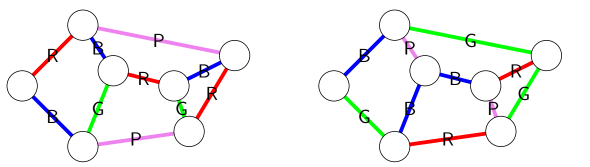
目次

無向グラフの辺彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：辺彩色とは？（直感的な定義）

G の辺彩色（さいしょく）とは，
G の辺への色の割当で，端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である　　辺彩色ではない

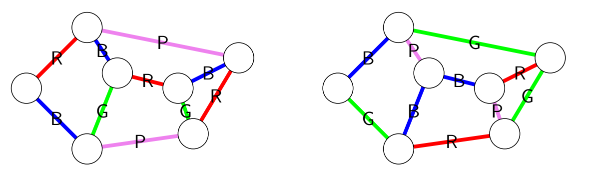
辺彩色において，同じ色を持つ辺の集合を彩色クラスとも呼ぶ

無向グラフの辺彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色とは？（形式的な定義）

G の k 辺彩色とは，写像 $c \colon E \to \{1, \ldots, k\}$ で，
端点を共有する任意の辺 $e, f \in E$ に対して $c(e) \neq c(f)$ を満たすもの



4 辺彩色である　　4 辺彩色ではない

c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

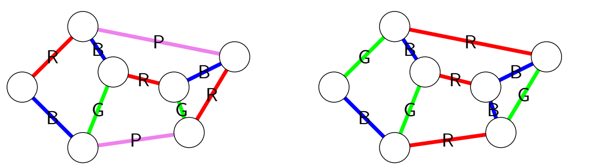
辺彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色可能性とは？

G が k 辺彩色可能であるとは，G の k 辺彩色が存在すること

このグラフは 4 辺彩色可能である



4 辺彩色である　　3 辺彩色は存在しない

注：G が k 辺彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 辺彩色可能

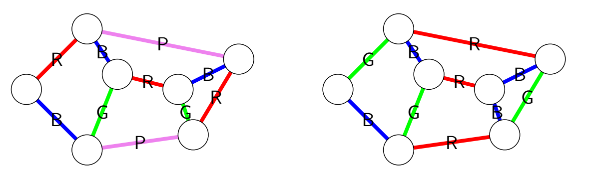
辺染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：辺染色数とは？

G の辺染色数とは，G の k 辺彩色が存在するような最小の k

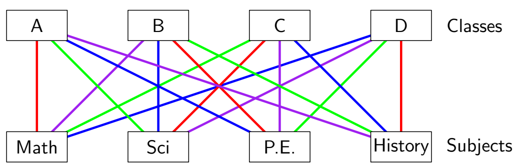
G の辺染色数を $\chi'(G)$ で表す



4 辺彩色である　　3 辺彩色は存在しない

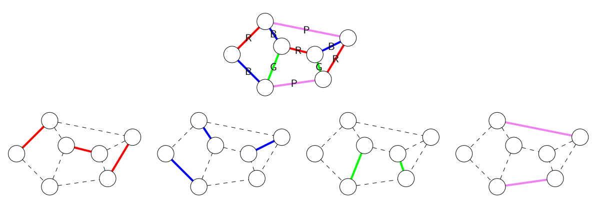
$\therefore$ このグラフの辺染色数は 4

辺彩色が現れる場面：時間割作成



		A	B	C	D
■	1	Math	P.E.	Sci	History
■	2	Sci	History	Math	P.E.
■	3	P.E.	Sci	History	Math
■	4	History	Math	P.E.	Sci

彩色クラスとマッチング



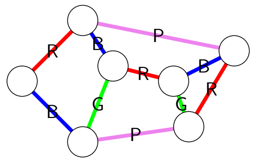
辺彩色の各彩色クラスはマッチング

無向グラフの辺彩色：マッチングを用いた定義

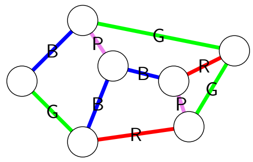
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色とは？（マッチングを用いた定義）

G の k 辺彩色とは，
k 個のマッチング $M_1, \dots, M_k$ への辺集合 E の分割



4 辺彩色である



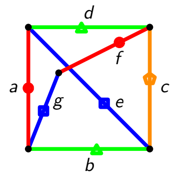
4 辺彩色ではない

辺彩色は彩色の特殊な場合

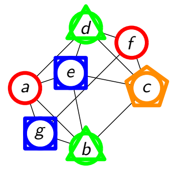
定義：線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の線グラフ $L(G)$ とは

- 頂点集合が E であり，
- 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ と e_2 が共通端点を持つ $\}$



G

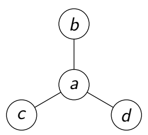


$L(G)$

G の辺彩色 $\leftrightarrow$ $L(G)$ の彩色　つまり，$\chi'(G) = \chi(L(G))$

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない（対応する元のグラフがない）



つまり，$K_{1,3} = L(G)$ を満たす無向グラフ G は存在しない

目次

染色数の上界

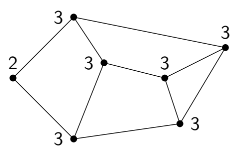
性質：染色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の最大次数 $\Delta(G)$ とは，その頂点の次数の最大値



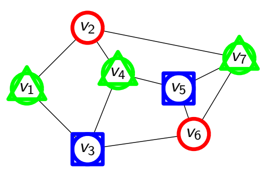
$\Delta(G) = 3$

証明：アルゴリズムによる証明（$\Delta(G) + 1$ 色しか使わない彩色を与える）

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定，パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- σ に沿って，頂点に 1 つずつ，色を割り当てる
- 頂点 v を塗るとき，
  1. 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る
  2. 既に使った色で塗れる場合は，
     既に使った色の中で最も小さな色で塗る

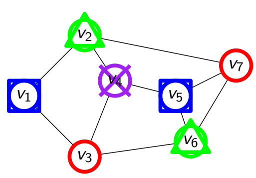
実行例　σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7



貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定，パレットは $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$
- σ に沿って，頂点に 1 つずつ，色を割り当てる
- 頂点 v を塗るとき，
  1. 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る
  2. 既に使った色で塗れる場合は，
     既に使った色の中で最も小さな色で塗る

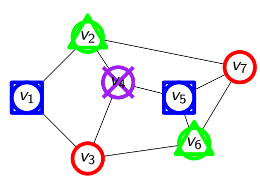
実行例（別の順序）σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4



染色数の上界：証明

- 貪欲彩色で，任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg_G(v)$（次数）
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は必ず余っている
- $\therefore$ どの頂点も必ず塗れる　　($\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$)
- よって，貪欲彩色は失敗せずにすべての頂点に色を塗る　□

全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4



貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり，σ を変えると，異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば，貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり，染色数を計算するためには，うまい全順序を見つければよい

今からやること

- そのようなうまい全順序をどう見つけるか？ (次回)
- その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

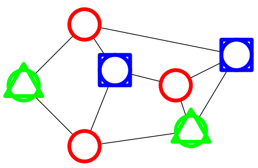
実は，いつもうまくいくとは限らないが，うまくいく場合を紹介する

目次

彩色の最適性

定義：染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の染色数とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



疑問

- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

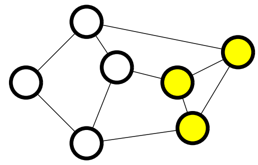
$\chi(G) = 3$???

クリーク

定義：グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- C が G のクリークである
$\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感：C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

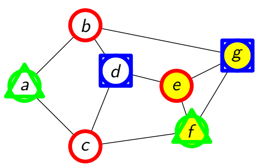
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



		e	f	g	
●	$\{b, c, e\}$	1			≤ 1
■	$\{d, g\}$			1	≤ 1
▲	$\{a, f\}$		1		≤ 1
		$=1$	$=1$	$=1$	

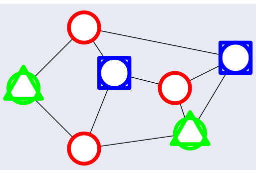
彩色とクリークの弱双対性

証明：$\chi(G)$ 彩色を独立集合 $I_1, \ldots, I_{\chi(G)}$ への V の分割と捉える

- 各 $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$, $v \in C$ に対して，
$$M_{i,v} = \begin{cases} 1 & (v \in I_i), \\ 0 & (v \notin I_i) \end{cases}$$
として行列 $M \in \mathbb{R}^{\{1,\ldots,\chi(G)\} \times C}$ を考える
- 各独立集合 I_i と C は頂点を 2 つ以上共有しないので，
$$\sum_{i=1}^{\chi(G)} \left(\sum_{v \in C} M_{i,v} \right) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$
- 各 $v \in C$ は $I_1, \ldots, I_{\chi(G)}$ の中のちょうど 1 つの要素なので
$$\sum_{v \in C} \left(\sum_{i=1}^{\chi(G)} M_{i,v} \right) = \sum_{v \in C} 1 = |C|$$
- したがって，$\chi(G) \geq |C|$ □

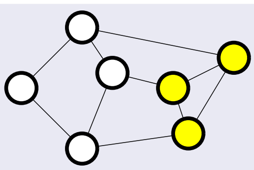
彩色が最適であることの確認法

$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた
$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた
$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 3$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

- k 色で塗る (つまり，$\chi(G) \leq k$)
- 頂点数 k のクリークを見つける (つまり，$\chi(G) \geq k$)
- したがって，$\chi(G) = k$

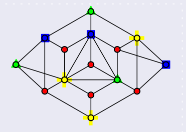
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

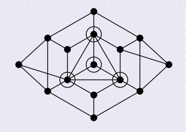
彩色の最適性の証明：例

$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた
$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた
$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 4$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

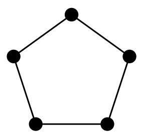
- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)

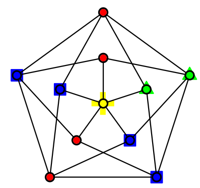
頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

Grötzsch グラフ



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

目次

今日のまとめ

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界